

# Dietrich Grau

## Elektrodynamik und Quantenmechanik für Lehramt



Version 2.68 [2024-10-12]

Jeweils neueste Version: siehe <http://www.dietrich-grau.at/>

Erstellt mit Lua<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, KOMA-Script, microtype, IBM Plex Text Fonts, STIX Two Math Fonts, unicode-math, amsmath, empheq, AutoCAD, mdframed und hyperref

Dr. Dietrich Grau

Assistenzprofessor und Universitätslektor i. R.

Institut für Theoretische Physik

Technische Universität Wien

Die Bilder auf der Titelseite zeigen in der ersten Reihe Michael Faraday (1791-1867), James Clerk Maxwell (1831-1879), Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928, Nobelpreis 1902) und Albert Einstein (1879-1955, Nobelpreis 1921), in der zweiten Reihe Max Born (1882-1970, Nobelpreis 1954), Erwin Schrödinger (1887-1961, Nobelpreis 1933), Werner Heisenberg (1901-1976, Nobelpreis 1932) und Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984, Nobelpreis 1933).

© 2017 Dietrich Grau

Die PDF-Datei dieses Werkes darf in keiner Weise verändert werden. Sie darf ausgedruckt, weitergegeben, in Dateiarchiven gespeichert und auf Webseiten gestellt werden. Das Werk darf in unveränderter Form sowohl elektronisch als auch auf Papier weitergegeben werden, für die Weitergabe darf aber kein Entgelt verlangt werden, das über die reinen Selbstkosten – wie Druck- oder Kopierkosten – hinausgeht.

## Vorwort

Dieses Skriptum sollte den Hörern meiner Vorlesung „Theoretische Physik 2 für Lehramtskandidaten“ an der TU Wien das Mitschreiben ersparen und ihnen damit ermöglichen, sich ganz auf den Vortrag zu konzentrieren. Es wurde deshalb großer Wert auf Ausführlichkeit, Vollständigkeit der Argumente und Verständlichkeit gelegt.

Zu einer Anzahl spezieller Fragestellungen wird in Fußnoten zum Text weiterführende, teilweise auch sehr anspruchsvolle Literatur zum Nachschlagen angegeben. Im Literaturverzeichnis sind aber nur jene Lehrbücher der Theoretischen Physik angeführt, von denen ich finde, dass sie sich aufgrund von Umfang, Stoffauswahl und Darstellung für Lehramtskandidaten besonders gut als begleitende Lektüre eignen.

In den acht Jahren, in denen ich die Vorlesung gehalten habe, habe ich viele Ergänzungen und Änderungen vorgenommen und auch nach meiner Pensionierung habe ich das Skriptum weiter aktualisiert und den Studenten zur Verfügung gestellt.

Da ich denke, dass diese Unterlagen wegen der ungewöhnlich ausführlichen Erklärungen und detaillierten Zwischenrechnungen auch anderen Personen nützlich sein könnten, stelle ich sie jetzt über meine Homepage allen an Elektrodynamik und Quantenmechanik Interessierten zur Verfügung. Voraussetzung für das Verständnis sind Kenntnisse der Mathematischen Methoden der Theoretischen Physik, der Klassischen Mechanik inklusive der hamiltonschen Formulierung derselben sowie der Speziellen Relativitätstheorie.

Dietrich Grau  
d.grau@kabsi.at  
<http://www.dietrich-grau.at/>



# Inhaltsverzeichnis

## I Klassische Elektrodynamik

### 1 Mikroskopische Elektrodynamik (Maxwell-Lorentz-Theorie)

1.1	Elektrisch geladene Teilchen und elektromagnetisches Feld . . . . .	3
1.2	Trägheitsprinzip und Relativitätsprinzip . . . . .	6
1.3	Elektrische und magnetische Feldstärke. Kraft auf eine Testladung . . . . .	10
1.4	Quellen des elektromagnetischen Feldes . . . . .	11
1.5	Diskretheit, strenge Erhaltung und Lorentzinvarianz der Ladung . . . . .	12
1.6	Maxwellgleichungen . . . . .	14
1.7	Grenzen der klassischen Elektrodynamik . . . . .	18
1.8	Elektromagnetische Potentiale. Eichinvarianz . . . . .	20
1.9	Lorentzkraft und Strahlungsrückwirkungskraft . . . . .	23
1.10	Das logische Schema der Maxwell-Lorentz-Theorie . . . . .	26
1.11	Erhaltungssätze für das abgeschlossene System . . . . .	29
1.11.1	Energieerhaltung . . . . .	31
1.11.2	Impulserhaltung . . . . .	35
1.11.3	Drehimpulserhaltung . . . . .	38
1.12	Transformation von Quellen und Feldern. Lorentzkovarianz . . . . .	39
1.12.1	Transformation der Quellen . . . . .	40
1.12.2	Transformation der Potentiale . . . . .	43
1.12.3	Transformation der Feldstärken . . . . .	44
1.12.4	Transformation der Kräfte. Lorentzkovarianz . . . . .	47
1.12.5	Offensichtlich lorentzkovariante Formulierung. Feldtensor . . . . .	49
1.13	Grundaufgaben der Elektrodynamik . . . . .	51
1.14	Bewegung einer Punktladung in einem vorgegebenen Feld . . . . .	54
1.14.1	Bewegung in einem homogenen elektrostatischen Feld . . . . .	58
1.14.2	Bewegung in einem homogenen magnetostatischen Feld . . . . .	60
1.15	Feld einer vorgegebenen Quellverteilung . . . . .	62
1.15.1	Retardierte Potentiale . . . . .	62
1.15.2	Feld einer bewegten Punktladung . . . . .	71
1.16	Ausstrahlung von Wellen durch eine vorgegebene Quellverteilung . . . . .	79
1.16.1	Ausstrahlung durch eine beschleunigt bewegte Punktladung . . . . .	79
1.17	Ausbreitung elektromagnetischer Wellen . . . . .	89
1.17.1	Fortschreitende ebene Wellen und Wellenpakete . . . . .	90

1.17.2 Komplexe Schreibweise . . . . .	99
1.18 Rückwirkung der Strahlung auf die Bewegung der Quellen . . . . .	101

## **2 Makroskopische Elektrodynamik**

2.1 Mikroskopische und makroskopische Felder . . . . .	111
2.2 Herleitung der makroskopischen Feldgleichungen . . . . .	118
2.3 Materialgleichungen . . . . .	128
2.4 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Medium . . . . .	137
2.4.1 Ebene Wellen und Wellenpakete in „transparenten Medien“ . . . . .	143
2.5 Grenzbedingungen für die makroskopischen Felder . . . . .	147
2.6 Elektromagnetische Energiedichte und Energiestromdichte im Medium . . . . .	155
2.7 Reflexion, Brechung und Totalreflexion an einer ebenen Grenzfläche . . . . .	159
2.7.1 Reflexions- und Brechungsgesetz . . . . .	161
2.7.2 Polarisations- und Intensitätsverhältnisse . . . . .	168
2.8 Beugung an undurchdringlichen Hindernissen . . . . .	181
2.8.1 Grundaufgabe bei Anwesenheit undurchdringlicher Hindernisse . . . . .	181
2.8.2 Mathematischer Hilfssatz zur Helmholtzgleichung . . . . .	185
2.8.3 Kirchhoffsches Verfahren . . . . .	187
2.8.4 Fraunhoferbeugung. Beispiele: Spalt und Doppelspalt . . . . .	193

### **Aufgaben zur Elektrodynamik**

### **Sachverzeichnis zur Elektrodynamik**

## **II Quantenmechanik**

### **3 Teilchen- und Feldaspekte bei Licht und Materie**

3.1 Versagen der klassischen Teilchen- und Feldtheorien . . . . .	219
3.2 Doppelspaltversuch mit Licht bzw. mit Materiestrahlen . . . . .	222
3.3 De Broglie-Schrödinger-Materiefeldtheorie . . . . .	228
3.4 Bornsche Interpretation des Absolutquadrates der Feldfunktion . . . . .	230
3.5 Interpretationsfragen der Quantenmechanik. Standardinterpretation . . . . .	232
3.6 Statistische Kausalität. Aufgabe der Quantenmechanik . . . . .	236

### **4 Grundkonzepte der Quantenmechanik**

4.1 Unbestimmtheitsprinzip und Korrespondenzprinzip . . . . .	239
4.2 Grundgesetze und Korrespondenzregeln . . . . .	240
4.3 „Rateweg“ zur Quantenmechanik . . . . .	241
4.4 Konzept des Hilbertraumes . . . . .	256
4.5 Was Grundgesetze und Korrespondenzregeln leisten müssen . . . . .	259
4.6 Darstellung der Zustände durch Hilbertraum-Vektoren . . . . .	261

4.7 Darstellung der Observablen durch Hilbertraum-Operatoren . . . . .	266
4.8 Messungen und Umpräparationen . . . . .	285
4.9 Quantenmechanische „Dynamik“ . . . . .	295
4.10 Mittelwert und Unbestimmtheit einer Observablen . . . . .	300
4.11 Zeitliche Änderung von Mittelwerten. Stationäre Zustände. . . . .	308
4.12 Ehrenfestsche Gleichungen . . . . .	311
4.13 Verträgliche Observablen . . . . .	316
4.14 Unbestimmtheitsbeziehungen . . . . .	328
4.15 Vollständige Sätze verträglicher Observablen . . . . .	333
4.16 Klassische Mechanik und Quantenmechanik: Problemstellung . . . . .	336

**Aufgaben zur Quantenmechanik**

**Sachverzeichnis zur Quantenmechanik**

**III Anhänge**

**Literaturverzeichnis**

**5 Fundamentale physikalische Konstanten und Umrechnungsfaktoren**





# **Teil I**

## **Klassische Elektrodynamik**



# Kapitel 1

## Mikroskopische Elektrodynamik (Maxwell-Lorentz-Theorie)

### 1.1 Elektrisch geladene Teilchen und elektromagnetisches Feld

Die klassische mikroskopische Elektrodynamik (s. Abb. 1.1) befasst sich mit der Bewegung stabiler elektrisch geladener Mikroteilchen (Elektronen, Kerne) zufolge der elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen den Teilchen sowie allfälliger äußerer elektromagnetischer Kräfte und mit der von den Teilchen aufgrund ihrer beschleunigten Bewegung abgegebenen elektromagnetischen Strahlung. Sie idealisiert die Teilchen als klassische *Punktteilchen* mit elektrischen Ladungen  $q_b$  ( $q_b \neq 0$ ) und Massen  $m_b$ <sup>1</sup> ( $b = 1, 2, \dots, N$ ) und beschreibt die elektromagnetischen Kräfte sowie die elektromagnetische Strahlung durch ein klassisches kontinuierliches *Feld*, das maxwellsche elektromagnetische Feld. Sowohl den Teilchen als auch dem Feld wird eine eigenständige physikalische Realität zugeschrieben.<sup>2</sup>

Im Rahmen dieser Modellvorstellungen gelingt es, einen weiten Erfahrungsbereich zufrieden stellend zu beschreiben. Wie jede physikalische Theorie besitzt allerdings auch die Maxwell-Lorentz-Theorie einen begrenzten Anwendungsbereich (s. Abschnitt 1.7).

Die zwischen den Teilchen zusätzlich zu den elektromagnetischen Kräften wirkenden Gravitationskräfte werden vernachlässigt. Dies ist möglich, da die elektromagnetischen Kräfte zwischen geladenen Mikroteilchen rund  $10^{40}$ -mal so stark sind wie die Gravitationskräfte.<sup>3</sup> Für die Formulierung der Theorie ist dies ein glücklicher Umstand: Aufgrund des Äquivalenzprinzips kann es nämlich keine lorentzkovariante (L-kovariante) Gravitationstheorie geben, sodass eine konsistente Einbeziehung von elektromagnetischen Kräften *und* Gravitation nur unter Zugrundelegung einer gekrümmten Raum-Zeit, also in der Allgemeinen Relativitätstheorie, möglich ist.

---

<sup>1</sup>Da es in der Natur keine masselosen geladenen Teilchen gibt, gilt auch  $m_b \neq 0$ .

<sup>2</sup>Bei einer solchen Aussage ist der Modellcharakter physikalischer Theorien zu beachten.

<sup>3</sup>Die Coulombabstoßung zweier ruhender Elektronen ist um den Faktor  $4 \cdot 10^{42}$  stärker als die Massenanziehung, für Protonen beträgt der Faktor ungefähr  $10^{36}$ .

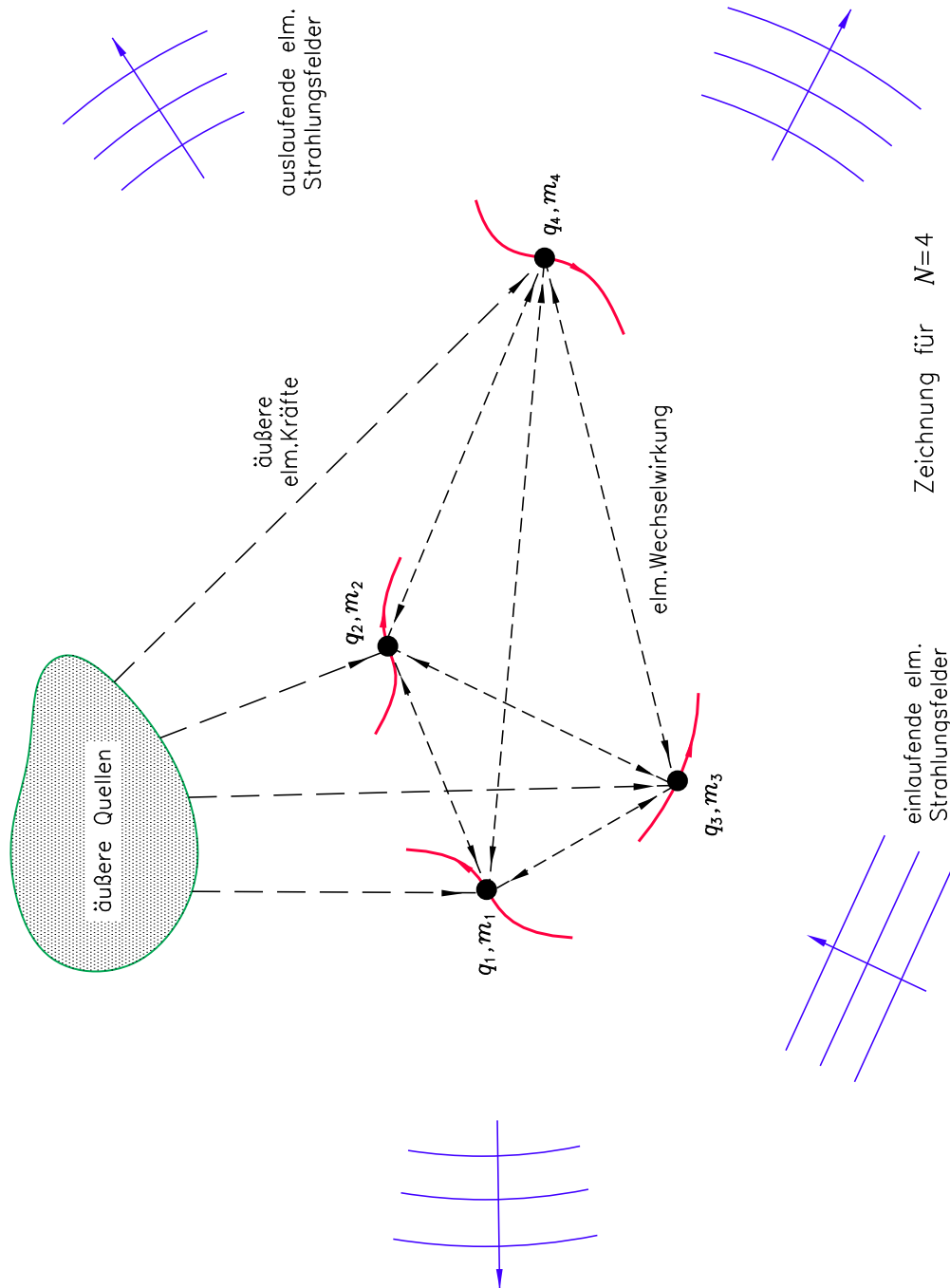


Abbildung 1.1: Maxwell-Lorentz-Theorie

Die elektrischen Ladungen und die mit ihrer Bewegung verbundenen elektrischen Ströme werden als *Quellen* („Erreger“) des elektromagnetischen Feldes interpretiert. Beim *abgeschlossenen System* ist das vorhandene Feld allein von diesen Systemquellen physikalisch verursacht. Es beschreibt die Übertragung von Energie, Impuls und Drehimpuls zwischen den Teilchen zufolge deren elektromagnetischer Wechselwirkung sowie die Abgabe von Energie, Impuls und Drehimpuls durch Abstrahlung. Beim *nichtabgeschlossenen System* werden neben den Systemquellen vorgegebene äußere Quellen und (oder) vorgegebene einlaufende Strahlungsfelder zugelassen. Einlaufende Strahlungsfelder kann man sich von im Unendlichen befindlichen Quellen herrührend denken.

Die äußeren Quellen nennt man so, weil sie von außen aufgeprägt sind und deshalb nicht zum System gezählt werden („äußere“ muss also nicht „in einem anderen Raum-bereich befindlich“ bedeuten). Die entsprechenden Ladungs- und Stromdichten werden durch *vorgegebene* Funktionen von Ort und Zeit beschrieben. Die betreffenden Quellen üben elektromagnetische Kräfte auf die  $N$  Teilchen des Systems aus<sup>4</sup>, während deren Rückwirkung auf die äußeren Quellen kompensiert wird. Diese Kompensation, d. h. das „Erzwingen“ der vorgegebenen Orts- und Zeitabhängigkeit, ist nur durch Einwirken *nichtelektromagnetischer* Kräfte auf die äußeren Quellen möglich (mechanische Kräfte – Kraftwerk, chemische Kräfte – Batterie). Von den äußeren Quellen nehmen wir entsprechend an, dass sie keine mikroskopischen räumlichen Schwankungen aufweisen.

Das vorhandene elektromagnetische Feld ist beim nichtabgeschlossenen System nicht allein von den Systemquellen, den  $N$  Punktladungen, physikalisch verursacht, sondern auch von den äußeren Quellen und von Quellen im Unendlichen (falls ein einlaufendes Strahlungsfeld vorhanden ist). Es beschreibt neben der elektromagnetischen Wechselwirkung der Teilchen und der Abstrahlung der Teilchen auch die Wirkung der äußeren Quellen und (oder) des einlaufenden Strahlungsfeldes auf die Teilchen.

Die wechselseitige Bedingtheit von Teilchenbewegung und Feldveränderung muss in der mathematischen Formulierung der Theorie durch ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem für die Teilchenbahnen und die elektromagnetischen Feldfunktionen ausgedrückt werden. Man benötigt also Feldgleichungen, in welche alle im Endlichen befindlichen Quellen eingehen, ein Kraftgesetz, welches die Kräfte auf eine Punktladung zu berechnen gestattet, sowie Bewegungsgleichungen für die  $N$  Punktladungen. Zusätzlich sind noch Anfangsbedingungen bzw. asymptotische Bedingungen erforderlich.

Lorentz hat 1902 als erster eine solche Teilchen-Feld-Theorie durch Kombination von Maxwellgleichungen, Lorentzkraft und (nichtrelativistischen) Bewegungsgleichungen formuliert, weshalb die mikroskopische Elektrodynamik auch als Maxwell-Lorentz-Theorie bezeichnet wird. Sie war die „Elementarteilchentheorie“ jener Zeit. Lorentz nannte die Teilchen „Elektronen“ oder „Punkte“ (in heutiger Terminologie handelt es sich um Elektronen und Kerne), weshalb man auch von der „lorentzschen Elektronentheorie“ spricht.

---

<sup>4</sup>*Nichtelektromagnetische* äußere Kräfte sollen auf die  $N$  Teilchen des Systems nicht wirken.

## 1.2 Trägheitsprinzip und Relativitätsprinzip

Die Maxwell-Lorentz-Theorie lässt sich – wie wir zeigen werden – als *lorentzkovariante Theorie* formulieren. Ihre Gesetze sind dann forminvariant gegenüber Lorentztransformationen, die Theorie genügt also dem einsteinschen Relativitätsprinzip. Die *Spezielle Relativitätstheorie* stellt somit eine „Rahmentheorie“ für die klassische Elektrodynamik dar.<sup>5</sup> Deshalb rekapitulieren wir hier einige Grundprinzipien der Speziellen Relativitätstheorie.

Naturgesetze haben in verschiedenen Bezugssystemen<sup>6</sup> i. Allg. eine verschiedene mathematische Form. Das *galileische Trägheitsprinzip* postuliert die Existenz einer speziellen Klasse von Bezugssystemen, der Inertialsysteme, in denen die Naturgesetze eine besonders einfache Form besitzen. Das *Relativitätsprinzip* postuliert die Gleichberechtigung aller Inertialsysteme, verlangt also darüber hinaus, dass diese einfache Form in allen Inertialsystemen sogar dieselbe ist (Forminvarianz = Kovarianz der Naturgesetze bei Wechsel des Inertialsystems). Diese Prinzipien stellen heuristische Hilfsmittel zur Analyse der Raum-Zeit-Struktur und der Transformationen zwischen Bezugssystemen dar.

*Definition:* **Inertialsystem**

Ein Bezugssystem heißt Inertialsystem, wenn in ihm die kräftefreie Bewegung eines Teilchens gleichförmig geradlinig verläuft, und zwar bei beliebiger Teilchenart, beliebiger Wahl des Anfangszeitpunktes, der Anfangslage und der Anfangsgeschwindigkeit.

*Heuristisches Prinzip:* **Galileisches Trägheitsprinzip**

Es gibt in der Natur raumzeitlich unendlich ausgedehnte Inertialsysteme.

*Heuristisches Prinzip:* **Relativitätsprinzip**

Alle Naturvorgänge laufen unter gleichen Anfangs- und Randbedingungen in allen Inertialsystemen gleich ab, gleichartige physikalische Experimente führen in allen Inertialsystemen zu gleichen Resultaten. Mathematisch ausgedrückt: Gleichungen, die Naturgesetze ausdrücken, müssen sich so formulieren lassen, dass sie gegenüber jenen Transformationen, welche Inertialsysteme verknüpfen, forminvariant (kovariant) sind.

Diese beiden Grundprinzipien stellen eine gemeinsame Basis der newtonschen und der klassischen relativistischen Mechanik, der newtonschen Gravitationstheorie, der

---

<sup>5</sup>Eine analoge Aussage gilt auch für die Quantenelektrodynamik.

<sup>6</sup>Unter einem Bezugssystem verstehen wir ein Koordinatensystem, das mit synchronisierten Uhren an den Ortsmarken ausgestattet ist.

klassischen Elektrodynamik, der nichtrelativistischen und relativistischen Quantenmechanik und der Quantenfeldtheorien, speziell der Quantenelektrodynamik, dar. Lediglich die einsteinsche Gravitationstheorie (Allgemeine Relativitätstheorie) fällt aus diesem Rahmen heraus: Sind starke gravitierende Massen, z. B. ein schwarzes Loch, in raumzeitlicher Nähe der untersuchten physikalischen Vorgänge vorhanden, so muss die Krümmung der Raum-Zeit berücksichtigt werden. Das galileische Trägheitsprinzip muss dann aufgegeben werden, es gibt dann lediglich „raumzeitlich lokale Inertialsysteme“.<sup>7</sup>

Die Form der Transformationen, welche Inertialsysteme verknüpfen, ist durch die beiden heuristischen Prinzipien bereits weitgehend festgelegt. Eine endgültige Festlegung gelingt durch einen Zusatz zum Relativitätsprinzip.

Galileisches Relativitätsprinzip
<i>Relativitätsprinzip ergänzt durch den galileischen Zusatz:</i> Die Uhren laufen in allen Inertialsystemen synchron (universelle bzw. absolute Zeit).

Auf dem Boden des Relativitätsprinzips ist dies – wie man in der Relativitätstheorie zeigt – gleichwertig zu folgendem Zusatz: Physikalische Wirkungen breiten sich mit unendlicher Geschwindigkeit aus.

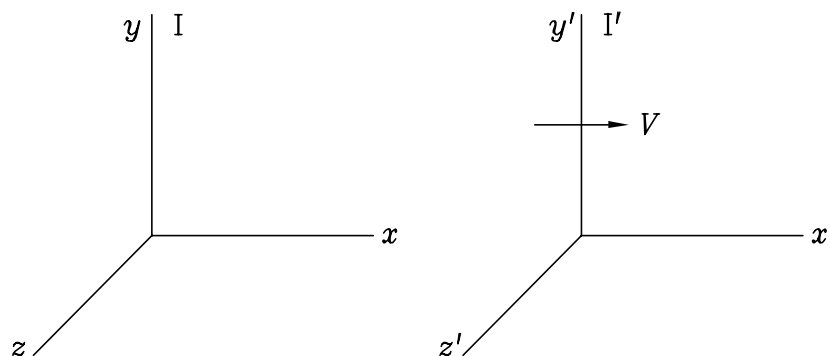


Abbildung 1.2: Relativbewegung der Koordinatensysteme zweier Inertialsysteme I, I' bei Standardkonfiguration

Kann das galileische Relativitätsprinzip zugrunde gelegt werden, so findet man für das Transformationsgesetz der Raumzeitkoordinaten eines „Ereignisses“<sup>8</sup> E bei Wechsel des Inertialsystems für Systeme in *Standardkonfiguration* (achsenparallele Koordinatensysteme, Relativbewegung in x- bzw. x'-Richtung mit der Geschwindigkeit V bzw.  $-V$ ,

<sup>7</sup>Ein räumlich nicht zu weit ausgehntes frei fallendes, gegen den Fixsternhimmel nicht rotierendes Laboratorium (wie die einsteinsche Aufzugskabine) stellt ein derartiges „Fast-Inertialsystem“ dar.

<sup>8</sup>Gemeint ist ein *Punkt ereignis*, das ist ein physikalischer Vorgang, dessen raumzeitliche Ausdehnung (gemessen in einem beliebigen Bezugssystem) unter den gegebenen Umständen vernachlässigt werden kann (Beispiel: Zusammenstoß zweier Punktteilchen).

Zusammenfallen der Koordinatenursprünge für  $t = t' = 0$  [siehe die Abbildung 1.2]) die **Galileitransformationen**:

$t' = t,$	$t = t',$
$x' = x - Vt,$	$x = x' + Vt',$
$y' = y,$	$y = y',$
$z' = z;$	$z = z'.$

Die newtonsche Mechanik entstand auf dem Boden der Annahme der Existenz von augenblicklich über die größten Entfernungen wirkenden Kräften zwischen Teilchen bzw. Körpern, d. h. als *Fernwirkungstheorie* mit instantanen Fernkräften. Die Einführung eines Feldes für die Beschreibung der newtonschen Gravitationswechselwirkung<sup>9</sup> stellt ein rein formales Hilfsmittel zur eleganteren mathematischen Beschreibung dar. Die Feldstärke in einem Aufpunkt wird bei beliebiger Bewegung der „felderzeugenden“ Teilchen aus der jeweiligen *Momentanlage* aller Teilchen berechnet. Eine solche Feldstärke  $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$  lässt sich also durch die Momentanlagen  $\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)$  der Teilchen ausdrücken und dadurch aus den Grundgleichungen eliminieren (s. Seite 29). Sie ist ein mathematisches „Gespenst“, weshalb man dem Feld im Rahmen der newtonschen Gravitationstheorie keine physikalische Realität zuschreiben sollte.

In der Elektrodynamik stellte man experimentell eine *endliche Signalgeschwindigkeit* der Wirkungen fest. Da sie als Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum (d. h. im „leeren Raum“) gemessen wird, heißt sie auch „Vakuumlichtgeschwindigkeit“. Ihr Wert ist durch

$$c = 2,99792458 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$$

gegeben.<sup>10</sup> Die Kräfte, die in einem elektromagnetischen Feld auf eine Testladung wirken, werden *nicht* durch die räumliche Lage der felderzeugenden Ladungen im betreffenden Augenblick bestimmt. Eine Änderung an einer felderzeugenden Ladung kann sich an der Testladung nur mit einer entsprechenden *Verzögerung (Retardierung)* bemerkbar machen. Die Maximalgeschwindigkeit der Ausbreitung der Wirkung nennt man ihre Signalgeschwindigkeit. Sie bestimmt die kürzestmögliche Zeit, nach der die erste Nachricht (das erste Signal) über eine an einem Teilchen eingetretene Änderung zu einem anderen Teilchen gelangen kann. Hält man an einer Fernwirkungstheorie fest, so muss man retardierte Fernkräfte einführen. Da in einer retardierten Fernwir-

---

<sup>9</sup>Strahlung, d. h. Gravitationswellen, gibt es in der newtonschen Gravitationstheorie nicht.

<sup>10</sup>Seit der Neudefinition der Längeneinheit Meter im Jahre 1983 besitzt die Vakuumlichtgeschwindigkeit diesen Wert *definitionsgemäß* („Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während des Intervalls von  $1/299792458$  Sekunden durchläuft“). Die weiteren Stellen sind also seither definitionsgemäß null.



kungstheorie<sup>11</sup> die durch Wechselwirkung von einem Teilchen auf ein anderes Teilchen übertragene Energie und ebenso der übertragene Impuls und Drehimpuls während der „Laufzeit“ „verloren“ sind, können die Erhaltungssätze für diese Größen nur „im Zeitmittel“ aufrechterhalten werden, und auch das nur, wenn man einen fiktiven „Absorber“ im Unendlichen postuliert, der den Energie-, Impuls- und Drehimpulsverlust des Systems durch Abstrahlung „simuliert“. Um diese Nachteile zu vermeiden, führt man in der üblichen Formulierung der klassischen Elektrodynamik neben den Ladungen ein kontinuierliches Objekt mit eigenständiger Realität, das *Feld*, ein, welches ebenfalls Energie, Impuls und Drehimpuls besitzt. In einer solchen Nahwirkungs- bzw. *Feldtheorie* vermittelt das Feld die Wechselwirkung zwischen Ladungen und beschreibt darüber hinaus die elektromagnetische Strahlung.

In der Quantenfeldtheorie der elektromagnetischen Vorgänge, der Quantenelektrodynamik, tritt an die Stelle des klassischen Feldes ein „quantisiertes“ Feld mit „körniger Struktur“. Die Wechselwirkung zwischen elektrisch geladenen Teilchen wird dann durch den „Austausch“ von Photonen vermittelt, die Photonen sind aber auch die Quanten der elektromagnetischen Strahlung.

Nach dem Relativitätsprinzip muss – wie man in der Relativitätstheorie zeigt – der Wert der Signalgeschwindigkeit nicht nur für alle Inertialsysteme derselbe sein, er muss auch für alle in der Natur vorkommenden Wechselwirkungen derselbe sein. Der galileische Zusatz zum Relativitätsprinzip ist entsprechend durch den folgenden Zusatz zu ersetzen.

### Einsteinsches Relativitätsprinzip

*Relativitätsprinzip ergänzt durch den einsteinschen Zusatz:*  
Die Signalgeschwindigkeit physikalischer Wirkungen ist endlich und durch  $c = 2,99792458 \cdot 10^{10}$  cm/s gegeben.

Damit folgen anstelle der Galileitransformationen auch andere Transformationen für die Raumzeitkoordinaten von Ereignissen (und damit auch andere Transformationen für andere physikalische Größen), nämlich die **Lorentztransformationen**. Für Inertialsysteme  $I, I'$  in *Standardkonfiguration* lauten sie

$$t' = \gamma(V) \left( t - \frac{Vx}{c^2} \right),$$

$$x' = \gamma(V)(x - Vt),$$

$$y' = y,$$

$$z' = z;$$

$$t = \gamma(V) \left( t' + \frac{Vx'}{c^2} \right),$$

$$x = \gamma(V)(x' + Vt'),$$

$$y = y',$$

$$z = z';$$

<sup>11</sup>Eine derartige Formulierung der klassischen Elektrodynamik wurde 1929 von Fokker vorgeschlagen und 1945 von Feynman und Wheeler sehr detailliert studiert; s. dazu Rohrlich, F.: *Classical Charged Particles*. World Scientific, Singapore 2007.

$$\gamma(V) := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Mit der Analyse der physikalischen Konsequenzen dieses Transformationsgesetzes befasst sich die Spezielle Relativitätstheorie ( $c$  als Grenzggeschwindigkeit materieller Körper relativ zu beliebigen Inertialsystemen, Relativität der Gleichzeitigkeit, Zeitdilatation, Lorentzkontraktion etc.). Für Erfahrungsbereiche, in denen die auftretenden Geschwindigkeiten betragsmäßig während der Gesamtdauer des Experimentes sehr klein gegen  $c$  bleiben, ist naturgemäß das galileische Relativitätsprinzip eine brauchbare Basis der Physik. Newtonsche Mechanik und nichtrelativistische Quantenmechanik gehören in der Tat zu den erfolgreichsten physikalischen Theorien.

Es ist kein Zufall, dass die Spezielle Relativitätstheorie im Zusammenhang mit der Elektrodynamik entdeckt wurde, und es keinen nichtrelativistischen Vorläufer der Elektrodynamik gegeben hat: Erstens erreichen elektrische Ladungen aufgrund der großen Stärke elektromagnetischer Wechselwirkungen bei vielen experimentell zugänglichen Systemen relativistische Geschwindigkeiten, zweitens lassen sich elektromagnetische Wellen experimentell wesentlich leichter nachweisen und untersuchen als Gravitationswellen.<sup>12</sup>

### 1.3 Elektrische und magnetische Feldstärke. Kraft auf eine Testladung

Das elektromagnetische Feld wird mathematisch durch zwei Vektorfelder beschrieben. Die entsprechenden Feldstärken  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  werden als *elektrische Feldstärke* bzw. *magnetische Feldstärke* bezeichnet. Die Berechnung des elektromagnetischen Feldes erfolgt bei gegebenen Quellen und gegebenem „einlaufenden“ Strahlungsfeld mithilfe der Feldgleichungen des elektromagnetischen Feldes, der *Maxwellgleichungen* (s. Abschnitt 1.6). Die Bedeutung von  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  wird durch folgende *Messvorschrift* erhellt: Die Kraft auf eine mit der konstanten Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_T$  bewegte *Testladung*<sup>13</sup>  $q_T$  am Aufpunkt  $\mathbf{r}$  zum Zeitpunkt  $t$  ist durch<sup>14</sup>

$$\mathbf{K}_T = q_T \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v}_T}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (1.1)$$

gegeben.

Von einer Testladung wird verlangt, dass sie hinreichend „schwach“ ist, sodass die durch sie bewirkte „Störung“ der felderzeugenden Systemladungen vernachlässigt wer-

---

<sup>12</sup>Gravitationswellen wurden experimentell erstmals 2015 von Rainer Weiss, Barry C. Barish und Kip S. Thorne nachgewiesen (Nobelpreis für Physik 2017).

<sup>13</sup>Die Forderung konstanter Geschwindigkeit ist nötig, da auf eine *beschleunigt* bewegte Ladung eine Selbstkraft, die Strahlungsrückwirkungskraft, wirken kann (s. Abschnitt 1.9).

<sup>14</sup>gaußsches Maßsystem

den kann.<sup>15</sup> Nur dann ist

$$\frac{\mathbf{K}_T}{q_T} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v}_T}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1.2)$$

unabhängig von  $q_T$ . Der in Lehrbüchern oft angeschriebene Grenzübergang  $q_T \rightarrow 0$  ist nicht sinnvoll, da aus  $q_T \neq 0$  folgt, dass  $|q_T| \geq e$  ( $e$  Elementarladung) gilt. Ist das auszumessende Feld das eines Elektrons (felderzeugende Ladung  $q = -e$ ), so „bricht die Messvorschrift zusammen“, da es für diesen Fall keine geeignete Testladung  $q_T$  gibt. Auch sonst stellt die Messvorschrift oft eine Fiktion dar; beispielsweise kann das Feld einer elektromagnetischen Welle aus dem Spektralbereich der ultraharten Röntgenstrahlen sicher nicht auf diese Weise gemessen werden, da sich die Feldstärken mit einer zeitlichen Periode von  $\sim 10^{-24}$  s ändern.

## 1.4 Quellen des elektromagnetischen Feldes

In der Maxwell-Lorentz-Theorie sind die Quellen des elektromagnetischen Feldes beim *abgeschlossenen System* durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

*elektrische Ladungsdichte*  $\rho(\mathbf{r}, t)$  ( $\rho(\mathbf{r}, t)d^3r = dQ$  elektrische Ladung in  $d^3r$  am Aufpunkt  $\mathbf{r}$  zum Zeitpunkt  $t$ ; siehe Abb. 1.3):

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{b=1}^N \rho_b(\mathbf{r}, t) \quad \text{mit} \quad \rho_b(\mathbf{r}, t) = q_b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)); \quad (1.3)$$

*elektrische Stromdichte*  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  ( $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} df$  elektrische Ladung, welche netto in der Zeiteinheit ein zum Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  senkrecht Flächenstück  $df$  durchsetzt; siehe Abb. 1.4):

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{b=1}^N \mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t) = q_b \mathbf{v}_b(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)), \quad (1.4)$$

wobei  $\mathbf{r}_b(t)$  die Bahnkurve der Ladung  $q_b$  und  $\mathbf{v}_b(t) = \dot{\mathbf{r}}_b(t)$  ist.

Beim *nichtabgeschlossenen System* kommen zu diesen Ausdrücken noch die Beiträge der äußeren (externen) Quellen hinzu, und man hat entsprechend

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{b=1}^N \rho_b(\mathbf{r}, t) + \rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t), \quad (1.5)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{b=1}^N \mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t), \quad (1.6)$$

wobei  $\rho^{(\text{ex})}$ ,  $\mathbf{j}^{(\text{ex})}$  vorgegebene Funktionen sind.

<sup>15</sup>Die prinzipiell unvermeidbare Rückwirkung auf die Systemladungen tritt bereits während des Heranbringens der „Messladung“ an die Stelle  $\mathbf{r}$  auf.

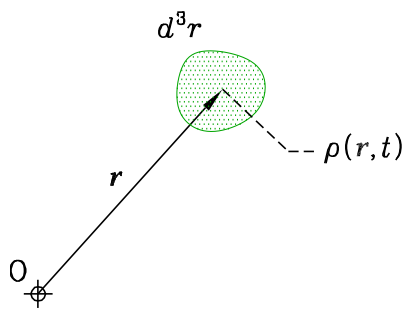


Abbildung 1.3: Zur Definition der Ladungsdichte

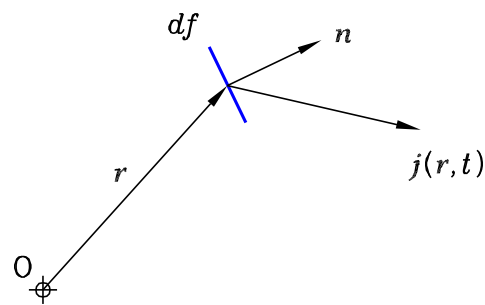


Abbildung 1.4: Zur Definition der Stromdichte

## 1.5 Diskretheit, strenge Erhaltung und Lorentzinvarianz der elektrischen Ladung

Experimentell stellt man fest, dass die Ladungen aller Fundamentarteilchen im Rahmen der Messgenauigkeit ganzzahlige Vielfache der elektrischen Elementarladung  $e$  sind.<sup>16</sup> (Im gaußschen Maßsystem gilt  $e = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2}$ .) Beispielsweise findet man für das Verhältnis aus Proton- und Elektronladung experimentell

$$\left| \frac{q_p}{q_e} \right| = 1 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \leq 10^{-21}.$$

Wir führen entsprechend in die Maxwell-Lorentz-Theorie die *Hypothese*

$$q_b = n_b e, \quad n_b = \pm 1, \pm 2, \dots$$

ein. Bezüglich einer möglichen Erklärung für die *Diskretheit* („Quantisierung“) der elektrischen Ladung s. Seite 15.

Makroskopisch macht sich diese Diskretheit i. Allg. nicht bemerkbar. Ein Beispiel: Fließt in einem Leiter ein elektrischer Strom von  $1 \mu\text{A} \hat{=} 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$ , so treten in der Sekunde  $6,2 \cdot 10^{12}$  Elementarladungen durch den Leiterquerschnitt hindurch. Bei einer Strommessung fällt deshalb die Diskretheit nicht auf. Bei gewissen Versuchen, z. B. beim Millikanversuch, tritt sie aber auch makroskopisch in Erscheinung.

Die elektrische Ladung erweist sich bei allen bekannten physikalischen Prozessen inklusive Umwandlungsprozessen von Fundamentarteilchen als *strenge additive Erhaltungsgröße*. Zwei Beispiele:

- Bei der Elektron-Positron-Paarvernichtung entstehen zwei oder mehr Photonen.
- Bei der Ionisation eines Wasserstoffatoms entsteht aus einem elektrisch neutralen Atom ein ungebundenes Elektron und ein ungebundenes Proton.

<sup>16</sup>Die Quarks, welche elektrische Ladungen  $-\frac{1}{3}e, +\frac{2}{3}e$  besitzen, kommen in der Natur nur als „Bausteine“ der Hadronen, aber nicht ungebunden vor („confinement“).

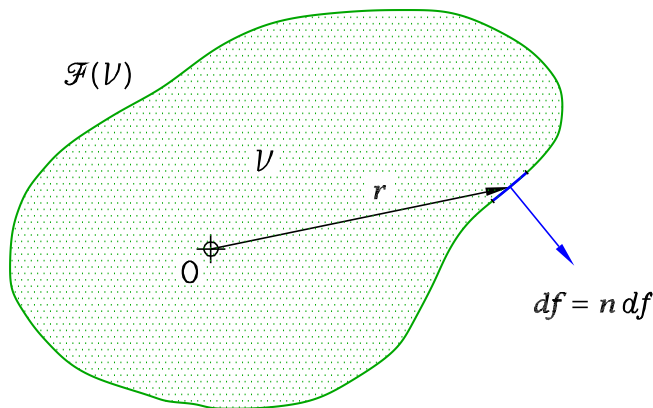


Abbildung 1.5: Ein fester Volumensbereich  $\mathcal{V}$  und seine Oberfläche  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$

Die Gesamtladung ändert sich bei beiden Prozessen nicht.

Im Gegensatz dazu muss die Summe der Massen<sup>17</sup> der Bestandteile eines Systems nicht erhalten bleiben. Im ersten Beispiel „verschwindet“ die Masse  $2m_e$ , im zweiten Beispiel ist die Summe der Massen nach dem Prozess um das Energieäquivalent der Bindungsenergie des Wasserstoffatoms, d. i.  $2,6 \cdot 10^{-5} m_e$ , höher.<sup>18</sup>

In Atomen und Molekülen „bewegen“ sich Protonen und Elektronen relativ zueinander und relativ zum Schwerpunkt. Die „Elektronenbewegungen“ erfolgen dabei in schweren Atomen und Molekülen mit relativistischen Geschwindigkeiten. Diese Tatsache zeigt, dass die elektrische Ladung überdies *lorentzinvariant* ist.

In der klassischen Elektrodynamik muss sich die Erhaltung der elektrischen Ladung durch eine Beziehung zwischen Ladungs- und Stromdichte ausdrücken lassen. Erhaltung der Ladung bedeutet, dass die Abnahme der Ladung in einem beliebigen festen Volumensbereich  $\mathcal{V}$  pro Zeiteinheit zum Zeitpunkt  $t$  gleich sein muss der Ladung, welche zum Zeitpunkt  $t$  in der Zeiteinheit netto durch die geschlossene Oberfläche  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  des Volumensbereiches  $\mathcal{V}$  ausströmt (s. Abb. 1.5).

Berücksichtigen wir die Definition von Ladungs- und Stromdichte (siehe Abschnitt 1.4), so bedeutet dies, dass

$$-\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d^3r \rho(\mathbf{r}, t) = \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (1.7)$$

gelten muss. Mithilfe des gaußschen Satzes können wir Gl. (1.7) in die Form

$$-\int_{\mathcal{V}} d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t} = \int_{\mathcal{V}} d^3r \operatorname{div} \mathbf{j} \quad (1.8)$$

<sup>17</sup>Gemeint sind die Ruhmassen. Den Begriff der geschwindigkeitsabhängigen relativistischen Masse verwenden wir in Übereinstimmung mit den meisten neueren Lehrbüchern der Relativitätstheorie nicht.

<sup>18</sup>Umgekehrt tritt bei der Bildung eines Wasserstoffatoms aus einem Elektron und einem Proton ein entsprechender *Massendefekt* auf.

bringen. Da diese Gleichung für beliebige Volumsbereiche gelten muss, folgt damit weiter die differentielle Beziehung

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0.} \quad (1.9)$$

Diese Gleichung wird als **Kontinuitätsgleichung** bezeichnet. Sie drückt die *lokale* Ladungserhaltung aus.

Aus physikalischen und mathematischen Gründen ist klar, dass für *alle* Quellen, d. h. nicht nur für die *Gesamtquellen*, sondern getrennt für alle *Teilquellen*, eine Kontinuitätsgleichung erfüllt sein muss. In der Maxwell-Lorentz-Theorie sind Ladungs- und Stromdichte der Systemquellen durch die Ausdrücke von Gl. (1.3), (1.4) gegeben. Man kann leicht verifizieren, dass diese Ausdrücke eine Kontinuitätsgleichung erfüllen. Sollen daneben noch äußere Quellen vorhanden sein, so können die Funktionen  $\rho^{(\text{ex})}$ ,  $\mathbf{j}^{(\text{ex})}$  nicht vollkommen willkürlich vorgegeben werden, da die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.10)$$

erfüllt sein muss.

## 1.6 Maxwellgleichungen

Die Feldgleichungen der mikroskopischen Elektrodynamik besitzen in einem Inertialsystem I die folgende Form:<sup>19</sup>

<i>Postulat:</i> Feldgleichungen: <b>Maxwellgleichungen</b>	
$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, t),$	(1.11)
$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0,$	(1.12)
$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) =$	$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$ (1.13)
$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$	(1.14)

Die Gleichung (1.11) wird als *coulombsches Gesetz*, Gl. (1.13) als *faradaysches Induktionsgesetz* und Gl. (1.14) als *ampèresches Gesetz* oder *Verkettungsgesetz* bezeichnet.<sup>20</sup>

<sup>19</sup> gaußsches Maßsystem

<sup>20</sup> Die Gleichung (1.12), welche die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes ausdrückt, besitzt keinen eigenen Namen, Gl. (1.14) wird manchmal auch *oerstedsches Gesetz* genannt.

Eine wichtige Eigenschaft der Feldgleichungen ist ihre *Linearität*, da sie die lineare Überlagerung von Teillösungen gestattet.<sup>21</sup> Diese Eigenschaft ermöglicht es u. a., allgemeine elektromagnetische Wellen als Überlagerung von elementaren Teilwellen (ebenen Wellen, Zylinderwellen, Kugelwellen etc.) zu beschreiben (s. Abschnitt 1.17).

Ein „Schönheitsfehler“ der Feldgleichungen ist nach Dirac der Mangel an „Symmetrie“, der dadurch bedingt ist, dass es keine punktförmigen Quellen des magnetischen Feldes und daher auch keine magnetischen Ströme gibt. „Symmetrischer“ wären die Gleichungen<sup>22</sup>

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_e, \quad (1.15)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 4\pi\rho_m, \quad (1.16)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.17)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.18)$$

Die Existenz punktförmiger Quellen des magnetischen Feldes, also magnetischer Punktladungen (so genannter *magnetischer Monopole*) und zugehöriger magnetischer Ströme wurde aber bisher nicht experimentell nachgewiesen. Falls sie existieren, sind sie sicher sehr selten und kurzlebig, sodass sich einerseits an der „praktischen“ Elektrodynamik nichts ändern würde, andererseits ihre Berücksichtigung quantentheoretisch erfolgen müsste. Wie aber Dirac durch Untersuchung des quantenmechanischen Problems eines Elektrons bei Anwesenheit eines magnetischen Monopols gezeigt hat, würde die bloße Existenz magnetischer Monopole die Diskretheit („Quantisierung“) der elektrischen Ladung erklären.<sup>23</sup>

Die Kraft auf ein Testteilchen mit elektrischer Ladung  $q_{Te}$  und magnetischer Ladung  $q_{Tm}$ , ein so genanntes *Dyon*, wäre durch

$$\mathbf{K}_T = q_{Te} \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_T}{c} \times \mathbf{B} \right] + q_{Tm} \left[ \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_T}{c} \times \mathbf{E} \right] \quad (1.19)$$

gegeben.

In der Maxwell-Lorentz-Theorie sind die Quellen selbst teilweise unbekannt. Man benötigt neben den Feldgleichungen ein Kraftgesetz, welches die Kräfte auf eine Punktladung zu berechnen gestattet, Bewegungsgleichungen für die  $N$  Punktladungen und Anfangsbedingungen bzw. zeitliche und räumliche asymptotische Bedingungen, welche die Lösung eindeutig festlegen.<sup>24</sup> Auch für die Berechnung der Felder *gegebener* Quellen und eines eventuell gegebenen einlaufenden Strahlungsfeldes (Maxwelltheorie; siehe Abschnitt 1.15) reichen die Feldgleichungen nicht aus. Sie stellen ein gekoppeltes inhomogenes partielles Differentialgleichungssystem dar, dessen Lösung nur bis auf eine

<sup>21</sup>Die einsteinsche Gravitationstheorie (Allgemeine Relativitätstheorie) ist eine nichtlineare Theorie, und es ist deshalb wesentlich schwieriger, Lösungen zu finden.

<sup>22</sup>Die Subskripte e und m bedeuten elektrisch bzw. magnetisch.

<sup>23</sup>Siehe dazu Jackson, J. D.: Klassische Elektrodynamik. Walter de Gruyter, Berlin 2006.

<sup>24</sup>Eine ausführliche Darstellung der Maxwell-Lorentz-Theorie bietet Rohrlich, F.: Classical Charged Particles. World Scientific, Singapore 2007. Die Frage der Anfangsbedingungen bzw. asymptotischen Bedingungen wird in den Abschnitten 6-4, 6-6 und 7-1 dieses Buches behandelt.

Lösung der homogenen Gleichungen bestimmt ist.<sup>25</sup> Zur Aussonderung der physikalisch richtigen Lösung, welche gemäß Gl. (1.1) die richtigen Kräfte auf Testladungen liefert, benötigt man noch eine geeignete räumlich asymptotische Bedingung für die elektromagnetischen Feldstärken. Die Frage nach dieser Bedingung greifen wir erst später auf (retardierte, avancierte, einlaufende, auslaufende Felder; s. Abschnitt 1.15.1 und 1.18).

Die Terme mit den zeitlichen Ableitungen von  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  gehören *nicht* zu den Quellen: sie sind *Verkettungsterme* (Terme, welche das elektrische und magnetische Feld „verketteten“, d. h. aneinander koppeln).<sup>26</sup> Der Verkettungsterm in Gl. (1.13) wird aus physikalischen Gründen *Induktionsterm* genannt. Der mathematisch analoge Verkettungsterm in Gl. (1.14) heißt *Maxwellterm*, er kann in gewissem Sinne (s. Seite 18) ebenfalls als „Induktionsterm“ bezeichnet werden.

Zur Zeit Maxwells schrieb man die „rechte“ Gleichungsseite des ampèreschen Gesetzes in der Form

$$\frac{4\pi}{c} \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right]$$

und bezeichnete den zweiten Term im Klammerausdruck als „Verschiebungsstrom des Vakuums“. Auf der Basis des maxwellschen mechanistischen Äthermodells war diese Bezeichnung gerechtfertigt. Seit der „Abschaffung“ des materiellen Äthers durch Einstein ist diese Bezeichnung aber irreführend, da der Term keinen Ladungstransport beschreibt. Wir verwenden deshalb diese Bezeichnung nicht.

Aus der Feldgleichung (1.14) erhält man durch Divergenzbildung die Beziehung

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

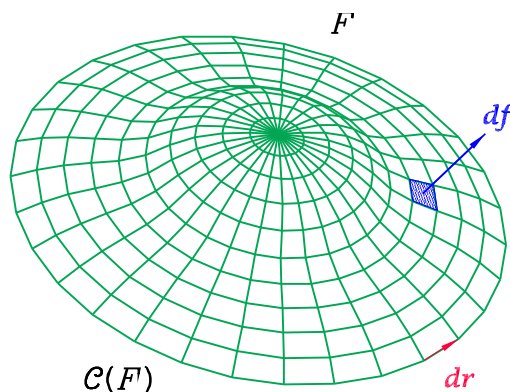


Abbildung 1.6: Ein festes Flächenstück  $F$  und seine Berandung  $\mathcal{C}(F)$

Setzt man hier die Feldgleichung (1.11) ein, so ergibt sich Gl. (1.9). Die Kontinuitätsgleichung für die Queldichten, die *physikalisch* die Erhaltung der elektrischen Ladung

<sup>25</sup>Die Lösungen partieller Differentialgleichungen enthalten willkürliche Funktionen. Es gibt daher nicht-abzählbar unendlich viele Lösungen der homogenen Maxwellgleichungen; siehe Abschnitt 1.17.

<sup>26</sup>Es wäre deshalb für das Verständnis der Feldgleichungen besser, diese Terme auf die „linken“ Gleichungsseiten zu nehmen. Siehe die Vierertensorformulierung der Feldgleichungen in Abschnitt 1.12.5.



ausdrückt, stellt also *mathematisch* gesehen eine Integrabilitätsbedingung für die Feldgleichungen dar.

Durch Integration der Feldgleichungen (1.11), (1.12) über den Volumsbereich  $\mathcal{V}$  mit der geschlossenen Oberfläche  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  und Anwendung des gaußschen Satzes (s. Abb. 1.5) sowie durch Integration der Feldgleichungen (1.13), (1.14) über das Flächenstück  $F$  mit der geschlossenen Berandung  $\mathcal{C}(F)$  und Anwendung des stokeschen Satzes (s. Abb. 1.6) erhält man die *Integralform der Maxwellgleichungen*:

$$\oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \int_{\mathcal{V}} d^3r \rho(\mathbf{r}, t), \quad (1.20)$$

$$\oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.21)$$

$$\oint_{\mathcal{C}(F)} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (1.22)$$

$$\oint_{\mathcal{C}(F)} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (1.23)$$

Diese Gleichungen sagen aus:<sup>27</sup>

- Der *elektrische Fluss* durch eine geschlossene Fläche ist durch die eingeschlossene elektrische Ladung bestimmt.
- Der *magnetische Fluss* durch eine geschlossene Fläche ist null (da es keine magnetischen Ladungen gibt).
- Die *Zirkulation des elektrischen Feldes* längs einer geschlossenen Kurve ist durch die zeitliche Abnahme des magnetischen Flusses durch ein Flächenstück, welches die Kurve als Berandung besitzt, bestimmt.
- Die *Zirkulation des magnetischen Feldes* längs einer geschlossenen Kurve ist teils durch den durch ein Flächenstück, welches die Kurve als Berandung besitzt, fließenden elektrischen Strom, teils durch die zeitliche Zunahme des elektrischen Flusses durch ein solches Flächenstück bestimmt.

Bringt man längs der (gedachten) Kurve  $\mathcal{C}$  eine Schleife aus elektrisch leitendem Material (etwa aus Kupferdraht) an, so induziert eine zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch  $F$  aufgrund der Feldgleichung (1.22) und des Kraftgesetzes (1.1) in dieser Schleife einen elektrischen Strom. Der Name *Induktionsgesetz* für die Feldgleichung (1.13) bzw. (1.22) rührt von diesem physikalischen Effekt her, und wir bezeichnen den Verkettungsterm auf der „rechten“ Seite von Gl. (1.13) deshalb als Induktionsterm.

<sup>27</sup>Die Proportionalitätsfaktoren  $4\pi$  etc. sind maßsystemspezifisch und deshalb für die Interpretation der Gleichungen nebensächlich.

Gäbe es magnetische Ladungen und Ströme und materielle Schleifen, in denen magnetische Ströme fließen können, so *würde* eine zeitliche Änderung des elektrischen Flusses durch  $F$  aufgrund der Feldgleichung (1.23) und des Kraftgesetzes (1.19) in einer solchen längs der Kurve  $\mathcal{C}$  angebrachten Schleife einen magnetischen Strom induzieren. In diesem Sinne kann man den Verkettungsterm auf der „rechten“ Seite von Gl. (1.14) als „Induktionsterm“ bezeichnen.

## 1.7 Grenzen der klassischen Elektrodynamik

Bevor wir darangehen, uns mit der Maxwell-Lorentz-Theorie näher zu befassen, einige Bemerkungen zu den Grenzen dieser physikalischen Theorie:

- Weder ein im Sinne der Quantentheorie strukturloses Teilchen wie das Elektron noch ein im Sinne der Quantentheorie strukturbehaftetes Teilchen wie das Proton (das aus Quarks „aufgebaut“ ist) lässt sich adäquat als klassisches Teilchen mit bestimmter Ausdehnung, Struktur und Ladungsverteilung beschreiben. Elektronen und Protonen sind *nicht* wie makroskopische geladene Körper, nur kleiner. Man muss deshalb im Rahmen der klassischen mikroskopischen Elektrodynamik eine Formulierung finden, welche keinerlei Bezugnahme auf (bzw. Annahmen über) innere Struktur, innere Ladungsverteilung und Größe enthält. Mathematisch formal leistet dies das klassische Punktladungsmodell. Nimmt man es aber physikalisch „wörtlich“, und nicht nur als klassische modellmäßige Beschreibung eines „Objektes“, welches sich durch ein klassisches Modell grundsätzlich nur bedingt erfassen lässt, behandelt man also etwa das Elektron als klassische sphärische Ladungsverteilung mit Radius  $r_0 \rightarrow 0$  (s. Abschnitt 1.18), so „wirtschaftet“ man sich in die Theorie *unendliche Selbstkräfte* und *unendliche Selbstenergien* ein, die man nur durch Ad-hoc-Maßnahmen („Renormierung“) „unter den Teppich kehren“ kann. Behandelt man andererseits das Elektron als klassische sphärische Ladungsverteilung mit *endlichem* Radius  $r_0$ , so muss man nicht nur Ad-hoc-Kräfte „erfinden“, welche die Ladungsverteilung gegen die Coulombabstoßung der Ladungselemente zusammenhalten („Poincarékräfte“), man bekommt auch von  $r_0$  abhängige endliche, aber mit dem Experiment im Widerspruch stehende, Selbstkräfte und verletzt das Relativitätsprinzip. (Ein strukturloser klassischer Körper muss als *starrer* Körper angenommen werden, mit einem solchen Körper könnte man aber Wirkungen mit unendlicher Signalgeschwindigkeit auslösen.)
- Die klassische Elektrodynamik versagt im *atomaren* und *subatomaren* Bereich, da der Begriff der *Teilchenbahn* und damit der *klassische Teilchenbegriff* unbrauchbar wird. Das Wasserstoffatom (ein gebundenes System bestehend aus einem Elektron und einem Proton) muss quantenmechanisch behandelt werden (s. Seite 282). Die *Wechselwirkung* zwischen Elektron und Proton kann in diesem Fall aber nach wie vor durch das klassische elektromagnetische Feld beschrieben werden.

- Die klassische Elektrodynamik versagt, wenn die „Körnigkeit“ („Quantisierung“) der Energieübertragung durch die Wechselwirkung hervortritt. Die elektromagnetische Wechselwirkung muss dann quantentheoretisch behandelt werden (Feldquantisierung, Quantenelektrodynamik) und der *klassische Feldbegriff* wird für das elektromagnetische Feld unbrauchbar. Grob kann man sagen<sup>28</sup>, dass die klassische Feldbeschreibung der elektromagnetischen Wechselwirkung möglich ist, wenn man es mit „großen Photonenzahlen“ zu tun hat, und wenn der Impuls  $p = \frac{h}{\lambda}$  eines einzelnen Photons klein ist gegen den Impuls des Materiesystems.

*Beispiele:*

1. Eine 100 W-Glühbirne strahle Licht der Wellenlänge  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$  aus. Die Energie eines Photons beträgt dann  $E = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \simeq 3,3 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$ , d. h. die Glühbirne sendet pro Sekunde<sup>29</sup>

$$\frac{100 \cdot 10^7}{3,3 \cdot 10^{-12}} \simeq 3 \cdot 10^{20}$$

Photonen aus. Das bedeutet, dass in 1 m Entfernung eine Fläche von  $1 \text{ cm}^2$ , welche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichtes steht, in der Sekunde von rund  $2 \cdot 10^{15}$  Photonen durchsetzt wird.

2. Eine Sendeantenne mit 100 W Leistung strahle UKW-Wellen mit  $\lambda = 3 \text{ m}$  ( $\nu = 10^8 \text{ Hertz}$ ) aus. In einer Entfernung von 100 km treten dann pro Sekunde durch eine zur Ausbreitungsrichtung senkrechte Fläche von  $1 \text{ cm}^2$  etwa  $10^{12}$  Photonen hindurch. Der Impulsübertrag auf die Antenne durch ein einzelnes Photon beträgt<sup>30</sup>

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,6 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}}{3 \cdot 10^2 \text{ cm}} \simeq 2,2 \cdot 10^{-29} \text{ dyn} \cdot \text{s} = 2,2 \cdot 10^{-34} \text{ N} \cdot \text{s}.$$

- Sollte sich herausstellen, dass das *Photon* eine *endliche Ruhmasse*  $m_\gamma$  besitzt, so müssten auch die Feldgleichungen abgeändert werden:  $m_\gamma$  müsste in die Feldgleichungen eingehen. Für eine im Ursprung ruhende elektrische Ladung  $q$  hätte man dann statt eines Coulombpotentials ein Yukawapotential:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} \quad \longrightarrow \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} e^{-(m_\gamma c/\hbar)r}.$$

Das Coulombgesetz ist experimentell für Entfernungen von  $10^{-16} \text{ cm}$  bis  $10^9 \text{ cm}$  getestet, für ein etwaiges von null verschiedenes  $m_\gamma$  ergibt sich experimentell  $m_\gamma \lesssim 4 \cdot 10^{-48} \text{ g}$ . (Zum Vergleich:  $m_e \simeq 9 \cdot 10^{-28} \text{ g}$ .)

<sup>28</sup>Für die folgenden Überlegungen werden die Einstein-de Broglie-Beziehungen  $E = h\nu$ ,  $p = \frac{h}{\lambda}$  verwendet.

<sup>29</sup>  $1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$

<sup>30</sup>  $1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyn}$

- Die *Linearität* der Maxwellgleichungen steht bis in den atomaren Bereich im Einklang mit der Erfahrung. In Mehrelektronenatomen findet man trotz der extrem hohen Feldstärken von  $10^{11}$  V/m bis  $10^{17}$  V/m, denen die Elektronen ausgesetzt sind, keine Abweichungen vom Superpositionsprinzip. Für geladene Elementarteilchen, welche sich auf subatomare Entfernungen nähern, vermutet man Abweichungen von der Linearität.

## 1.8 Elektromagnetische Potentiale. Eichinvarianz

Die Maxwellgleichungen enthalten mathematische Redundanzen<sup>31</sup>, weshalb man rein mathematisch mit vier Feldern anstelle der sechs Felder  $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y$  und  $B_z$  auskommen kann. Diese vier Felder, die elektromagnetischen Potentiale, sind aber in der klassischen Elektrodynamik keine beobachtbaren (messbaren) Größen<sup>32</sup> und auch nicht eindeutig wählbar.

Wir gehen davon aus, dass ein beliebiges Feld, dessen Divergenz null ist, als Rotor eines Feldes dargestellt werden kann. (Diese Darstellung ist nicht eindeutig; s. unten.) Aufgrund der Maxwellgleichung (1.12) muss sich also das  $\mathbf{B}$ -Feld in der Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (1.24)$$

darstellen lassen. Das  $\mathbf{A}$ -Feld wird als *Vektorpotential* des elektromagnetischen Feldes bezeichnet. Setzen wir den Ausdruck (1.24) in die Maxwellgleichung (1.13) ein, so erhalten wir die Beziehung

$$\mathbf{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}. \quad (1.25)$$

Als nächstes benützen wir, dass ein beliebiges Feld, dessen Rotor null ist, als Gradient eines Feldes dargestellt werden kann. (Diese Darstellung ist nicht eindeutig; s. unten.) Aus Gl. (1.25) folgt daher, dass sich das  $\mathbf{E}$ -Feld in der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{grad} \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.26)$$

darstellen lässt. Das  $\varphi$ -Feld wird als *skalares Potential* des elektromagnetischen Feldes bezeichnet.

Bevor wir nun die Feldgleichungen für die elektromagnetischen Potentiale  $\varphi, \mathbf{A}$  ableiten, befassen wir uns mit der Frage der Eindeutigkeit der Potentiale. Dabei nehmen wir an, wir hätten bereits jene Bedingungen für die Felder  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  verwendet, welche diese als

<sup>31</sup>Eine mathematische Redundanz ist leicht zu sehen. Da die Divergenz eines Rotors identisch gleich null ist, folgt aus der Maxwellgleichung (1.13) durch Divergenzbildung, dass  $\mathbf{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  zeitunabhängig sein muss. Es würde deshalb genügen, anstelle von Gl. (1.12) lediglich  $\mathbf{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0) = 0$  zu verlangen ( $t_0$  fest).

<sup>32</sup>In der Quantenmechanik dagegen besitzen die elektromagnetischen Potentiale physikalische Bedeutung (Aharonov-Bohm-Effekt).

Lösungen der Maxwellgleichungen eindeutig festlegen. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass man die auf solche Weise *eindeutig bestimmten* Felder  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  noch durch *verschiedene* Sätze von Potentialen  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$  darstellen kann. Führt man nämlich eine so genannte *Eichtransformation* der Potentiale

$$\bar{\varphi} = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{grad} f \quad (1.27)$$

durch, wobei die *Eichfunktion*  $f$  eine beliebige stetig differenzierbare Funktion von  $\mathbf{r}$ ,  $t$  sein kann, so folgt

$$-\mathbf{grad} \bar{\varphi} - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t} = -\mathbf{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E},$$

$$\mathbf{rot} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Diese Invarianzeigenschaft der klassischen Elektrodynamik wird als *Eichinvarianz* bezeichnet. Man nennt die klassische Elektrodynamik wegen dieser Eigenschaft auch eine *Eichtheorie*. Wir werden in der Folge von der Möglichkeit der „Umeichung“ der Potentiale Gebrauch machen.

Um die Feldgleichungen für die elektromagnetischen Potentiale zu erhalten, setzen wir die Ausdrücke (1.24), (1.26) in die zwei noch nicht verwendeten Maxwellgleichungen (1.11), (1.14) ein. Da die Maxwellgleichungen ein gekoppeltes partielles Differentialgleichungssystem für die Felder  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  darstellen, muss sich natürlich auch für die Potentiale ein gekoppeltes partielles Differentialgleichungssystem ergeben. Es lautet

$$-\Delta \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = 4\pi \rho, \quad (1.28)$$

$$-\Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mathbf{grad} \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (1.29)$$

Laplaceoperator und Vektorlaplaceoperator sind durch  $\Delta := \operatorname{div} \mathbf{grad}$  bzw. durch  $\Delta := \mathbf{grad} \operatorname{div} - \mathbf{rot} \operatorname{rot}$  definiert. Bei Zerlegung nach kartesischen Komponenten gilt  $(\Delta \mathbf{A})_i = \Delta(\mathbf{A}_i)$ ,  $i = x, y, z$ . Dagegen ist  $(\Delta \mathbf{A})_i \neq \Delta(\mathbf{A}_i)$ ,  $i = r, \vartheta, \phi$  oder  $i = R, \phi$ .

Da dieses Differentialgleichungssystem nicht sehr „einladend“ aussieht und tatsächlich sehr schwierig zu lösen ist, machen wir von der Freiheit bei der Wahl der Potentiale Gebrauch. Wir schreiben für die Potentiale eine solche *Nebenbedingung* vor, dass für die entsprechende eingeschränkte Klasse von Potentialen möglichst einfache Feldgleichungen gelten. Die für die meisten Zwecke vorteilhafteste Nebenbedingung stellt die **Lorenzkonvention**

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.30)$$

dar.<sup>33</sup> (Dass eine solche Wahl getroffen werden kann, wird am Ende des Abschnittes

<sup>33</sup>Diese Konvention wurde von L. Lorenz eingeführt. Die in fast allen Büchern verwendete Schreibweise „Lorenzkonvention“, welche diese Bedingung H. A. Lorentz zuschreibt, ist also falsch. – Eine andere in der Elektrodynamik häufig verwendete Eichung ist die *Coulomb Eichung*, bei der man als Nebenbedingung  $\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$  vorschreibt.

gezeigt.) Elektromagnetische Potentiale, welche dieser Nebenbedingung genügen, werden Potentiale in *Lorenzzeichnung* genannt. Sie müssen neben Gl. (1.30) die *inhomogenen Wellengleichungen*

$$-\Delta\varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \quad (1.31)$$

$$-\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (1.32)$$

erfüllen. Wir vereinbaren nun, dass wir in der Vierertensorformulierung Gleichungen mit dem Vektorlaplaceoperator *ausschließlich* nach kartesischen Komponenten zerlegen. Dann können wir den Unterschied zwischen Laplaceoperator und Vektorlaplaceoperator formal fallen lassen. Führen wir dann zur Vereinfachung der Schreibweise den gemäß

$$\square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (1.33)$$

definierten *d'Alembertoperator* (Quablaoperator, Wellenoperator, „vierdimensionalen Laplaceoperator“) ein<sup>34</sup>, so gilt:

<b>Feldgleichungen für die elektromagnetischen Potentiale in Lorenzzeichnung</b>	
$\square \varphi(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t),$	(1.34)
$\square \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t),$	(1.35)
$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0.$	(1.36)

Der große Vorteil der Lorenzzeichnung ist, dass die Potentiale nur mehr über die Nebenbedingung gekoppelt sind. Für die inhomogenen Wellengleichungen kann man relativ leicht Lösungen finden. Man muss natürlich solche Lösungen der Wellengleichungen für  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  „kombinieren“, welche überdies die Lorenzkonvention erfüllen.

Zum Abschluss soll noch gezeigt werden, dass die Eichinvarianz die Wahl von Potentialen, welche die Lorenzkonvention erfüllen, ermöglicht. Dazu nehmen wir an, wir hätten irgendeinen Satz von Potentialen  $\varphi, \mathbf{A}$ , welcher die Nebenbedingung *nicht* erfüllt. Durch Umeichung mit einer beliebigen Eichfunktion, welche Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\square f = \operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

ist<sup>35</sup>, erhalten wir dann einen neuen Satz von Potentialen  $\bar{\varphi}, \bar{\mathbf{A}}$ , der die gewünschte Eigenschaft

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = 0$$

<sup>34</sup>Manche Autoren definieren den Operator  $\square$  mit umgekehrtem Vorzeichen.

<sup>35</sup>Diese Differentialgleichung besitzt bei gegebenem  $\varphi, \mathbf{A}$  nichtabzählbar unendlich viele Lösungen.

besitzt. Diese Überlegungen zeigen, dass es in Lorenzeichung noch immer nichtabzählbar unendlich viele Sätze von Potentialen gibt, welche alle dieselben Felder  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  liefern. Hat man einen solchen Satz von Potentialen, so ergibt eine Umeichung mit einer Eichfunktion  $f$ , die Lösung der *homogenen* Wellengleichung  $\square f = 0$  ist, einen weiteren derartigen Satz. Wir haben zwar durch Einführen der Lorenzkonvention die möglichen Sätze von Potentialen eingeschränkt, es sind aber noch immer nichtabzählbar unendlich viele Sätze übrig geblieben.

## 1.9 Lorentzkraft und Strahlungsrückwirkungskraft

Wir haben bereits in Abschnitt 1.6 festgehalten, dass in der Maxwell-Lorentz-Theorie die Quellen selbst (zumindest teilweise) unbekannt sind, da man die Funktionen  $\mathbf{r}_b(t)$  in den Quelldichten Gl. (1.3), (1.4) bzw. Gl. (1.5), (1.6) nicht kennt. Man benötigt neben den Feldgleichungen deshalb ein Kraftgesetz, welches die Kräfte auf eine Punktladung zu berechnen gestattet, sowie Bewegungsgleichungen für die  $N$  Punktladungen. Die Frage nach dem korrekten Kraftgesetz und den korrekten Bewegungsgleichungen beschäftigte die Physiker vom Beginn des vorigen Jahrhunderts bis zum Beginn dieses Jahrhunderts.<sup>36</sup> Die Schwierigkeiten mit dem Kraftgesetz rühren daher, dass eine beschleunigt bewegte Ladung elektromagnetische Wellen abstrahlt<sup>37</sup>, welche Energie „mitnehmen“. Dieser abgestrahlten Energie muss die Arbeit einer *Selbstkraft*, der *Strahlungsrückwirkungskraft* („Strahlungsdämpfungskraft“) äquivalent sein, welche mit dem Eigenfeld der Ladung verbunden ist. Die Bestimmung dieser Selbstkraft aus dem Eigenfeld ist ein schwieriges Problem, auf das wir erst in Abschnitt 1.18 eingehen können. Die folgenden Ausführungen über das Kraftgesetz sind deshalb noch unvollständig („vorläufig“).

Befassen wir uns vorerst noch einmal mit der Kraft auf eine Testladung. Nach Gl. (1.1) ist die Kraft auf eine mit der konstanten Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_T$  (also unbeschleunigt) bewegte Testladung  $q_T$  am Aufpunkt  $\mathbf{r}$  zum Zeitpunkt  $t$  durch

$$\mathbf{K}_T = q_T \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v}_T}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right]$$

gegeben. Diese Kraft wird als *Lorentzkraft* bezeichnet. Das elektromagnetische Feld  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  ist dabei in der Maxwell-Lorentz-Theorie beim *abgeschlossenen System* das von den Systemquellen Gl. (1.3), (1.4) verursachte Feld, beim *nichtabgeschlossenen System* kommen noch das von den äußeren Quellen verursachte Feld und (oder) ein vorgegebenes einlaufendes Strahlungsfeld hinzu. Wegen der Gültigkeit des Superpositionsprinzips kann man das Gesamtfeld beim nichtabgeschlossenen System in der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{b=1}^N \mathbf{E}_b(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(\text{ein})}(\mathbf{r}, t), \quad (1.37)$$

<sup>36</sup>Die wichtigsten Beiträge stammen von Lorentz, Abraham, Dirac, Rohrlich und Spohn.

<sup>37</sup>Siehe diesbezüglich Abschnitt 1.16.1.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{b=1}^N \mathbf{B}_b(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}^{(\text{ein})}(\mathbf{r}, t) \quad (1.38)$$

anschreiben ( $\mathbf{E}_b, \mathbf{B}_b$  verursacht von  $\rho_b, \mathbf{j}_b$ ;  $\mathbf{E}^{(\text{ex})}, \mathbf{B}^{(\text{ex})}$  verursacht von  $\rho^{(\text{ex})}, \mathbf{j}^{(\text{ex})}$ ;  $\mathbf{E}^{(\text{ein})}, \mathbf{B}^{(\text{ein})}$  verursacht von Quellen im Unendlichen). Die entsprechenden Beziehungen für das abgeschlossene System ergeben sich (hier und im Folgenden) durch Weglassen bzw. Nullsetzen der Terme mit den Bezeichnungen „ex“ und „ein“. Für alle Teilquellen sind jene Lösungen der zugehörigen Feldgleichungen zu wählen, welche die richtigen Teilkräfte auf Testladungen liefern. Diese Lösungen bezeichnen wir als *retardierte* Lösungen. (Vorläufig stellt dies nur eine Redeweise dar, in Abschnitt 1.15 wird der Grund für diese Bezeichnung klar werden.) Die Testladung erfährt, da sie als „Messsonde“ „zwangsweise“ mit konstanter Geschwindigkeit durch das System „geführt“ wird, keine Selbstkraft und gestattet deshalb die „Ausmessung“ des Feldes  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ . Die Rückwirkung auf die Systemladungen wird vernachlässigt.<sup>38</sup> Die zur Testladung gehörigen Queldichten gehen nicht in die Feldgleichungen ein.

Fragen wir nun nach der Kraft auf eine herausgegriffene Systemladung  $q_a$ . Gegenüber einer Testladung bestehen zwei Unterschiede. Erstens muss die *Rückwirkung* auf die übrigen Systemladungen  $q_b, b \neq a$ , berücksichtigt werden, und zweitens muss auch das *Eigenfeld* der Ladung  $q_a$  Berücksichtigung finden, da sich die Ladung  $q_a$  aufgrund der Wechselwirkung mit den übrigen Systemladungen sowie aufgrund allfälliger äußerer elektromagnetischer Kräfte und der Einwirkung eines allfälligen einlaufenden Strahlungsfeldes beschleunigt bewegt. Diese beiden Erfordernisse legen es nahe, „im ersten Anlauf“ zunächst einmal folgendes Kraftgesetz zu postulieren:

*Postulat: Kraftgesetz („vorläufig“): Lorentzkraft*

Die Kraft auf eine Systemladung  $q_a$  ist zum Zeitpunkt  $t$  durch

$$\mathbf{K}_a(t) = q_a \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}_a(t), t) + \frac{\mathbf{v}_a(t)}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_a(t), t) \right] \quad (1.39)$$

gegeben. Dabei ist  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  das durch Gl. (1.37), (1.38) gegebene *Gesamtfeld*.

Das Gesamtfeld soll also *jenes* sein, welches gemäß Gl. (1.1) die richtigen Kräfte auf Testladungen liefert. Für  $\mathbf{E}_b, \mathbf{B}_b, b = 1, 2, \dots, N$ , und  $\mathbf{E}^{(\text{ex})}, \mathbf{B}^{(\text{ex})}$  sind also die so genannten *retardierten* Lösungen zu nehmen.

Die *Rückwirkung* der betrachteten Ladung  $q_a$  auf die Ladungen  $q_b, b \neq a$ , ist damit auf korrekte Weise berücksichtigt, da nach diesem Kraftgesetz in die Kräfte auf die Ladungen  $q_b, b \neq a$ , jeweils ein korrekter Lorentzkraftbeitrag

$$q_b \left[ \mathbf{E}_a(\mathbf{r}_b(t), t) + \frac{\mathbf{v}_b(t)}{c} \times \mathbf{B}_a(\mathbf{r}_b(t), t) \right]$$

eingeht.

<sup>38</sup>Dies macht gerade den Begriff „Testladung“ aus.



Ein Problem stellt aber der in der Kraft  $\mathbf{K}_a(t)$  Gl. (1.39) enthaltene *Lorentz-Selbstkraftterm*

$$\mathbf{K}_a^{(L-S)}(t) = q_a \left[ \mathbf{E}_a(\mathbf{r}_a(t), t) + \frac{\mathbf{v}_a(t)}{c} \times \mathbf{B}_a(\mathbf{r}_a(t), t) \right] \quad (1.40)$$

dar. Wie wir in Abschnitt 1.15.2 sehen werden, divergieren die retardierten Felder  $\mathbf{E}_a(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}_a(\mathbf{r}, t)$  für  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_a(t)$  wie der Kehrwert von  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)|^2$ , sodass das Kraftgesetz Gl. (1.39) eine *unendliche Selbstkraft* enthält. Das Kraftgesetz muss also noch abgeändert werden, weshalb es als „vorläufiges“ Kraftgesetz bezeichnet wurde.

Lässt man den divergenten Beitrag einfach weg, so „schüttet man das Kind mit dem Bade aus“.<sup>39</sup> Die Lösung des Problems kann nur so aussehen, dass der divergente Term durch einen anderen, nicht divergenten Term *ersetzt* wird. Die Kunst besteht im „Wie“. Wir werden in Abschnitt 1.18 sehen, dass für die Berechnung der Selbstkraft der Ladung  $q_a$  für das Eigenfeld anstelle der retardierten Lösung der Maxwellgleichungen zu den Quellen  $\rho_a$ ,  $\mathbf{j}_a$  eine geeignete *andere Lösung* zu wählen ist. Auf diese Weise findet man einen Ausdruck für die Selbstkraft, welcher zwar neue Probleme schafft (s. unten), aber einen geeigneten Ausgangspunkt für das Auffinden der endgültigen Grundgleichungen der Maxwell-Lorentz-Theorie liefert. An die Stelle des Postulates (1.39) tritt:

*Postulat: Kraftgesetz („vorläufig“): Lorentz-Abraham-Kraft*

Die Kraft auf eine Systemladung  $q_a$  ist zum Zeitpunkt  $t$  durch

$$\mathbf{K}_a(t) = q_a \left[ \mathbf{E}^{(a)}(\mathbf{r}_a(t), t) + \frac{\mathbf{v}_a(t)}{c} \times \mathbf{B}^{(a)}(\mathbf{r}_a(t), t) \right] + \mathbf{K}_a^{(\text{rad})}(t) \quad (1.41)$$

gegeben. Dabei sind  $\mathbf{E}^{(a)}$ ,  $\mathbf{B}^{(a)}$  durch

$$\mathbf{E}^{(a)}(\mathbf{r}, t) := \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^N \mathbf{E}_{b,\text{ret}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_{\text{ret}}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(\text{ein})}(\mathbf{r}, t), \quad (1.42)$$

$$\mathbf{B}^{(a)}(\mathbf{r}, t) := \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^N \mathbf{B}_{b,\text{ret}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}_{\text{ret}}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}^{(\text{ein})}(\mathbf{r}, t) \quad (1.43)$$

definiert, und  $\mathbf{K}_a^{(\text{rad})}(t)$  ist die **Strahlungsrückwirkungskraft** auf  $q_a$ .

Wir haben hier explizit angemerkt, für welche Feldanteile die *retardierten* Lösungen zu nehmen sind.

In Abschnitt 1.18 wird die Ableitung der abrahamschen Formel für  $\mathbf{K}_a^{(\text{rad})}(t)$  skizziert. Das Ergebnis von Gl. (1.328) zeigt, dass mit der abrahamschen Lösung für das Selbstkraftproblem sofort ein neues Problem entsteht. Da nämlich der entsprechende Kraftvektor  $\mathbf{K}_a^{(\text{rad})}(t)$  nicht nur von  $\mathbf{v}_a(t)$  und  $\mathbf{b}_a(t)$ , sondern auch von  $\dot{\mathbf{b}}_a(t)$  abhängt, erhält man bei

<sup>39</sup>Diesen Ausdruck verwendete Feynman in seinen Vorlesungen.

Einsetzen der Kraft  $\mathbf{K}_a(t)$  in die übliche relativistische Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{m_a \mathbf{v}_a(t)}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2(t)}{c^2}}} = \mathbf{K}_a(t) \quad (1.44)$$

eine Differentialgleichung *dritter Ordnung* für  $\mathbf{r}_a(t)$ , deren eindeutige Lösung neben der Vorgabe von  $\mathbf{r}_a(t_0)$  und  $\mathbf{v}_a(t_0)$  noch die Vorgabe von  $\mathbf{b}_a(t_0)$  erfordert, was unphysikalisch ist. Gibt man nur  $\mathbf{r}_a(t_0)$  und  $\mathbf{v}_a(t_0)$  vor, so erhält man eine ganze Lösungsfamilie, wobei alle Lösungen bis auf eine vollkommen unphysikalischen Verhalten für  $t \rightarrow +\infty$  zeigen (sogenannte „runaway“-Lösungen; s. dazu Seite 104). Es muss daher in der Maxwell-Lorentz-Theorie schließlich noch die Interpretation des abrahamschen Ausdruckes für  $\mathbf{K}_a^{(\text{rad})}(t)$  aufgegeben werden, und es müssen die Bewegungsgleichungen für die Ladungen modifiziert werden. Da die damit verbundenen Probleme und deren Lösung<sup>40</sup> den Rahmen einer Einführungsvorlesung weit sprengen, werden wir sie in Abschnitt 1.18 nur skizzieren.

Für die nächsten drei Abschnitte, die sich mit dem logischen Schema der Maxwell-Lorentz-Theorie, den Erhaltungssätzen für abgeschlossene Systeme und der Lorentzkovarianz der Theorie befassen, spielen die mit unendlichen Selbstkräften und Selbstenergien verbundenen Komplikationen keine oder nur eine untergeordnete Rolle. Wir können deshalb für diese Überlegungen das „vorläufige“ Kraftgesetz (1.39) und die „vorläufigen“ Bewegungsgleichungen (1.44) benutzen. Eine vollkommen korrekte Behandlung dieser Themen erfordert die Benützung der Tensorrechnung im Minkowskiraum.<sup>41</sup>

## 1.10 Das logische Schema der Maxwell-Lorentz-Theorie

Im Sinne der Bemerkungen am Ende des vorigen Abschnittes gehen wir von den folgenden Grundgleichungen aus:

<b>Grundgleichungen der Maxwell-Lorentz-Theorie („vorläufig“)</b>	
<i>Feldgleichungen: Maxwellgleichungen</i>	
$\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \left[ \sum_{b=1}^N q_b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) + \rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) \right],$	(1.45)
$\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0,$	(1.46)
$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) =$	$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$ (1.47)

<sup>40</sup>S. die Abschnitte 6-6, 6-7, 6-10, 9-4, 9-5 und das anschließende Supplement von Rohrlich, F.: Classical Charged Particles. World Scientific, Singapore 2007.

<sup>41</sup>S. dazu Abschnitt 7-1 des Buches von Rohrlich.

$$\mathbf{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \left[ \sum_{b=1}^N q_b \mathbf{v}_b(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) + \mathbf{j}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}; \quad (1.48)$$

Kraftgesetz („vorläufig“): **Lorentzkraft**

$$\mathbf{K}_a(t) = q_a \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}_a(t), t) + \frac{\mathbf{v}_a(t)}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_a(t), t) \right]; \quad (1.49)$$

Bewegungsgleichungen („vorläufig“):

$$\frac{d}{dt} \frac{m_a \mathbf{v}_a(t)}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2(t)}{c^2}}} = \mathbf{K}_a(t), \quad a = 1, 2, \dots, N. \quad (1.50)$$

Setzt man das Kraftgesetz Gl. (1.49) in die relativistischen Bewegungsgleichungen (1.50) ein, so nennt man die erhaltenen Gleichungen **Lorentzgleichungen**.

Es ist die retardierte Lösung der Feldgleichungen zu nehmen und ein allfälliges einlaufendes Feld (Lösung der homogenen Feldgleichungen) hinzuzufügen. Für den Fall des abgeschlossenen Systems sind  $\rho^{(\text{ex})}$  und  $\mathbf{j}^{(\text{ex})}$  null zu setzen. Die noch erforderliche Modifikation von Kraftgesetz und Bewegungsgleichungen sowie die Frage der Lösbarkeit wird in Abschnitt 1.18 behandelt. Die Abbildung 1.7 zeigt die durch die Grundgleichungen mathematisch ausgedrückten Zusammenhänge zwischen Quellen und Feldern in Form eines logischen Schemas. (Beim abgeschlossenen System entfallen die äußeren Quellen und das einlaufende Strahlungsfeld.) Dieses logische Schema lässt sich auf strenge Weise nicht durch ein einfacheres Schema ersetzen. Insbesondere lassen sich die Gleichungen (1.45) bis (1.50) zufolge der in ihnen manifesten endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wirkungen nicht in strenger Weise durch Entkoppelung auf ein rein mechanisches Problem zurückführen. Das Feld ist als Vermittler der Wechselwirkung und als „Träger“ elektromagnetischer Strahlung unentbehrlich, die vom Feld transportierte Energie, der vom Feld transportierte Impuls und Drehimpuls können nicht in Energie-, Impuls- und Drehimpulsanteile der Teilchen uminterpretiert werden.

Nur wenn die Geschwindigkeiten aller Teilchen für alle Zeiten (oder zumindest für die Dauer des betreffenden Versuches) betragsmäßig klein sind gegen die Lichtgeschwindigkeit, kann man *näherungsweise* zu einem rein mechanischen Problem kommen.<sup>42</sup> Eine andere Art von Vereinfachung ist möglich, wenn bei einem nichtabgeschlossenen System die „inneren“ Wechselwirkungen, d. h. die elektromagnetischen Wechselwirkungen zwischen den Teilchen, gegenüber den äußeren elektromagnetischen Kräften vernachlässigt werden können.<sup>43</sup> In diesem Fall kann man das logische Schema von Abb. 1.7 näherungsweise an einer Stelle durchtrennen, und man gelangt zu drei unabhängigen

<sup>42</sup>Siehe dazu Landau, L. D., und E. M. Lifschitz: Klassische Feldtheorie. Bd. II des Lehrbuches der Theoretischen Physik. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 2009.

<sup>43</sup>Ein Beispiel für ein derartiges System ist ein Teilchenschwarm in einem Beschleuniger.

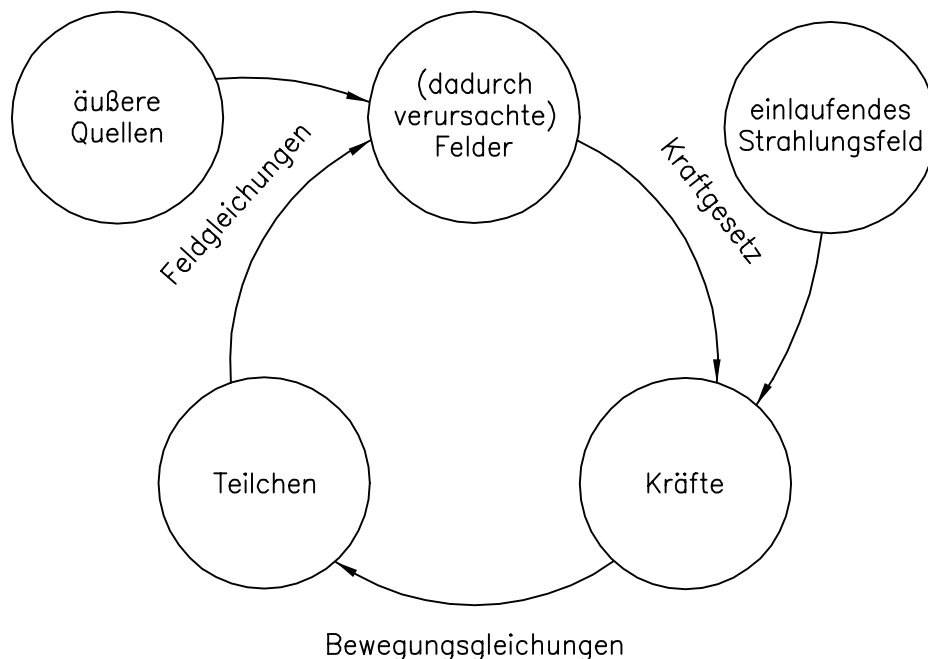


Abbildung 1.7: Logisches Schema der Maxwell-Lorentz-Theorie

Teilaufgaben, die in Abschnitt 1.13 behandelt werden.

Wie schon auf Seite 8 erwähnt, ist die Situation in der *newtonschen Gravitationstheorie* gänzlich anders. In dieser Theorie ist es wegen der ihr zugrunde liegenden unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitationswirkungen möglich, ohne Näherungen zu einem rein mechanischen Problem zu kommen. Gravitationsstrahlung gibt es in einer galileikovarianten Gravitationstheorie nicht, das Feld trägt nur Energie, und diese Feldenergie lässt sich in einen Energieanteil der Teilchen, die so genannte potentielle Energie, uminterpretieren.

Da es in der newtonschen Gravitationstheorie keine Selbstkraft gibt, gibt es auch keine Schwierigkeiten bzgl. des Kraftgesetzes und der Bewegungsgleichungen. Wir können deshalb im Unterschied zur Elektrodynamik gleich die vollständig korrekten Grundgleichungen anschreiben.<sup>44</sup>

*Feldgleichungen:*

$$\operatorname{div} \mathbf{g}_b(\mathbf{r}, t) = -4\pi G m_b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)), \quad (1.51)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{g}_b(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}, \quad b = 1, 2, \dots, N; \quad (1.52)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{g}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) = -4\pi G \rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t), \quad (1.53)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{g}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}. \quad (1.54)$$

<sup>44</sup>In den folgenden Gleichungen bedeutet  $G$  die Gravitationskonstante und  $\rho^{(\text{ex})}$  die Volumsdichte einer allfälligen vorgegebenen äußeren Massenverteilung. Beachte ferner, dass die *Massenladung* (die so genannte „schwere Masse“) gleich ist der *Masse* (der so genannten „trägen Masse“), weshalb  $m_a$  in Gl. (1.58) nicht mehr vorkommt.

*Kraftgesetz:*

Die Kraft auf eine Systemmasse  $m_a$  ist zum Zeitpunkt  $t$  durch

$$\mathbf{K}_a(t) = m_a \mathbf{g}^{(a)}(\mathbf{r}_a(t), t) \quad (1.55)$$

gegeben. Dabei ist  $\mathbf{g}^{(a)}$  durch

$$\mathbf{g}^{(a)}(\mathbf{r}, t) := \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^N \mathbf{g}_b(\mathbf{r}, t) + \mathbf{g}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) \quad (1.56)$$

definiert.

*Bewegungsgleichungen:*

$$m_a \frac{d^2 \mathbf{r}_a(t)}{dt^2} = \mathbf{K}_a(t), \quad a = 1, 2, \dots, N. \quad (1.57)$$

Durch Entkoppelung der Gleichungen (1.51) bis (1.57) gelangt man zu einem rein mechanischen Problem.<sup>45</sup>

*Mechanisches Problem:*

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_a(t)}{dt^2} = -G \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^N \frac{m_b (\mathbf{r}_a(t) - \mathbf{r}_b(t))}{|\mathbf{r}_a(t) - \mathbf{r}_b(t)|^3} - G \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \frac{\rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) (\mathbf{r}_a(t) - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_a(t) - \mathbf{r}|^3}, \quad (1.58)$$

$$a = 1, 2, \dots, N.$$

Exakt lösbar ist in dieser Theorie zwar nur das Zweiteilchenproblem für das abgeschlossene System<sup>46</sup>, doch kann man zeigen, dass das gekoppelte Differentialgleichungssystem (1.58) für beliebige Anfangsbedingungen  $\mathbf{r}_a(t_0)$ ,  $\mathbf{v}_a(t_0)$ ,  $a = 1, 2, \dots, N$ , eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt (Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis) und dass es bei geeigneten Anfangsbedingungen „lokalisierte Bewegungen“ gibt.<sup>47</sup> Ferner kann man einen Konvergenzbeweis für die Störungstheorie geben. Wie wir in Abschnitt 1.18 sehen werden, ist man in der Elektrodynamik in einer weitaus ungünstigeren Situation.

## 1.11 Erhaltungssätze für das abgeschlossene System

Aus der Homogenität der Zeit in einem Inertialsystem sowie aus der Homogenität und Isotropie des zugehörigen Bezugsraumes folgt in Bezug auf Inertialsysteme die Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung für abgeschlossene Systeme.

In der Maxwell-Lorentz-Theorie müssen sich daher für das abgeschlossene System Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls formulieren lassen. Da es uns in erster Linie darauf ankommt, welche *Form* diese Erhaltungssätze besitzen, und wie die Ausdrücke für die *Energiedichte*, *Energiestromdichte* etc. des elektromagnetischen

<sup>45</sup>Man führt für jedes der Teilfelder ein Gravitationspotential ein und löst die zugehörigen Poissongleichungen.

<sup>46</sup>Man findet die Lösung durch Übergehen zu Schwerpunkts- und Relativkoordinaten.

<sup>47</sup>Ein Beispiel für ein derartiges System ist ein Planetensystem.

Feldes aussehen, gehen wir – wie schon auf Seite 26 angekündigt – von den „vorläufigen“ Grundgleichungen aus, welche für das abgeschlossene System nach Gl. (1.45) bis (1.50) folgendermaßen lauten:

Feldgleichungen:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \sum_{b=1}^N q_b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)), \quad (1.59)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.60)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.61)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \sum_{b=1}^N q_b \mathbf{v}_b(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}; \quad (1.62)$$

Kraftgesetz („vorläufig“):

$$\mathbf{K}_a(t) = q_a \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}_a(t), t) + \frac{\mathbf{v}_a(t)}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_a(t), t) \right]; \quad (1.63)$$

Bewegungsgleichungen („vorläufig“):

$$\frac{d}{dt} \frac{m_a \mathbf{v}_a(t)}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2(t)}{c^2}}} = \mathbf{K}_a(t), \quad a = 1, 2, \dots, N. \quad (1.64)$$

Wie wir sehen werden, spielen die mit unendlichen Selbstkräften und Selbstenergien verbundenen Komplikationen bei den Erhaltungssätzen nur eine untergeordnete Rolle.

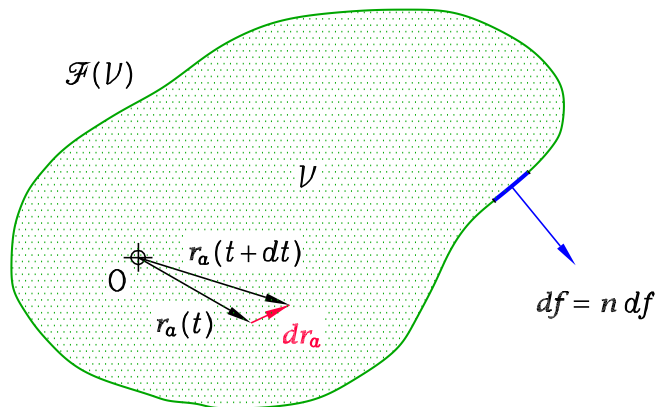


Abbildung 1.8: Fester Volumensbereich  $\mathcal{V}$  und Oberfläche  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  für die Formulierung der Erhaltungssätze

Wir stellen jeweils Bilanzgleichungen für einen festen Raumbereich  $\mathcal{V}$  mit der geschlossenen Oberfläche  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  auf. Wählt man irgendeinen derartigen Volumensbereich, so kommt es i. Allg. nicht nur dadurch zu Änderungen des Wertes der Bilanzgröße in  $\mathcal{V}$ , dass Feldbeiträge durch  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  aus- bzw. einströmen, sondern auch dadurch, dass Teilchen  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$

nach außen oder innen durchsetzen und dadurch mechanische Beiträge zur Bilanzgröße “verschleppt“ werden. Natürlich ist es möglich, für diesen allgemeinen Fall Bilanzgleichungen zu formulieren. Wir wollen uns aber das Leben erleichtern, indem wir *spezielle Volumsbereiche*  $\mathcal{V}$  betrachten, für die sich die Bilanzgleichungen einfacher ableiten und anschreiben lassen. Und zwar nehmen wir an, dass sich zum betrachteten Zeitpunkt  $t$  alle  $N$  Teilchen im Inneren des Volumsbereiches  $\mathcal{V}$  aufhalten, und im Zeitintervall  $(t, t + dt)$  kein einziges Teilchen  $\mathcal{V}$  durch  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  verlässt (s. Abb. 1.8). Derartige Volumsbereiche lassen sich bei beliebiger Bewegungsform der Teilchen, also auch bei räumlich nicht lokalisierten Bewegungen, für jedes  $t$  finden. (Ist  $\mathcal{V}$  ein derartiger Volumsbereich, so besitzt ein Volumsbereich  $\mathcal{V}_1$  mit der Eigenschaft  $\mathcal{V}_1 \supset \mathcal{V}$  für den Zeitpunkt  $t$  ebenfalls die geforderte Eigenschaft. Insbesondere kann man auch den Grenzübergang  $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$  betrachten.)

### 1.11.1 Energieerhaltung

Die mechanische Gesamtenergie in einem Volumsbereich  $\mathcal{V}$  mit den vorausgesetzten Eigenschaften ist zum Zeitpunkt  $t$  durch

$$E_{\text{mech}}(t) = \sum_{a=1}^N E_a(t) = \sum_{a=1}^N \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2(t)}{c^2}}} \quad (1.65)$$

gegeben. Die zeitliche Änderung dieser Größe können wir mithilfe der zu den Bewegungsgleichungen (1.64) gehörenden Arbeitssätze

$$\frac{d}{dt} \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2(t)}{c^2}}} = \mathbf{v}_a(t) \cdot \mathbf{K}_a(t) = q_a \mathbf{v}_a(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_a(t), t), \quad a = 1, 2, \dots, N \quad (1.66)$$

berechnen. Wir erhalten damit

$$\frac{dE_{\text{mech}}(t)}{dt} = \sum_{a=1}^N q_a \mathbf{v}_a(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_a(t), t).$$

Hier müssen sich auf der „rechten“ Seite alle Teilchengrößen eliminieren lassen, da in der Bilanzgleichung neben  $dE_{\text{mech}}/dt$  nur Feldbeiträge aufscheinen können.<sup>48</sup> Diese Elimination erreichen wir, indem wir zunächst die Summe mithilfe der  $\delta$ -Funktion formal als Volumsintegral über  $\mathcal{V}$  anschreiben<sup>49</sup> und dann die Maxwellgleichung (1.62)

<sup>48</sup>Teilchentransport durch  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  haben wir ja ausgeschlossen.

<sup>49</sup>Dabei geht die Voraussetzung, dass sich zum Zeitpunkt  $t$  alle  $N$  Teilchen im Inneren des Volumsbereiches  $\mathcal{V}$  aufhalten, ein.

benützen:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{mech}}(t)}{dt} &= \int_{\mathcal{V}} d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \sum_{a=1}^N q_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \\ &= \frac{c}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Auf der „rechten“ Gleichungsseite hätten wir gerne einen Ausdruck, dessen erster Term sich in ein Oberflächenintegral über  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  umwandeln und dessen zweiter Term sich als Zeitableitung eines Volumsintegrals schreiben lässt. Dieses Ziel können wir erreichen, indem wir in der Maxwellgleichung (1.61) auf beiden Seiten das innere Produkt mit  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  bilden, über den Volumsbereich  $\mathcal{V}$  integrieren, mit  $\frac{c}{4\pi}$  multiplizieren und die so erhaltene Beziehung

$$0 = \frac{c}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.68)$$

von Gl. (1.67) subtrahieren:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{mech}}}{dt} &= \frac{c}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r (\mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}) - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{c}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \end{aligned}$$

Da nach dem gaußschen Satz

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

gilt, folgt die Bilanzgleichung

$$-\frac{d}{dt} \left\{ E_{\text{mech}} + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right\} = \frac{c}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \quad (1.69)$$

durch welche die folgenden *Interpretationen* (Definitionen) nahegelegt werden.

**Energiedichte** des elektromagnetischen Feldes:

$$u_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t) := \frac{1}{8\pi} [\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)]; \quad (1.70)$$

**Energiestromdichte** des elektromagnetischen Feldes:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) := \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1.71)$$



Das Vektorfeld  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$  wird als *Poyntingsches Vektorfeld* bzw. als „Poyntingvektor“ bezeichnet. Es bedeutet

$$S_n(\mathbf{r}, t) := \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \quad (1.72)$$

die Feldenergiemenge, die netto zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $\mathbf{r}$  in der Zeiteinheit eine zum Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  senkrechte Einheitsfläche durchströmt.

Dass die Interpretation der Ausdrücke von Gl. (1.70), (1.71) als Energiedichte und Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes nicht zwingend ist, zeigt die folgende Überlegung. Ist  $\mathbf{W}(\mathbf{r}, t)$  irgendein Ausdruck in  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  der Dimension Energie pro Flächeneinheit, so gilt mit Gl. (1.69) auch

$$-\frac{d}{dt} \left\{ E_{\text{mech}} + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + \text{div } \mathbf{W}) \right\} = \frac{c}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f} \cdot \left[ (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{\dot{\mathbf{W}}}{2c} \right].$$

Da man derartige  $\mathbf{W}$ , für die  $\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + \text{div } \mathbf{W}$  nichtnegativ ist, angeben kann, gibt es ein Interpretationsproblem. Analoge Interpretationsprobleme gibt es bei Feldimpuls und Felddrehimpuls.

Für Volumina  $\mathcal{V}$  mit der Eigenschaft, dass sich zum Zeitpunkt  $t$  alle Teilchen im Inneren aufhalten, und auch im Zeitintervall  $(t, t + dt)$  keines der Teilchen  $\mathcal{V}$  verlässt (s. Abb. 1.8), gilt also die folgende Energiebilanz:

<b>Energieerhaltungssatz</b>	
Die Summe aus der gesamten mechanischen Energie und der gesamten im Volumen $\mathcal{V}$ vorhandenen elektromagnetischen Feldenergie nimmt in der Zeiteinheit um den Energiebetrag ab, der netto in der Zeiteinheit in Form von elektromagnetischer Feldenergie durch die Oberfläche $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ ausströmt:	
$-\frac{d}{dt} [E_{\text{mech}}(t) + E_{\text{elm}}(t; \mathcal{V})] = \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f} S_n(\mathbf{r}, t) \quad (1.73)$	
mit	
$E_{\text{mech}}(t) = \sum_{a=1}^N \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2(t)}{c^2}}}, \quad (1.74)$	
$E_{\text{elm}}(t; \mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} d^3r u_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t). \quad (1.75)$	

Die im Volumen  $\mathcal{V}$  vorhandene mechanische Energie kann sich unter den getroffenen Voraussetzungen natürlich nur dadurch ändern, dass sich zufolge der vom Feld vermittelten Wechselwirkung die kinetischen Energien der  $N$  Teilchen ändern.

Die im Ausdruck (1.75) enthaltenen unendlichen Selbstenergiebeiträge der  $N$  Punktladungen „stören“ in der Bilanzgleichung (1.73) „nicht allzu sehr“, da sie als zeitlich konstante Beiträge

bei der Differentiation nach  $t$  „wegfallen“. (Für endliche Teilchenradien  $R_a$  ergeben sich zeitlich konstante *endliche* Selbstenergiebeiträge, diese fallen für beliebig kleine  $R_a$  bei der Differentiation weg.) Bei Verwendung der korrekten Grundgleichungen erhält man von vornherein einen Energieerhaltungssatz ohne diese Problematik.

Nehmen wir einmal an, es gibt Systeme, bei welchen alle  $N$  Ladungen zu allen Zeiten im Inneren eines Kugelbereiches  $\mathcal{K}(R_0)$  ( $R_0$  fest) bleiben, d. h. bei welchen eine räumlich „lokalisierte“ Bewegung der Teilchen vorliegt.<sup>50</sup> Man würde vielleicht annehmen, dass es dann keinen Energiestrom durch die „unendlich ferne Oberfläche“ gibt, dass also

$$\lim_{\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3} \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} df S_n(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \quad \forall t \quad (1.76)$$

gilt. Dies würde bedeuten, dass der Energieerhaltungssatz für derartige Systeme im Grenzfall  $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Form „Die Summe aus mechanischer Energie und Feldenergie ist zeitlich konstant“ annimmt:

$$E_{\text{mech}}(t) + E_{\text{elm}}(t; \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3) \rightarrow \text{konst.} \quad (1.77)$$

Von der Elektro- und Magnetostatik ist man „gewohnt“, dass die Feldstärken lokalisierter Quellen im Unendlichen wie  $1/r^2$  gegen null streben. Mit  $S_n \sim 1/r^4$ ,  $df = r^2 d\Omega$  hätte man dann tatsächlich das Verhalten von Gl. (1.76). Wir werden aber in Abschnitt 1.16 sehen, dass die Feldstärken  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  in der Elektrodynamik zufolge der Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen durch die beschleunigt bewegten Ladungen im Unendlichen nur wie  $1/r$  gegen null streben, sodass die Beziehung (1.76) *nicht* gilt. Nur für den Fall von schwach beschleunigten nichtrelativistischen Ladungen kann man – wie wir sehen werden – bei nicht zu langer Versuchsdauer die Abstrahlung vernachlässigen, da dann die vom System während der Versuchsdauer abgestrahlte Energie im Vergleich zu den Energien  $E_{\text{mech}}$ ,  $E_{\text{elm}}$  vernachlässigbar klein ist. Da unter diesen Umständen die zeitliche Abnahme von  $E_{\text{mech}} + E_{\text{elm}}$  für die Versuchsdauer vernachlässigt werden kann, gilt in diesem Fall mit  $E_{\text{elm}}(t) \equiv E_{\text{elm}}(t; \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3)$

$$E_{\text{mech}}(t) + E_{\text{elm}}(t) \approx \text{konst.}, \quad (1.78)$$

d. h.  $E_{\text{mech}} + E_{\text{elm}}$  ist eine näherungsweise Erhaltungsgröße. Schreibt man diesen näherungsweise Energieerhaltungssatz in der Form<sup>51</sup>

$$\sum_{a=1}^N \frac{m_a \mathbf{v}_a^2(t)}{2} + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r [\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)] \approx \text{konst.} \quad (1.79)$$

an, so hat man allerdings keine sinnvolle Beziehung, solange man aus  $E_{\text{elm}}(t)$  nicht die zeitunabhängigen aber unendlichen Selbstenergiebeiträge der Punktladungen eliminiert hat.

<sup>50</sup>Für derartige Systeme lässt sich allerdings die Maxwell-Lorentz-Theorie gar nicht als logisch konsistente abgeschlossene Theorie formulieren; s. dazu die Abschnitte 6-4, 6-6 und 7-1 des Buches von Rohrlich.

<sup>51</sup>Die Ruhenergie wird dabei in die Konstante gezogen, ferner wird aufgrund der Voraussetzungen für die kinetischen Energien der Teilchen die newtonsche Formel benützt.

### 1.11.2 Impulserhaltung

Wir gehen vollkommen analog wie in Abschnitt 1.11.1 vor. Die Rechnungen sind aber komplizierter, weil wir es mit einer Vektorgröße zu tun haben.

Der mechanische Gesamtimpuls in einem Volumsbereich  $\mathcal{V}$  mit den vorausgesetzten Eigenschaften ist zum Zeitpunkt  $t$  durch

$$\mathbf{p}_{\text{mech}}(t) = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a(t) = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \mathbf{v}_a(t)}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2(t)}{c^2}}} \quad (1.80)$$

gegeben. Die zeitliche Änderung dieser Größe können wir mithilfe der Bewegungsgleichungen (1.64) berechnen. Wir erhalten damit

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{mech}}(t)}{dt} = \sum_{a=1}^N q_a \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}_a(t), t) + \frac{\mathbf{v}_a(t)}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_a(t), t) \right].$$

Wir erreichen die Elimination aller Teilchengrößen auf der „rechten“ Seite, indem wir die Summe mithilfe der  $\delta$ -Funktion formal als Volumsintegral über  $\mathcal{V}$  anschreiben und die Maxwellgleichungen (1.59), (1.62) benützen:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_{\text{mech}}(t)}{dt} &= \int_{\mathcal{V}} d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \sum_{a=1}^N q_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) - \int_{\mathcal{V}} d^3r \left[ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \sum_{a=1}^N q_a \frac{\mathbf{v}_a(t)}{c} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - (\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) + \left( \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Auf der „rechten“ Gleichungsseite hätten wir wieder gerne einen Ausdruck, dessen erster Term sich in ein Oberflächenintegral über  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  umwandeln und dessen zweiter Term sich als Zeitableitung eines Volumsintegrals schreiben lässt. Dieses Ziel können wir erreichen, indem wir den Integranden unter Verwendung der Maxwellgleichungen (1.60), (1.61) auf geeignete Weise umformen.

Diese Umformung zerlegen wir in drei Teilschritte. Beim ersten Schritt benützen wir die Maxwellgleichung (1.61):

$$\mathbf{B} \times \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \left( \mathbf{E} \times \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}).$$

Beim zweiten Schritt benützen wir neben dieser Beziehung die Maxwellgleichung (1.60), die es uns ermöglicht, „ungestraft“ einen Term  $\mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B}$  hinzuzufügen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - (\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) + \left( \mathbf{B} \times \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ = -(\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}) + \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - (\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) + \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Für den dritten Schritt machen wir von der für ein beliebiges Vektorfeld  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  gültigen Formel

$$\{ -(\mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}) + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{a} \}_i = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{2} \delta_{ij} a^2 - a_i a_j \right]$$

Gebrauch. Mit dieser Formel erhalten wir für den Integranden in Gl. (1.81) die gewünschte Form:

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - (\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) + \left( \mathbf{B} \times \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \right\}_i \\ &= - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - E_i E_j - B_i B_j \right] - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Da aus dem für die kartesischen Komponenten eines beliebigen Tensorfeldes beliebiger Stufe gültigen *verallgemeinerten gaußschen Satz* speziell für ein Tensorfeld zweiter Stufe  $\mathbb{T}$

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\mathcal{V}} d^3r \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ji}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^3 \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} df_j T_{ji}(\mathbf{r}, t) \quad (1.83)$$

folgt und somit die Beziehung

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\mathcal{V}} d^3r \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - E_i E_j - B_i B_j \right] = \sum_{j=1}^3 \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} df_j \left[ \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - E_i E_j - B_i B_j \right]$$

gilt, erhalten wir aus den Gleichungen (1.81), (1.82) die gesuchte Bilanzgleichung.

Durch die Bilanzgleichung<sup>52</sup>

$$\begin{aligned} & - \frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{p}_{\text{mech}} + \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathcal{V}} d^3r (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right\}_i = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^3 \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} df_j \left[ \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - E_i E_j - B_i B_j \right] \end{aligned} \quad (1.84)$$

bzw.

$$\begin{aligned} & - \frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{p}_{\text{mech}} + \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathcal{V}} d^3r (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} df \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \mathbf{n} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{E} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B} \right] \end{aligned} \quad (1.85)$$

werden die folgenden *Interpretationen* (Definitionen) nahegelegt.

**Impulsdichte** des elektromagnetischen Feldes:

$$\mathcal{P}_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t) := \frac{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)}{c^2} \quad (1.86)$$

( $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ ) ist dabei die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes Gl. (1.71);

**Impulsstromdichte** des elektromagnetischen Feldes:

<sup>52</sup>Beachte: Ist  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r})$  der auf eins normierte Flächennormalvektor im Flächenpunkt  $\mathbf{r}$ , so gilt  $df_j = n_j df$ .

symmetrisches Tensorfeld zweiter Stufe  $\sigma$  mit den kartesischen Komponenten

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) := u_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t) \delta_{ij} - \frac{1}{4\pi} [E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) + B_i(\mathbf{r}, t) B_j(\mathbf{r}, t)]. \quad (1.87)$$

Die Größe  $\mathbf{G}_n(\mathbf{r}, t)$  mit den kartesischen Komponenten

$$G_{n,i}(\mathbf{r}, t) := \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) n_j, \quad (1.88)$$

symbolisch  $\mathbf{G}_n := \sigma \cdot \mathbf{n}$  geschrieben, bezeichnen wir als *Impulsstromdichte des Feldes bzgl. der Richtung  $\mathbf{n}$* . Es gilt

$$\mathbf{G}_n(\mathbf{r}, t) = u_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} - \frac{1}{4\pi} [(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1.89)$$

$u_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t)$  ist dabei durch die Gleichung (1.70) gegeben. Die Impulsdichte gibt den zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $\mathbf{r}$  in der Volumeneinheit „gespeicherten“ Feldimpuls nach Betrag und Richtung an. Die Bedeutung der Impulsstromdichte des Feldes bzgl. der Richtung  $\mathbf{n}$  ist die folgende:  $\mathbf{G}_n(\mathbf{r}, t)$  gibt nach Betrag und Richtung den Feldimpuls an, der netto zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $\mathbf{r}$  in der Zeiteinheit eine zum Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  senkrechte Einheitsfläche durchströmt.<sup>53</sup>

Die Größe  $\mathbf{G}_n(\mathbf{r}, t)$  in der Impulsbilanz entspricht der Größe  $S_n(\mathbf{r}, t)$  (siehe Gl. (1.72)) in der Energiebilanz. Der dortigen Größe  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$  entspricht das Tensorfeld zweiter Stufe  $\sigma(\mathbf{r}, t)$ . Das Tensorfeld  $-\sigma(\mathbf{r}, t)$  wird aus historischen Gründen als maxwellscher Spannungstensor bezeichnet.<sup>54</sup>

Für Volumina  $\mathcal{V}$  mit der Eigenschaft, dass sich zum Zeitpunkt  $t$  alle Teilchen im Inneren aufhalten, und auch im Zeitintervall  $(t, t + dt)$  keines der Teilchen  $\mathcal{V}$  verlässt (siehe Abb. 1.8), gilt also die folgende Impulsbilanz:

#### Impulserhaltungssatz

Die Summe aus dem gesamten mechanischen Impuls und dem gesamten im Volumen  $\mathcal{V}$  vorhandenen elektromagnetischen Feldimpuls nimmt in der Zeiteinheit um den Impuls ab, der netto in der Zeiteinheit in Form von elektromagnetischem Feldimpuls durch die Oberfläche  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  ausströmt:

$$-\frac{d}{dt} [\mathbf{p}_{\text{mech}}(t) + \mathbf{p}_{\text{elm}}(t; \mathcal{V})] = \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} df \mathbf{G}_n(\mathbf{r}, t) \quad (1.90)$$

mit

<sup>53</sup>Beachte: Während in der Definition (1.89)  $\mathbf{n}$  einen beliebigen vorgegebenen Einheitsvektor bedeutet, bedeutet  $\mathbf{n}$  in der Bilanzgleichung (1.85) den *ortsabhängigen* Flächennormalvektor  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ .

<sup>54</sup>Die Bezeichnung Spannungstensor rührt von der historischen Vorstellung eines materiellen Äthers her, der Spannungen übertragen kann.

$$\mathbf{p}_{\text{mech}}(t) = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \mathbf{v}_a(t)}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2(t)}{c^2}}}, \quad (1.91)$$

$$\mathbf{p}_{\text{elm}}(t; \mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} d^3r \mathcal{P}_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t). \quad (1.92)$$

Der im Volumen  $\mathcal{V}$  vorhandene mechanische Impuls kann sich unter den getroffenen Voraussetzungen natürlich nur dadurch ändern, dass sich zufolge der vom Feld vermittelten Wechselwirkung die Impulse der  $N$  Teilchen ändern.

Für eine räumlich lokalisierte Bewegung der  $N$  Teilchen und unter der Voraussetzung, dass sich die Teilchen nur schwach beschleunigt und mit nichtrelativistischen Geschwindigkeiten bewegen, kann bei nicht zu langer Versuchsdauer die Abstrahlung und damit die zeitliche Änderung von  $\mathbf{p}_{\text{mech}} + \mathbf{p}_{\text{elm}}$  vernachlässigt werden, und es gilt dann mit  $\mathbf{p}_{\text{elm}}(t) \equiv \mathbf{p}_{\text{elm}}(t; \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3)$

$$\mathbf{p}_{\text{mech}}(t) + \mathbf{p}_{\text{elm}}(t) \approx \text{konst.}, \quad (1.93)$$

d. h.  $\mathbf{p}_{\text{mech}} + \mathbf{p}_{\text{elm}}$  ist eine näherungsweise Erhaltungsgröße. Diesen näherungsweise Impulserhaltungssatz kann man in der Form schreiben:<sup>55</sup>

$$\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{v}_a(t) + \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \approx \text{konst.} \quad (1.94)$$

### 1.11.3 Drehimpulserhaltung

Analoge Überlegungen wie beim Impuls lassen sich beim Drehimpuls anstellen, doch sind die Rechnungen noch komplizierter, da es sich um eine durch äußere Produkte definierte Vektorgröße handelt. Die mechanischen Größen werden wie üblich definiert, für *Drehimpulsdichte* und *Drehimpulsstromdichte* des elektromagnetischen Feldes erhält man<sup>56</sup>

$$\mathcal{L}_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{r} \times \mathcal{P}_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t), \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t).$$

<sup>55</sup>Aufgrund der Voraussetzungen kann man für die Teilchenimpulse die newtonsche Formel benutzen.

<sup>56</sup>Siehe dazu Stumpf, H., und W. Schuler: Elektrodynamik. Vieweg, Braunschweig 1981. – Da das Photon einen Eigendrehimpuls (Spin 1) besitzt, muss es in der Quantenfeldtheorie des elektromagnetischen Feldes einen *Bahndrehimpuls*- und einen *Spinbeitrag* der Photonen zum Felddrehimpuls geben. Die klassische Beziehung für die Drehimpulsdichte überrascht deshalb auf den ersten Blick. Eine geeignete Umformung des klassischen Ausdruckes für den Felddrehimpuls führt aber zu einer Aufspaltung in zwei Terme, die nach der „Quantisierung“ des elektromagnetischen Feldes einen Bahndrehimpuls- und einen Spinbeitrag der Photonen ergeben; siehe dazu Aufgabe 7.27 von Jackson, J. D.: Klassische Elektrodynamik. Walter de Gruyter, Berlin 2006.

(Letztere Beziehung steht symbolisch für  $\tau_{il} = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}$ .) Aus dem Drehimpulsstromdichtetensor lässt sich die zugehörige Drehimpulsstromdichte bzgl. einer gegebenen Richtung  $\mathbf{n}$  auf analoge Weise berechnen wie die Impulsstromdichte bzgl. der Richtung  $\mathbf{n}$  aus dem Impulsstromdichtetensor.

## 1.12 Transformation von Quellen und Feldern. Lorentzkovarianz

Wir untersuchen nun, ob die Maxwell-Lorentz-Theorie eine im Sinne des einsteinschen Relativitätsprinzips „brauchbare“ physikalische Theorie ist, d. h. ob sie mit diesem Prinzip verträglich ist.

Verträglichkeit des Systems der Maxwell-Lorentz-Gleichungen (1.45) bis (1.50) mit dem einsteinschen Relativitätsprinzip ist dann und nur dann gegeben, wenn es möglich ist, für die elektromagnetischen Feldstärken ein Transformationsgesetz

$$I : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \longleftrightarrow I' : \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t'), \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')$$

anzugeben, welches zusammen mit den bekannten Lorentz-Transformationsgesetzen der elektrischen Ladung, der Raumzeitkoordinaten von Ereignissen, der Teilchenbahnen und der Teilchengeschwindigkeiten die Forminvarianz der Grundgleichungen (1.45) bis (1.50) gewährleistet.

Hat man ein derartiges Transformationsgesetz für die Feldstärken gefunden, so *postuliert* man es im Rahmen der Theorie, und die auf diese Weise vervollständigte Theorie ist lorentzkovariant.

Die komplizierte Struktur des Systems der Maxwell-Lorentz-Gleichungen lässt die Verträglichkeit der Theorie mit dem einsteinschen Relativitätsprinzip nicht unmittelbar erkennen. Da wir auf die Einführung der Tensorrechnung im Minkowskiraum<sup>57</sup> verzichten wollen<sup>58</sup>, steht uns für die Behandlung dieses Problems nicht das wirkungsvollste mathematische Rüstzeug zur Verfügung. Wir müssen uns aber auch nicht mit der „Fußgänger“-Methode bescheiden<sup>59</sup>, da uns immerhin das Konzept der Vierervektorfelder zur Verfügung steht. Die Möglichkeit, die sechs Feldfunktionen  $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$  durch *vier* Feldfunktionen, die elektromagnetischen Potentiale  $\varphi, A_x, A_y, A_z$ , auszudrücken, eröffnet einen Weg, der zwar nicht der kürzeste und eleganteste ist, der aber gegenüber der reinen „Fußgänger“-Methode immer noch wesentlich kürzer und übersichtlicher ist.

<sup>57</sup>Mathematische Konzepte: Vierertensoren und Vierertensorfelder zweiter und höherer Stufe, Vierergradientenoperator, Metriktenor, kontravariante und kovariante Tensorkomponenten

<sup>58</sup>Im Nachhinein werden wir im Abschnitt 1.12.5 einige dieser mathematischen Konzepte skizzenhaft erläutern, um zu zeigen, wie „schön“ Naturgesetze aussehen, wenn man für ihre Formulierung die adäquate Mathematik benutzt.

<sup>59</sup>Diese besteht im Einsetzen der bekannten Transformationsgesetze in die Grundgleichungen, Anwenden der Kettenregel für die Differentiation und Neugruppieren der auftretenden Terme; siehe dazu z. B. Melcher, H.: Relativitätstheorie in elementarer Darstellung. Aulis Verlag, Berlin 1976.

### 1.12.1 Transformation der Quellen

Da sich die Gesamtquellen wie die Teilquellen transformieren, genügt es, das Transformationsverhalten der zu einer Punktladung  $q_b$  gehörigen Quelldichten

$$\rho_b(\mathbf{r}, t) = q_b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)), \quad \mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t) = q_b \mathbf{v}_b(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t))$$

bei einem Bezugssystemwechsel  $I \rightarrow I'$  zu untersuchen.

In den Ausdrücken für  $\rho_b, \mathbf{j}_b$  ist das Transformationsverhalten aller Größen bekannt:  $\delta$  ist eine bekannte (in allen Inertialsystemen gleich definierte) Funktion,  $q_b$  ist eine Lorentzinvariante, das Transformationsgesetz für Raumzeitkoordinaten, Teilchenbahnen und Teilchengeschwindigkeiten ist bekannt. Wir müssen uns aber mit diesen Details gar nicht explizit befassen, sondern können unmittelbar von der Lorentzinvarianz der Ladung ausgehen, welche wegen der Additivität der Ladung auch infinitesimal gelten muss:<sup>60</sup>

$$\rho_b(\mathbf{r}, t) d^3r = \rho'_b(\mathbf{r}', t') d^3r' \quad (\text{Viererskalarfeld}). \quad (1.95)$$

Ferner benützen wir das Transformationsverhalten der Raumzeitkoordinaten von Ereignissen bei allgemeinen Lorentztransformationen

$$x^{\mu'} = L^{\mu'}_{\alpha} x^{\alpha} - l^{\mu'} \quad (1.96)$$

sowie die Tatsache (s. Aufgabe E1), dass die Determinante der Transformationsmatrix  $L \equiv (L^{\mu'}_{\alpha})$  für beliebige Lorentztransformationen den Wert eins besitzt:

$$\det L = 1. \quad (1.97)$$

Mit Gl. (1.96) folgt für das „vierdimensionale Volumenelement“

$$d^4x := dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = d(ct) d^3r$$

das Transformationsgesetz

$$d^4x' = \frac{\partial(x^0', x^1', x^2', x^3')}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} d^4x = \det L d^4x.$$

Wegen Gl. (1.97) gilt also

$$d^4x = d^4x' \quad (\text{Lorentzinvariante}). \quad (1.98)$$

Wir bauen nun aus der lorentzinvarianten Geschwindigkeit  $c$ , dem Viererskalarfeld von Gl. (1.95) und dem infinitesimalen Vierer-Verschiebungsvektor  $dx_b^{\mu}$  längs der Weltlinie der Ladung  $q_b$  durch Produktbildung eine Größe auf, deren Transformationsverhalten als Vierervektorfeld unmittelbar aus ihrer Konstruktion folgt:

$$c \rho_b(\mathbf{r}, t) d^3r dx_b^{\mu} = \rho_b(\mathbf{r}, t) d^3r d(ct) \frac{dx_b^{\mu}}{dt} \quad (\text{Vierervektorfeld}).$$

<sup>60</sup>Zur Additivität und Lorentzinvarianz der elektrischen Ladung s. Abschnitt 1.5.



Durch Weglassen der Lorentzinvariante  $d^3r d(ct) = d^4x$  verbleibt nach dem Quotiententheorem der Tensorrechnung wiederum ein Vierervektorfeld:

$$\rho_b(\mathbf{r}, t) \frac{dx_b^\mu}{dt} \quad (\text{Vierervektorfeld}). \quad (1.99)$$

Wir berechnen nun die Komponenten dieses Vierervektorfeldes und erinnern uns dabei an die Begriffe Eigenzeitdifferential und Vierergeschwindigkeit eines Teilchens. Mit

$$d\tau_b = \frac{dt}{\gamma(v_b)}, \quad (v_b^\mu) = \left( \frac{dx_b^\mu}{d\tau_b} \right) = \gamma(v_b) (c, \mathbf{v}_b) \quad (1.100)$$

folgt

$$\rho_b \frac{dx_b^\mu}{dt} = \rho_b \frac{d\tau_b}{dt} \frac{dx_b^\mu}{d\tau_b} = \rho_b \frac{1}{\gamma(v_b)} v_b^\mu,$$

also

$$\left( \rho_b \frac{dx_b^\mu}{dt} \right) = (c\rho_b, \mathbf{v}_b \rho_b) = (c\rho_b, \mathbf{j}_b). \quad (1.101)$$

Wir haben damit bewiesen, dass sich  $c\rho_b, \mathbf{j}_b$  bei Wechsel des Bezugssystems als Komponenten eines Vierervektorfeldes transformieren. Da die „räumlichen“ Komponenten durch die „gewöhnliche“ Stromdichte („Dreierstromdichte“)  $\mathbf{j}_b$  gegeben sind, können wir dieses Vierervektorfeld, die *elektrische Viererstromdichte zur Ladung  $q_b$*  mit  $(j_b^\mu)$  bzw. abstrakt mit  $\underline{j}_b$  bezeichnen.<sup>61</sup>

$$\underline{j}_b: \quad I: \quad (j_b^\mu) = (c\rho_b, \mathbf{j}_b). \quad (1.102)$$

Für die Gesamtquellichten Gl. (1.5), (1.6) folgt dann, dass  $c\rho, \mathbf{j}$  ebenfalls ein Vierervektorfeld, die **elektrische (Gesamt-)Viererstromdichte**, bilden:

$$\underline{j}: \quad I: \quad (j^\mu) = (c\rho, \mathbf{j}). \quad (1.103)$$

Wir haben hier der Einprägsamkeit halber die Argumente weggelassen. Ausführlich geschrieben hat man

$$\underline{j}: \quad I: \quad (j^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)) = (c\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)).$$

Als Komponenten eines Vierervektorfeldes transformieren sich die  $j^\mu$  bei einer allgemeinen Lorentztransformation (s. Gl. (1.96)) gemäß

$$j^{\mu'}(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = L_{\alpha}^{\mu'} j^{\alpha}(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (1.104)$$

<sup>61</sup>Wir verwenden für einen Vierervektor oder ein Vierervektorfeld immer dann ein anderes Symbol als für die betreffende „Dreiergröße“, wenn die „räumlichen“ Komponenten nicht mit der „Dreiergröße“ übereinstimmen (Beispiele: Teilchengeschwindigkeit, Teilchenbeschleunigung, Kraft).

also gilt insbesondere für Inertialsysteme I, I' in *Standardkonfiguration* (vergleiche mit Seite 9)

$$\rho'(\mathbf{r}', t') = \gamma(V) \left( \rho(\mathbf{r}, t) - \frac{V j_x(\mathbf{r}, t)}{c^2} \right), \quad (1.105)$$

$$j'_x(\mathbf{r}', t') = \gamma(V) (j_x(\mathbf{r}, t) - V \rho(\mathbf{r}, t)), \quad (1.106)$$

$$j'_y(\mathbf{r}', t') = j_y(\mathbf{r}, t), \quad (1.107)$$

$$j'_z(\mathbf{r}', t') = j_z(\mathbf{r}, t). \quad (1.108)$$

Vereinbart man, dass bei Transformationsgleichungen von Feldern generell „gestrichene“ Größen als Funktionen der „gestrichenen“ Raumzeitkoordinaten und „ungestrichene“ Größen als Funktionen der „ungestrichenen“ Raumzeitkoordinaten aufzufassen sind, so kann man anstelle von Gl. (1.104) einfach

$$j^{\mu'} = L^{\mu'}_{\alpha} j^{\alpha} \quad (1.109)$$

schreiben. Analog lautet dann die **Standard-Lorentztransformation für die elektromagnetischen Queldichten**:

$$\rho' = \gamma(V) \left( \rho - \frac{V j_x}{c^2} \right), \quad (1.110)$$

$$j'_x = \gamma(V) (j_x - V \rho), \quad (1.111)$$

$$j'_y = j_y, \quad (1.112)$$

$$j'_z = j_z. \quad (1.113)$$

Die Umkehrtransformation erhält man daraus nach dem Reziprozitätssatz der Relativitätstheorie, indem man „gestrichene“ Größen durch „ungestrichene“ Größen, „ungestrichene“ Größen durch „gestrichene“ Größen und  $V$  durch  $-V$  ersetzt.

Die Aufgabe E2 stellt eine einfache Anwendung der Formeln (1.110) bis (1.113) dar.

Von der Kontinuitätsgleichung (1.9), welche die Erhaltung der Ladung ausdrückt, erwarten wir, dass sie sich als lorentzkovariant erweist. Erinnern wir uns an den *Vierergradientenoperator*

$$\underline{\partial}: \text{I: } (\partial^{\mu}) = (\partial^0, \boldsymbol{\partial}) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (1.114)$$

und an das lorentzinvariante minkowskische *innere Produkt von Vierervektoren*,

$$\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad (1.115)$$

so sehen wir unmittelbar, dass sich die **Kontinuitätsgleichung** sogar in *offensichtlich lorentzkovarianter Form* schreiben lässt:

$$\underline{\partial} \cdot \underline{j} = 0. \quad (1.116)$$

### 1.12.2 Transformation der Potentiale

Die Feldgleichungen für die elektromagnetischen Potentiale in Lorenznotation sind durch (1.34) bis (1.36) gegeben. Die Größen auf den „rechten“ Seiten von (1.34), (1.35) sind nach Gl. (1.103) Komponenten des Vierervektorfeldes  $\frac{4\pi}{c} \underline{j}$  in Bezug auf das Inertialsystem I. Da der d'Alembertoperator  $\square = \underline{\partial} \cdot \underline{\partial}$  ein lorentzinvarianter Differentialoperator ist, sind die Gleichungen (1.34), (1.35) dann und nur dann lorentzkovariant, wenn  $\varphi, \underline{A}$  Komponenten eines Vierervektorfeldes sind. Ist dies aber der Fall, so ist auch Gl. (1.36) lorentzkovariant, da dann

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \underline{A}$$

das Minkowskische innere Produkt von  $\underline{\partial}$  mit diesem Vierervektorfeld darstellt. Wir postulieren entsprechend, dass  $\varphi, \underline{A}$  ein Vierervektorfeld, das **elektromagnetische Viererpotential**, bilden:

$$\underline{A}: I: (A^\mu) = (\varphi, \underline{A}). \quad (1.117)$$

Mit diesem Postulat, d. h. mit der *Forderung*, dass bei einer allgemeinen Lorentztransformation (s. Gl. (1.96))

$$A^{\mu'} = L^{\mu'}_{\alpha} A^\alpha \quad (1.118)$$

gelten soll, nehmen die **Feldgleichungen für die elektromagnetischen Potentiale** die offensichtlich lorentzkovariante Form

$$\square \underline{A} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}, \quad (1.119)$$

$$\underline{\partial} \cdot \underline{A} = 0 \quad (1.120)$$

an.

Die **Standard-Lorentztransformation für die Potentiale** lautet:

$$\varphi' = \gamma(V) \left( \varphi - \frac{V}{c} A_x \right), \quad (1.121)$$

$$A'_x = \gamma(V) \left( A_x - \frac{V}{c} \varphi \right), \quad (1.122)$$

$$A'_y = A_y, \quad (1.123)$$

$$A'_z = A_z. \quad (1.124)$$

Die Umkehrtransformation erhält man daraus mithilfe des Reziprozitätssatzes.

In den Transformationsformeln (1.118) und (1.121) bis (1.124) wurden wieder die Argumente weggelassen. Die diesbezügliche Vereinbarung von Seite 42 wird noch einmal in Erinnerung gerufen.

In Aufgabe E3 werden die Formeln (1.121) bis (1.124) auf ein einfaches Problem angewendet.

### 1.12.3 Transformation der Feldstärken

Wird der Zusammenhang zwischen Feldstärken und Potentialen als forminvariant angenommen,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{grad} \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.125)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (1.126)$$

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') = -\mathbf{grad}' \varphi'(\mathbf{r}', t') - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'(\mathbf{r}', t')}{\partial t'}, \quad (1.127)$$

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') = \mathbf{rot}' \mathbf{A}'(\mathbf{r}', t'), \quad (1.128)$$

so ist mit der Lorentzkovarianz der Feldgleichungen für die elektromagnetischen Potentiale auch die **Lorentzkovarianz der Maxwellgleichungen** gewährleistet. Das Transformationsgesetz der elektromagnetischen Feldstärken lässt sich dann mithilfe der bekannten Transformationsgesetze der Raumzeitkoordinaten und der Potentiale im Prinzip für einen beliebigen Bezugssystemwechsel  $I \rightarrow I'$  ableiten. Da wir aber das Transformationsgesetz der Raumzeitkoordinaten nur für Systeme in Standardkonfiguration behandelt haben, leiten wir auch das Transformationsgesetz für die Feldstärken nur für Systeme in *Standardkonfiguration* ab.

Da man das Transformationsgesetz von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  bei raumzeitlichen Translationen und räumlichen Drehungen ohnehin kennt, und sich eine allgemeine Lorentztransformation aus zwei räumlichen Drehungen, einer Standard-Lorentztransformation und einer raumzeitlichen Translation zusammensetzen lässt, ist diese Beschränkung nicht wesentlich.<sup>62</sup>

Für Bezugssysteme in Standardkonfiguration transformieren sich die Raumzeitkoordinaten gemäß den Gleichungen von Seite 9 und die elektromagnetischen Potentiale gemäß Gl. (1.121) bis (1.124). Setzt man die letzteren Beziehungen in Gl. (1.127), (1.128) ein, bildet man die Ableitungen unter Beachtung der Kettenregel<sup>63</sup> und vergleicht man schließlich mit Gl. (1.125), (1.126), so kann man das Transformationsgesetz der elektromagnetischen Feldstärken bei einer Standard-Lorentz-Transformation ablesen. Wir führen hier die Rechnung nur für eine Komponente explizit vor: Einsetzen von Gl. (1.121) und (1.123) in

$$E'_y = -\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} - \frac{1}{c} \frac{\partial A'_y}{\partial t'}$$

und Berücksichtigung der Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma(V) \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{V}{c} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

gibt zunächst

$$E'_y = \gamma(V) \left[ \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) - \frac{V}{c} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right].$$

<sup>62</sup>Bezüglich des Transformationsgesetzes von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  bei einer allgemeinen Lorentztransformation siehe z. B. Abschnitt 11.10 von Jackson, J. D.: Klassische Elektrodynamik. Walter de Gruyter, Berlin 2006.

<sup>63</sup>Da wir auf die Einführung von Vierertensoren zweiter Stufe, insbesondere des Feldtensors des elektromagnetischen Feldes, verzichtet haben, müssen wir jetzt eine Wegstrecke als „Fußgänger“ zurücklegen.

Mithilfe von Gl. (1.125), (1.126) folgt daraus das gesuchte Transformationsgesetz

$$E'_y = \gamma(V) \left( E_y - \frac{V}{c} B_z \right).$$

Die Rechnung für die übrigen Komponenten ist vollkommen analog. Man erhält als **Standard-Lorentztransformation für die elektromagnetischen Feldstärken:**

$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x, \\ E'_y &= \gamma(V) \left( E_y - \frac{V}{c} B_z \right), & B'_y &= \gamma(V) \left( B_y + \frac{V}{c} E_z \right), \\ E'_z &= \gamma(V) \left( E_z + \frac{V}{c} B_y \right), & B'_z &= \gamma(V) \left( B_z - \frac{V}{c} E_y \right). \end{aligned} \tag{1.129}$
---

Die Umkehrtransformation erhält man daraus mithilfe des Reziprozitätssatzes.

In Aufgabe E3 werden die Formeln (1.129) für die Berechnung des elektromagnetischen Feldes einer gleichförmig geradlinig bewegten Punktladung benützt.

Wir haben schon bisher immer vom **elektromagnetischen Feld  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$**  und nicht vom elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  und magnetischen Feld  $\mathbf{B}$  gesprochen. Das Transformationsgesetz der Feldstärken zeigt, dass elektrisches und magnetisches Feld tatsächlich keine universellen und damit *keine fundamentalen Begriffe* darstellen, vielmehr das elektromagnetische Feld der fundamentale Begriff ist. (Siehe auch den Feldtensor Gl. (1.143).) Gilt in einem Inertialsystem I  $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{0}$  oder  $\mathbf{E} \equiv \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ , so gilt für alle gegenüber I bewegten Inertialsysteme I'  $\mathbf{E}' \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{B}' \neq \mathbf{0}$ .

Durch Einsetzen von Gl. (1.129) kann man leicht verifizieren, dass bei Standard-Lorentztransformationen  $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  und  $\mathbf{B}'^2 - \mathbf{E}'^2 = \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$  gilt. Da diese Beziehungen aber auch für raumzeitliche Translationen und räumliche Drehungen gelten, sind

$$I_1 := \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad I_2 := \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 \tag{1.130}$$

Viererskalarfelder in Bezug auf *beliebige* Lorentztransformationen. Diese Viererskalarfelder heißen **Feldskalare** („Feldinvarianten“).

Wie man in der Vierertensorformulierung zeigen kann (s. Abschnitt 1.12.5), gibt es neben  $I_1$ ,  $I_2$  *keine weiteren Feldskalare*. Ohne Vierertensorrechnung kann man das nicht beweisen.

Die elektromagnetische Energiedichte  $u_{\text{elm}}$  stellt *kein* Viererskalarfeld dar<sup>64</sup>, wohl aber gilt dies für

$$u_{\text{magn}} - u_{\text{el}} = \frac{1}{8\pi} I_2.$$

Aus der Existenz der Feldskalare lassen sich wichtige Schlüsse ziehen.

<sup>64</sup>Sie transformiert sich bei einem Bezugssystemwechsel als „00“-Komponente eines Vierertensorfeldes zweiter Stufe, des Energie-Impuls-Tensors des elektromagnetischen Feldes.

- Gilt in einem Inertialsystem I an einem Ereignis  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  und  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$ , so gilt an dem betreffenden Ereignis in einem *beliebigen* Inertialsystem I'  $\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$  und  $|\mathbf{E}'| = |\mathbf{B}'|$ . Elektromagnetische Strahlungsfelder (Wellenfelder) besitzen diese Eigenschaften in der ganzen Raum-Zeit, d. h. an *allen* Ereignissen (s. die Abschnitte 1.16, 1.17). Beliebige inertielle Beobachter sind sich also einig, ob ein elektromagnetisches Feld ein Strahlungsfeld ist oder nicht.
- Im Einklang mit den Feldskalaren steht die folgende Aussage: Gilt in einem Inertialsystem I an einem Ereignis  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  und  $E^2 > B^2$ , so existieren (nicht abzählbar unendlich viele) Inertialsysteme I' mit der Eigenschaft, dass an dem betreffenden Ereignis  $\mathbf{B}' = \mathbf{0}$  gilt.

Da sich diese Bezugssysteme I' relativ zu I nicht in  $x$ -Richtung bewegen, benötigt man zum Beweis der Aussage das Transformationsgesetz der Feldstärken für Systeme, welche nicht in Standardkonfiguration sind. Man kann dann zeigen, dass die Geschwindigkeiten  $\mathbf{V}$  der Systeme I' durch

$$\frac{\mathbf{V}}{c} = \frac{\mathbf{E}}{E} \times \frac{\mathbf{B}}{E} + \alpha \sqrt{1 - \frac{B^2}{E^2}} \frac{\mathbf{E}}{E}, \quad -1 < \alpha < +1$$

gegeben sind.<sup>65</sup> Beachte, dass dabei das Ereignis fest ist, also  $\mathbf{V}$  eine *konstante* Geschwindigkeit ist. Gilt  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  und  $E^2 > B^2$  für *alle* Ereignisse, so kann es möglich sein, dass man eine *Funktion*  $\alpha(\mathbf{r}, t)$  finden kann, deren Funktionswerte betragsmäßig kleiner als eins sind, sodass  $\mathbf{V}$  (wie erforderlich) *nicht* von  $\mathbf{r}, t$  abhängt, also ein *bestimmtes* Inertialsystem I' mit  $\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') = \mathbf{0}, \forall \mathbf{r}', t'$ , existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn in I' rein elektrostatische Verhältnisse vorliegen (statische Ladungsverteilung, kein Strahlungsfeld).<sup>66</sup>

Eine solche Situation liegt bei Aufgabe E3 vor. Wählt man in Aufgabe E3

$$\alpha = \left(1 - \frac{B^2}{E^2}\right)^{-1/2} \frac{\mathbf{v}_0}{c} \cdot \frac{\mathbf{E}}{E},$$

so erhält man  $\mathbf{V} = \mathbf{v}_0$  und  $\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') = \mathbf{0}, \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') = q \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}$ , das elektrostatische Feld einer bezüglich I' im Ursprung ruhenden Punktladung.

- Analog kann man beweisen: Gilt in einem Inertialsystem I an einem Ereignis  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  und  $B^2 > E^2$ , so existieren (nicht abzählbar unendlich viele) Inertialsysteme I' mit der Eigenschaft, dass an dem betreffenden Ereignis  $\mathbf{E}' = \mathbf{0}$  gilt.

Die Geschwindigkeiten  $\mathbf{V}$  der Systeme I' sind dann durch

$$\frac{\mathbf{V}}{c} = \frac{\mathbf{B}}{B} \times \frac{\mathbf{E}}{B} + \alpha \sqrt{1 - \frac{E^2}{B^2}} \frac{\mathbf{B}}{B}, \quad -1 < \alpha < +1$$

<sup>65</sup>Siehe dazu Abschnitt 39 von Rindler, W.: Introduction to Special Relativity. Oxford University Press, Oxford 1991. – Der Leser zeige selbst, dass die Bedingung für  $\alpha$  aus der Forderung  $|\mathbf{V}| < c$  folgt.

<sup>66</sup>Die mitunter geäußerte Meinung, das magnetische Feld sei keine primäre Größe, sondern nur ein „Effekt“, der auftritt, wenn man sich relativ zu einem elektrischen Feld bewegt ist falsch. Wer nur den geade besprochenen Sonderfall kennt, mag dadurch zu dieser falschen Meinung verleitet sein.

gegeben.<sup>67</sup> Das Ereignis ist dabei wieder fest. Gilt  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  und  $B^2 > E^2$  für *alle* Ereignisse, so kann es möglich sein, dass man eine *Funktion*  $\alpha(\mathbf{r}, t)$  finden kann, deren Funktionswerte betragsmäßig kleiner als eins sind, sodass  $\mathbf{V}$  nicht von  $\mathbf{r}, t$  abhängt, also ein *bestimmtes* Inertialsystem  $I'$  mit  $\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') = \mathbf{0}, \forall \mathbf{r}', t'$ , existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn in  $I'$  rein magnetostatische Verhältnisse vorliegen (stationäre Stromverteilung, kein Strahlungsfeld).

### 1.12.4 Transformation der Kräfte. Lorentzkovarianz

Aus der relativistischen Mechanik ist bekannt, dass die Bewegungsgleichungen (1.50) dann und nur dann lorentzkovariant sind, wenn sich die auf die Ladungen  $q_a$  wirkenden „Dreierkräfte“  $\mathbf{K}_a$  für Systeme in Standardkonfiguration gemäß der **Standard-Lorentztransformation für die Kräfte**

$$K'_{a,x} = \frac{K_{a,x} - \frac{V(\mathbf{K}_a \cdot \mathbf{v}_a)}{c^2}}{1 - \frac{v_{a,x}V}{c^2}}, \quad (1.131)$$

$$K'_{a,y} = \frac{K_{a,y}}{\gamma(V)\left(1 - \frac{v_{a,x}V}{c^2}\right)}, \quad (1.132)$$

$$K'_{a,z} = \frac{K_{a,z}}{\gamma(V)\left(1 - \frac{v_{a,x}V}{c^2}\right)} \quad (1.133)$$

transformieren.

Wir zeigen nun, dass diese Beziehungen genau dann aus dem Transformationsgesetz (1.129) für die elektromagnetischen Feldstärken folgen, wenn man die Forminvarianz der „Dreier“-Lorentzkraft annimmt:

$$\mathbf{K}_a(t) = q_a \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}_a(t), t) + \frac{\mathbf{v}_a(t)}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_a(t), t) \right], \quad (1.134)$$

$$\mathbf{K}'_a(t') = q_a \left[ \mathbf{E}'(\mathbf{r}'_a(t'), t') + \frac{\mathbf{v}'_a(t')}{c} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}'_a(t'), t') \right]. \quad (1.135)$$

Dabei benötigen wir noch die aus der relativistischen Mechanik bekannte **Standard-**

<sup>67</sup>Siehe die Fußnote 65.

**Lorentztransformation für die Teilchengeschwindigkeiten:**

$$v'_{a,x} = \frac{v_{a,x} - V}{1 - \frac{v_{a,x}V}{c^2}}, \quad (1.136)$$

$$v'_{a,y} = \frac{v_{a,y}}{\gamma(V)\left(1 - \frac{v_{a,x}V}{c^2}\right)}, \quad (1.137)$$

$$v'_{a,z} = \frac{v_{a,z}}{\gamma(V)\left(1 - \frac{v_{a,x}V}{c^2}\right)}. \quad (1.138)$$

Wir führen die Rechnung wieder nur für eine Komponente durch. Den Teilchenindex lassen wir dabei zur Vereinfachung der Schreibweise vorübergehend weg. Mit

$$\begin{aligned} K'_x &= q\left[E'_x + \frac{v'_y}{c}B'_z - \frac{v'_z}{c}B'_y\right] \\ &= q\left[E_x + \frac{v_y}{c}\gamma(V)(B_z - \frac{V}{c}E_y) - \frac{v_z}{c}\gamma(V)(B_y + \frac{V}{c}E_z)\right] \\ &= \frac{q}{1 - \frac{v_xV}{c^2}} \left[ \underbrace{E_x + \frac{v_y}{c}B_z - \frac{v_z}{c}B_y}_{\frac{1}{q}K_x} - \frac{V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})}{c^2} \right] \\ &= \frac{q}{1 - \frac{v_xV}{c^2}} \left[ \frac{1}{q}K_x - \frac{1}{q} \frac{V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{K})}{c^2} \right] \end{aligned}$$

erhalten wir das gewünschte Resultat

$$K'_x = \frac{K_x - \frac{V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{K})}{c^2}}{1 - \frac{v_xV}{c^2}}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Maxwell-Lorentz-Theorie bei geeigneter Transformation der elektromagnetischen Feldstärken lorentzkovariant ist. Nachdem wir für die Felder das entsprechende Transformationsgesetz postuliert haben, stellt die **Maxwell-Lorentz-Theorie** eine **lorentzkovariante Theorie** dar.

Da sich die „Dreier“-Lorentzkraft (1.134) gemäß Gl. (1.131) bis (1.133) transformiert, ist

$$\underline{\mathcal{K}}_a: \quad \mathcal{K}_a^\mu = \gamma(v_a) \left( \frac{\mathbf{K}_a \cdot \mathbf{v}_a}{c}, \mathbf{K}_a \right) \quad (1.139)$$

ein Vierervektor. Dieser Vierervektor heißt **Vierer-Lorentzkraft**.



Eine offensichtlich lorentzkovariante Formulierung des *Kraftgesetzes* ist nur mithilfe des Feldtensors, eines Vierertensors zweiter Stufe möglich (s. Abschnitt 1.12.5). Dagegen lassen sich die *Bewegungsgleichungen* (1.50) unter Verwendung der Vierer-Lorentzkraft *offensichtlich lorentzkovariant* anschreiben:

$$m_a \underline{\beta}_a = \underline{\mathcal{K}}_a, \quad a = 1, 2, \dots, N. \quad (1.140)$$

Dabei ist  $\underline{\beta}_a$  die Viererbeschleunigung der Ladung  $q_a$ , d. h. es gilt

$$\underline{\beta}_a: \quad I: \quad (\beta_a^\mu) = \left( \frac{d\nu_a^\mu}{d\tau_a} \right) = \left( \frac{d^2 x_a^\mu}{d\tau_a^2} \right). \quad (1.141)$$

### 1.12.5 Offensichtlich lorentzkovariante Formulierung. Feldtensor

Um zu zeigen, wie „schön“ Naturgesetze aussehen, wenn man für ihre Formulierung die adäquaten mathematischen Begriffe benützt, schreiben wir noch die offensichtlich lorentzkovariante Formulierung der Maxwell-Lorentz-Theorie an, und zwar unter Verwendung des „vorläufigen“ Kraftgesetzes und der „vorläufigen“ Bewegungsgleichungen. Die Grundgleichungen sind also mit Gl. (1.45) bis (1.50) zu vergleichen.

Definiert man durch

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1.142)$$

die *kontravarianten Komponenten* des **elektromagnetischen Feldtensors**<sup>68</sup>, so gilt

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.143)$$

Die Beziehung (1.142) stellt die offensichtlich lorentzkovariante Formulierung der Beziehungen (1.125), (1.126) dar.

Im Feldtensor sind die Komponenten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  in einer Entität vereint, entsprechend der physikalischen Tatsache, dass der fundamentale Begriff das *elektromagnetische Feld* ist.<sup>69</sup>

Um die Grundgesetze anschreiben zu können, benötigen wir noch die *kovarianten Komponenten* des Vierergradientenoperators, der Vierergeschwindigkeiten der Teilchen und des Feldtensors. Diese Komponenten erhält man aus den entsprechenden kontravarianten Komponenten, indem man die Indizes durch Überschieben mit den kovarianten Komponenten des Metriktensors „herunterzieht“. Die kovarianten Komponenten des Metriktensors kann man der metrischen Fundamentalform des Minkowskiraumes entnehmen. Aus

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

<sup>68</sup>Eigentlich handelt es sich um ein *Tensorfeld*, aber man sagt *Feldtensor*. Gebräuchlich ist auch *Feldstärketensor*.

<sup>69</sup>Im gaußschen Maßsystem besitzen die Komponenten der elektrischen und der magnetischen Feldstärke „von vornherein“ gleiche Dimension. Der Theoretiker zieht deshalb das gaußsche Maßsystem aus begrifflichen Gründen dem SI-Einheitensystem vor. Im SI-Einheitensystem stehen im Feldtensor die Komponenten von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{E}/c$ .

folgt  $g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$  und  $g_{\mu\nu} = 0$  für  $\mu \neq \nu$ . Mit den Formeln

$$\partial_\mu = g_{\mu\alpha} \partial^\alpha, \quad v_{a,\mu} = g_{\mu\alpha} v_a^\alpha, \quad F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}$$

und mit Gl. (1.114), (1.100) bzw. Gl. (1.143) ergibt sich dann<sup>70</sup>

$$(v_{a,\mu}) = \gamma(v_a)(c, -\mathbf{v}_a), \quad (\partial_\mu) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (1.144)$$

und

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.145)$$

Die einzige zusätzliche Größe, die wir noch benötigen, ist der total antisymmetrische Einheitstensor vierter Stufe. Die kontravarianten Komponenten dieses Vierertensors sind definiert durch

$$\epsilon^{\sigma\lambda\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\sigma, \lambda, \mu, \nu) \text{ gerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ -1 & \text{falls } (\sigma, \lambda, \mu, \nu) \text{ ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ 0 & \text{falls zwei oder mehr Indizes gleich} \end{cases}$$

Die Grundgleichungen können dann in der folgenden Form angeschrieben werden:

<b>Grundgleichungen der Maxwell-Lorentz-Theorie in Viererschreibweise („vorläufig“)</b>	
<i>Feldgleichungen: Maxwellgleichungen</i>	
$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu,$	(1.146)
$\epsilon^{\sigma\lambda\mu\nu} \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0;$	(1.147)
<i>Kraftgesetz („vorläufig“): Lorentzkraft</i>	
$\mathcal{K}_a^\mu = \frac{q_a}{c} F^{\mu\lambda} v_{a,\lambda};$	(1.148)
<i>Bewegungsgleichungen („vorläufig“):</i>	
$m_a \beta_a^\mu = \mathcal{K}_a^\mu, \quad a = 1, 2, \dots, N.$	(1.149)

Auf Seite 16 wurde festgestellt, dass es für das Verständnis der Feldgleichungen besser wäre, die Verkettungsterme („Induktionsterme“) auf die „linken“ Gleichungsseiten zu nehmen. In der offensichtlich lorentzkovarianten Formulierung der Feldgleichungen erledigt dies der Formalismus für uns. Was das Kraftgesetz betrifft, so stellt die Beziehung (1.148) die offensichtlich

<sup>70</sup>Vierergeschwindigkeit für die Ladung  $q_a$  angeschrieben.

kovariante Formulierung der Beziehung (1.134) dar. In den Bewegungsgleichungen könnte man auf den „linken“ Seiten anstelle von  $m_a \beta_a^\mu$  auch  $dp_a^\mu/d\tau_a$  schreiben.

Aus den Komponenten eines antisymmetrischen Vierertensorfeldes zweiter Stufe kann man nur zwei Viererskalarfelder bilden. Beim Feldtensor sind diese Viererskalarfelder durch

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) = 2I_2, \quad (1.150)$$

$$\epsilon^{\sigma\lambda\mu\nu}F_{\sigma\lambda}F_{\mu\nu} = -2\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = -2I_1 \quad (1.151)$$

gegeben. Somit sind  $I_1, I_2$  die *einzig*en Feldskalare des elektromagnetischen Feldes.

## 1.13 Grundaufgaben der Elektrodynamik

In Abschnitt 1.10 wurde begründet, warum sich das logische Schema von Abb. 1.7 nicht auf strenge Weise durch ein einfacheres Schema ersetzen lässt, und daher bei exakter Behandlung der mikroskopischen Elektrodynamik der gesamte Komplex der gekoppelten Teilchen-Feld-Gleichungen (1.45) bis (1.50) berücksichtigt werden muss.

Ein Beispiel für ein System mit sehr starken „inneren“ Wechselwirkungen stellt ein hochgradig ionisiertes Gas<sup>71</sup> dar, das aus dicht benachbarten, frei beweglichen Ladungen (Ionen und Elektronen) besteht. In einem solchen System muss der gesamte Komplex der gekoppelten Gleichungen berücksichtigt werden.

In Abschnitt 1.10 wurde auch schon erwähnt, dass eine Vereinfachung *näherungsweise* möglich ist, wenn bei einem nichtabgeschlossenen System die „inneren“ Wechselwirkungen, d. h. die elektromagnetischen Wechselwirkungen zwischen den Teilchen, gegenüber den äußeren elektromagnetischen Kräften vernachlässigt werden können. Man kann dann das logische Schema näherungsweise an einer Stelle durchtrennen, und gelangt zu drei unabhängigen Teilaufgaben. Diese lassen sich mithilfe von wohl formulierbaren Teiltheorien behandeln, welche eindeutig bestimmte Lösungen besitzen.

Ein Beispiel für ein System mit vernachlässigbaren „inneren“ Wechselwirkungen ist ein „Schwarm“ elektrisch geladener Teilchen in einem Beschleuniger. Die Teilchendichte im „Schwarm“ ist dabei so gering, dass die elektromagnetischen Wechselwirkungen der Teilchen gegen die äußeren Kräfte vernachlässigt werden können. In Linearbeschleunigern kann überdies stets die Selbstkraft vernachlässigt werden, in Kreisbeschleunigern ist dies für ultrarelativistische Elektronen nicht mehr der Fall.

Vernachlässigbarkeit der „inneren“ Wechselwirkungen eines nichtabgeschlossenen Systems bedeutet, dass man für jede der  $N$  Ladungen  $q_a$ ,  $a = 1, 2, \dots, N$ , eine mit den Bewegungsgleichungen der übrigen Ladungen nicht gekoppelte Bewegungsgleichung erhält, d. h. man gelangt zu  $N$  unabhängigen *Einteilchenproblemen*. Für jedes dieser getrennten Einteilchenprobleme gilt das logische Schema von Abb. 1.9.

<sup>71</sup>Ein solches Gas wird als *Plasma* bezeichnet.

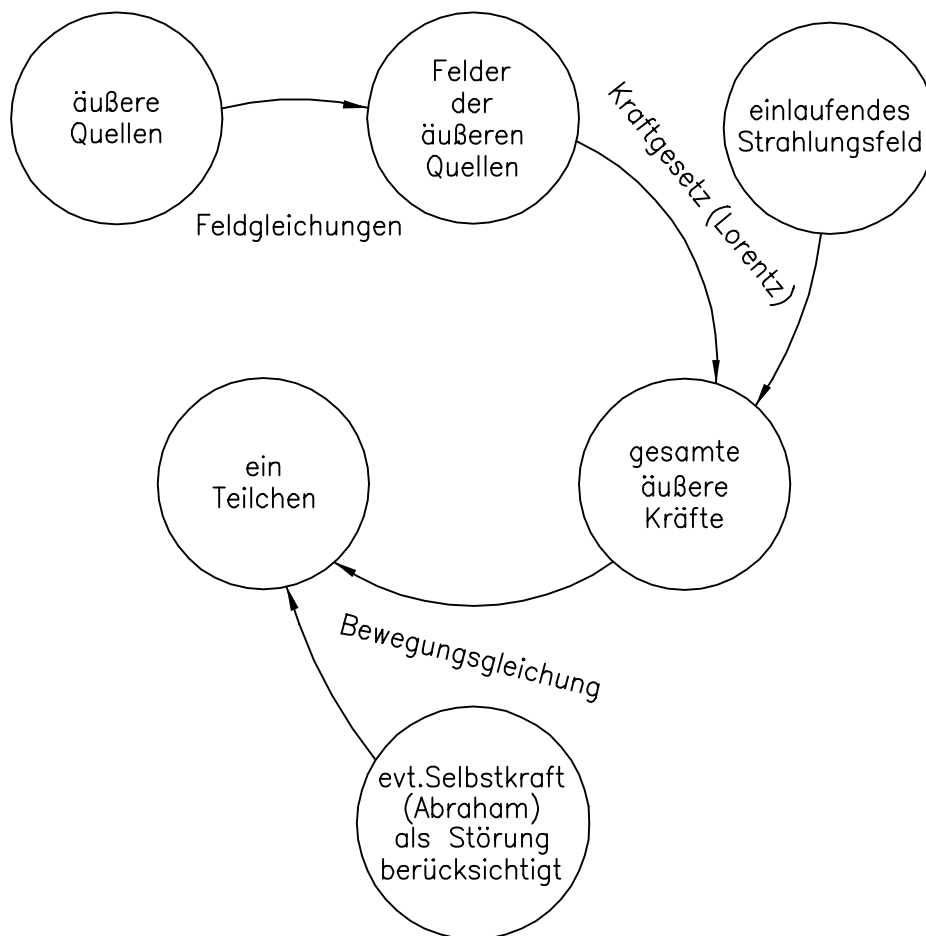


Abbildung 1.9: Logisches Schema der Maxwell-Lorentz-Theorie bei Vernachlässigung der Wechselwirkungen der Systemladungen

Dabei gilt für die *gesamte äußere Kraft* auf die betrachtete Punktladung<sup>72</sup>

$$\mathbf{K}^{(\text{ex,g})}(t) = q \left[ \mathbf{E}^{(\text{ex,g})}(\mathbf{r}(t), t) + \frac{\mathbf{v}(t)}{c} \times \mathbf{B}^{(\text{ex,g})}(\mathbf{r}(t), t) \right] \quad (1.152)$$

mit

$$\mathbf{E}^{(\text{ex,g})}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{E}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(\text{ein})}(\mathbf{r}, t), \quad (1.153)$$

$$\mathbf{B}^{(\text{ex,g})}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{B}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}^{(\text{ein})}(\mathbf{r}, t). \quad (1.154)$$

Ist der Einfluss des Eigenfeldes auf die Punktladung nicht vernachlässigbar, so kann er durch Einbeziehen der abrahamschen Strahlungsrückwirkungskraft  $\mathbf{K}^{(\text{rad})}(t)$  von Gl. (1.330) berücksichtigt werden. Die Gesamtkraft auf die Ladung ist dann durch

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}^{(\text{ex,g})}(t) + \mathbf{K}^{(\text{rad})}(t) \quad (1.155)$$

<sup>72</sup>Wir lassen den Teilchenindex dieser Punktladung im Folgenden weg.

gegeben. Wegen der auf Seite 26 besprochenen Schwierigkeiten ist die Berücksichtigung der Selbstkraft ohne Abänderung der Bewegungsgleichung allerdings nur näherungsweise (als so genannte „Störung“) möglich.

Das Schema von Abb. 1.9 enthält drei getrennt lösbare *Teilaufgaben*, von denen die ersten beiden auch im Rahmen des komplexeren Schemas von Abb. 1.7 eine Rolle spielen. Diese Teilaufgaben bezeichnen wir wegen ihrer praktischen Wichtigkeit als **Grundaufgaben der Elektrodynamik**.

### 1. Grundaufgabe:

*Berechnung des elektromagnetischen Feldes einer vorgegebenen Quellverteilung*  
(Maxwelltheorie im engeren Sinn)

Sind die Quellen punktförmig, so hat man für  $\rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  mathematische Ausdrücke der Form (1.3), (1.4) mit *vorgegebenen* Funktionen<sup>73</sup>  $\mathbf{r}_b(t)$ . Die Kontinuitätsgleichung (1.9) ist dann automatisch erfüllt. Meist werden aber im Zusammenhang mit der ersten Grundaufgabe *kontinuierliche* („makroskopische“) *Quelldichten* eingesetzt. Man darf dann die vier Funktionen  $\rho$ ,  $j_x$ ,  $j_y$ ,  $j_z$  nicht unabhängig vorgeben, da die Kontinuitätsgleichung Integritätsbedingung der Maxwellgleichungen ist.

Wie wir bereits auf Seite 16 besprochen haben, besitzen die Maxwellgleichungen (1.11) bis (1.14) bei vorgegebenen Quelldichten  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  noch nichtabzählbar unendlich viele Lösungen für die Feldstärken  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ . Um eine *abgeschlossene Theorie* zu erhalten, muss ein zusätzliches Postulat in Form einer *räumlich asymptotischen Bedingung* eingeführt werden, welches die Lösung der 1. Grundaufgabe eindeutig festlegt. Dieses Zusatzpostulat führt dann auf die so genannten *retardierten Felder*. Die Abbildung 1.10 zeigt das logische Schema der 1. Grundaufgabe.

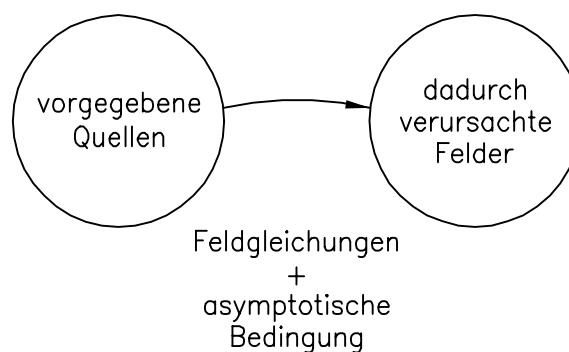


Abbildung 1.10: Logisches Schema der 1. Grundaufgabe (Maxwelltheorie)

Die 1. Grundaufgabe spielt eine Rolle bei der Berechnung der Felder (der äußeren Quellen) im Schema von Abb. 1.9 bzw. des Feldanteils  $\mathbf{E}^{(\text{ex})}$ ,  $\mathbf{B}^{(\text{ex})}$  von  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  im Schema von Abb. 1.7. Wir werden uns mit ihr in den Abschnitten 1.15, 1.16 befassen.

<sup>73</sup>Punktladungen „zwangsweise herumgeführt“.

## 2. Grundaufgabe:

### *Ausbreitung elektromagnetischer Wellen*

In hinreichend großem Abstand von räumlich lokalisierten zeitabhängigen Quellverteilungen liegen praktisch nur mehr so genannte *elektromagnetische Strahlungsfelder* (elektromagnetische Wellenfelder) vor, deren Ausbreitung durch die *homogenen Maxwellgleichungen* (Maxwellgleichungen mit  $\rho(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}$ ) beschrieben wird.

Die 2. Grundaufgabe spielt eine Rolle bei der Beschreibung der Ausbreitung *einlaufender Strahlungsfelder* im Schema von Abb. 1.9 bzw. von Abb. 1.7, aber auch bei der Beschreibung des Verhaltens der Felder vorgegebener räumlich lokalisierter Quellen (1. Grundaufgabe, also inhomogene Maxwellgleichungen) in großen Entfernungen von den Quellen (*ausgestrahlte elektromagnetische Wellen*) und bei der Beschreibung der Ausbreitung der gesamten *auslaufenden Strahlungsfelder* (s. dazu Seite 70). Wir befassen uns mit diesen Feldern in den Abschnitten 1.16 und 1.17.

## 3. Grundaufgabe:

### *Bewegung einer Punktladung in einem vorgegebenen elektromagnetischen Feld*

Abbildung 1.11 zeigt das logische Schema der 3. Grundaufgabe. Die 3. Grundaufgabe spielt eine Rolle als dritte Teilaufgabe im Rahmen des Schemas von Abb. 1.9, sie setzt dann die vorherige Lösung der 1. Grundaufgabe (Berechnung von  $\mathbf{E}^{(\text{ex})}$ ,  $\mathbf{B}^{(\text{ex})}$ ) und (oder) der 2. Grundaufgabe (Berechnung der raumzeitlichen Entwicklung von  $\mathbf{E}^{(\text{ein})}$ ,  $\mathbf{B}^{(\text{ein})}$ ) voraus.

## 1.14 Bewegung einer Punktladung in einem vorgegebenen Feld

Wir behandeln in diesem Abschnitt die **3. Grundaufgabe**, vernachlässigen dabei aber die Strahlungsrückwirkungskraft. Wie bereits erwähnt, kann die Selbstkraft wegen der auf Seite 26 besprochenen Schwierigkeiten ohne Abänderung der Bewegungsgleichung nur näherungsweise (als „Störung“) berücksichtigt werden. Die Berücksichtigung der Selbstkraft in der Bewegungsgleichung, d. h. bei der Berechnung von  $\mathbf{r}(t)$ , ist nur dann nötig, wenn das geladene Teilchen während der Dauer des Experimentes eine Geschwindigkeit mit einem Betrag nahe an  $c$  erreicht *und* seinen Bewegungszustand in Zeitintervallen der Größenordnung  $\Delta\tau := 2q^2/3mc^3$ , d. h. auf Strecken der Größenordnung  $c\Delta\tau$  merklich ändert (s. dazu Abschnitt 1.18). Da  $\Delta\tau$  umgekehrt proportional zur Teilchenmasse ist, spielt die Strahlungsrückwirkungskraft am ehesten für Elektronen eine Rolle. Für das Elektron ist aber  $\Delta\tau_e \approx 6 \cdot 10^{-24}$  s,  $c\Delta\tau_e \approx 2 \cdot 10^{-13}$  cm. Die Strahlungsrückwirkungskraft muss also nur im Fall eines ultrarelativistischen Elektrons, dessen Bewegungszustand

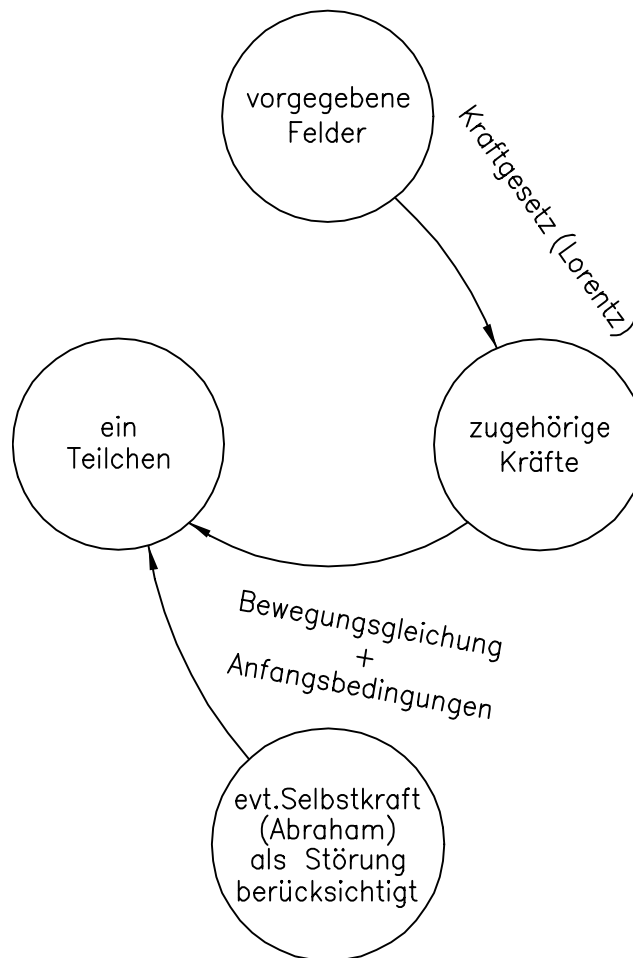


Abbildung 1.11: Logisches Schema der 3. Grundaufgabe

sich auf Strecken von der Länge eines Atomkerndurchmessers merklich ändert, in der Bewegungsgleichung berücksichtigt werden. Praktisch bedeutet dies, dass in *Linearbeschleunigern*  $\mathbf{K}^{(\text{rad})}$  für beliebige Teilchen bei der Berechnung der Bahnbewegung vernachlässigt werden kann.<sup>74</sup> Bei *Kreisbeschleunigern* dagegen werden die Strahlungsverluste für ultrarelativistische Elektronen so groß, dass schließlich die gesamte dem Elektron pro Umlauf zugeführte Energie während des Umlaufes durch Ausstrahlung verloren geht.

Ein Beispiel für das Anwachsen der Strahlungsverluste in einem Kreisbeschleuniger: Beim Cornell Elektron-Synchrotron (Bahnradius ungefähr 100 m) treten bei der jeweiligen angegebenen

<sup>74</sup>Für Elektronen ist der Energiezuwachs nicht größer als 10 MeV/m, die Strahlungsrückwirkungskraft müsste erst für einen Energiezuwachs von rund  $10^{14}$  MeV/m berücksichtigt werden.

kinetischen Energie  $T$  pro Umlauf die folgenden Strahlungsverluste  $\Delta E^{(\text{rad})}$  auf:

$T$	$\frac{v}{c} \cdot 100\%$	$\Delta E^{(\text{rad})}$
300 MeV = $3 \cdot 10^8$ eV	99,99986	$10^2$ eV
1 GeV = $10^9$ eV	99,999987	$3 \cdot 10^4$ eV
2 GeV = $2 \cdot 10^9$ eV	99,999997	$2,4 \cdot 10^5$ eV
10 GeV = $10^{10}$ eV	99,99999987	$0,9 \cdot 10^7$ eV

**Bewegungsgleichung** und **Arbeitssatz** lauten bei Vernachlässigung der Strahlungsrückwirkungskraft folgendermaßen (s. Gl. (1.152) bis (1.154)):

*Bewegungsgleichung:*

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}} = q \left[ \mathbf{E}^{(\text{ex,g})}(\mathbf{r}(t), t) + \frac{\mathbf{v}(t)}{c} \times \mathbf{B}^{(\text{ex,g})}(\mathbf{r}(t), t) \right]; \quad (1.156)$$

*Arbeitssatz:*

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}} = q \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{E}^{(\text{ex,g})}(\mathbf{r}(t), t). \quad (1.157)$$

Dabei sind Teilchenimpuls und Teilchenenergie (Ruhenergie plus kinetische Energie) durch

$$\mathbf{p}(t) = \frac{m\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}}, \quad E(t) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}} \quad (1.158)$$

gegeben. Wie man durch Anwenden der Produktregel der Differentiation auf der „linken“ Seite von Gl. (1.156) und Einsetzen von Gl. (1.157) leicht zeigen kann, lässt sich die Bewegungsgleichung auch in der folgenden Form

$$m\mathbf{b}(t) = q \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \left[ \mathbf{E}^{(\text{ex,g})}(\mathbf{r}(t), t) + \frac{\mathbf{v}(t)}{c} \times \mathbf{B}^{(\text{ex,g})}(\mathbf{r}(t), t) - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{E}^{(\text{ex,g})}(\mathbf{r}(t), t)}{c^2} \mathbf{v}(t) \right] \quad (1.159)$$

schreiben. Beachte: Die Gleichungen (1.156) und (1.159) sind zueinander *äquivalent*, während Gl. (1.157) eine *Folge* von Gl. (1.156) bzw. von Gl. (1.159) ist.

Im momentanen inertialen Ruhesystem  $\tilde{\mathbf{I}}$  gilt  $\tilde{\mathbf{v}}(\tilde{t}) = \mathbf{0}$  und damit  $m\tilde{\mathbf{b}}(\tilde{t}) = \tilde{\mathbf{K}}^{(\text{ex,g})}(\tilde{t})$ . Kraft und Beschleunigung sind proportional, und der Proportionalitätsfaktor wird entsprechend als Ruhmasse des Teilchens bezeichnet. In einem Inertialsystem  $\mathbf{I}$  hingegen,



in dem das Teilchen zum betrachteten Zeitpunkt eine von null verschiedene Geschwindigkeit besitzt, sind Kraft und Beschleunigung im Allgemeinen *nicht* proportional.<sup>75</sup> Will man also die ursprüngliche physikalische Bedeutung des Begriffes der trägen Masse nicht aufgeben, so kann man einem Teilchen neben der Ruhmasse kein weiteres Masseattribut („bewegte Masse“, „relativistische Masse“) zuordnen. Führt man durch

$$m_{\text{rel}}(t) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}}$$

eine „relativistische Masse“ ein, so lässt man damit die ursprüngliche Bedeutung des Begriffes Masse fallen und lässt den Massebegriff im Energiebegriff aufgehen.<sup>76</sup>

Die Bewegungsgleichung (1.156) bzw. (1.159) besitzt für vorgegebenes  $\mathbf{r}(t_0)$ ,  $\mathbf{v}(t_0)$  eine *eindeutig bestimmte Lösung*. Sie ist aber für inhomogene zeitabhängige Felder mathematisch so kompliziert, dass sie sich nur numerisch lösen lässt. Wichtige Anwendungsgebiete sind die Physik der Teilchenbeschleuniger, die Elektronenoptik und die Geophysik (Bahnen geladener Teilchen im Magnetfeld der Erde).

Für *homogene statische Felder*<sup>77</sup> lauten die Gleichungen (1.156) und (1.157):

*Bewegungsgleichung:*

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}} = q[\mathbf{E}^{(\text{ex})} + \frac{\mathbf{v}(t)}{c} \times \mathbf{B}^{(\text{ex})}]; \quad (1.160)$$

*Arbeitssatz:*

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}} = q\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{E}^{(\text{ex})}; \quad (1.161)$$

*Bewegungsgleichung* (alternative Form):

$$m\mathbf{b}(t) = q\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \left[ \mathbf{E}^{(\text{ex})} + \frac{\mathbf{v}(t)}{c} \times \mathbf{B}^{(\text{ex})} - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{E}^{(\text{ex})}}{c^2} \mathbf{v}(t) \right]. \quad (1.162)$$

Mit einem mathematisch einfachen Problem hat man es immer noch nicht zu tun, da es sich um ein *gekoppeltes nichtlineares Simultansystem* von drei Differentialgleichungen für die Funktionen  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  handelt. Macht man von dem in Abschnitt 1.12.3 besprochenen Transformationsverhalten der elektromagnetischen Feldstärken bei einem Wechsel des Inertialsystems und den Feldskalaren von Gl. (1.130) Gebrauch, so kann man sich das Leben allerdings erheblich erleichtern. Ist die Bewegungsgleichung im Inertialsystem I „kompliziert“, so transformiert man sie auf ein Inertialsystem I', in welchem sie „einfach“

<sup>75</sup>Die Beschleunigung besitzt somit im Allgemeinen eine *andere Richtung* als die Kraft.

<sup>76</sup>Die meisten neueren Lehrbücher und Monographien über Relativitätstheorie verwenden deshalb das Wort Masse nur mehr im Sinne von Ruhmasse.

<sup>77</sup>Das elektromagnetische Feld der äußeren Quellen ist dann das *gesamte* äußere Feld, da Strahlungsfelder immer zeit- und ortsabhängig sind.

ist, löst sie in diesem Inertialsystem mit den transformierten Anfangsbedingungen und transformiert die gefundene Bahnkurve auf das ursprüngliche Inertialsystem I zurück. – Es gibt folgende Möglichkeiten:

- 1) Im Inertialsystem I gilt  $\mathbf{B}^{(\text{ex})} = \mathbf{0}$  oder  $\mathbf{E}^{(\text{ex})} = \mathbf{0}$ .
- 2) Im Inertialsystem I gilt  $\mathbf{E}^{(\text{ex})} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B}^{(\text{ex})} \neq \mathbf{0}, \mathbf{E}^{(\text{ex})} \perp \mathbf{B}^{(\text{ex})}, (\mathbf{E}^{(\text{ex})})^2 > (\mathbf{B}^{(\text{ex})})^2$ .  
Dann existiert ein Inertialsystem I' mit  $\mathbf{B}^{(\text{ex})'} = \mathbf{0}$ .
- 3) Im Inertialsystem I gilt  $\mathbf{E}^{(\text{ex})} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B}^{(\text{ex})} \neq \mathbf{0}, \mathbf{E}^{(\text{ex})} \perp \mathbf{B}^{(\text{ex})}, (\mathbf{E}^{(\text{ex})})^2 < (\mathbf{B}^{(\text{ex})})^2$ .  
Dann existiert ein Inertialsystem I' mit  $\mathbf{E}^{(\text{ex})'} = \mathbf{0}$ .
- 4) Im Inertialsystem I gilt  $\mathbf{E}^{(\text{ex})} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B}^{(\text{ex})} \neq \mathbf{0}, \mathbf{E}^{(\text{ex})} \perp \mathbf{B}^{(\text{ex})}, |\mathbf{E}^{(\text{ex})}| = |\mathbf{B}^{(\text{ex})}|$ .
- 5) Im Inertialsystem I gilt  $\mathbf{E}^{(\text{ex})} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B}^{(\text{ex})} \neq \mathbf{0}, \mathbf{E}^{(\text{ex})} \parallel \mathbf{B}^{(\text{ex})}$ .
- 6) Im Inertialsystem I gilt  $\mathbf{E}^{(\text{ex})} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B}^{(\text{ex})} \neq \mathbf{0}$ , wobei  $\mathbf{E}^{(\text{ex})}, \mathbf{B}^{(\text{ex})}$  *nicht* zueinander senkrecht, aber auch *nicht* parallel sind. Dann existiert ein Inertialsystem I' mit  $\mathbf{E}^{(\text{ex})'} \parallel \mathbf{B}^{(\text{ex})'}$ .

Die Bewegungsgleichung muss daher im Prinzip nur für folgende vier Fälle gelöst werden:

- Fall 1: Teilchen im elektrischen Feld.
- Fall 2: Teilchen im Magnetfeld.
- Fall 3: Teilchen in „gekreuzten“ Feldern mit gleichem Betrag.
- Fall 4: Teilchen in parallelen Feldern.

Die Lösung lässt sich für alle vier Fälle mit elementaren mathematischen Hilfsmitteln finden.<sup>78</sup> Wir werden in den folgenden Unterabschnitten nur die Fälle 1 und 2 behandeln, wobei wir uns auf eine qualitative Diskussion beschränken, da die zugehörigen Rechnungen aus der Grundlagenphysik bekannt sind.

### 1.14.1 Bewegung in einem homogenen elektrostatischen Feld

Die Gleichungen (1.160) bis (1.162) lauten in diesem Fall:

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}} = q\mathbf{E}^{(\text{ex})}, \quad (1.163)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}} = q\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{E}^{(\text{ex})} \quad (1.164)$$

und

<sup>78</sup>Siehe § 20, § 21 und § 22 von Landau, L. D., und E. M. Lifschitz: Klassische Feldtheorie. Bd. II des Lehrbuches der Theoretischen Physik. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 2009.

$$m\mathbf{b}(t) = q\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \left[ \mathbf{E}^{(\text{ex})} - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{E}^{(\text{ex})}}{c^2} \mathbf{v}(t) \right]. \quad (1.165)$$

Als Anfangszeitpunkt wählen wir  $t_0 = 0$ . Zur Bewegungsgleichung sind dann Anfangsbedingungen  $\mathbf{r}(0)$ ,  $\mathbf{v}(0)$  vorzugeben.

**Fall 1:**  $\mathbf{v}(0) \parallel \mathbf{E}^{(\text{ex})}$

Gilt  $\mathbf{v}(0) \parallel \mathbf{E}^{(\text{ex})}$ , so folgt aus Gl. (1.165)  $\mathbf{b}(0) \parallel \mathbf{E}^{(\text{ex})}$ . Wegen  $\mathbf{v}(dt) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{b}(0)dt$  folgt weiter  $\mathbf{v}(dt) \parallel \mathbf{E}^{(\text{ex})}$  usf. Teilchengeschwindigkeit und Teilchenbeschleunigung besitzen also zu allen Zeiten  $t > 0$  die Richtung von  $\mathbf{E}^{(\text{ex})}$ , d. h. die Richtung der Kraft. Es handelt sich um eine *geradlinig beschleunigte Bewegung* in Feldrichtung (longitudinales Feld – Prinzip des Linearbeschleunigers). Siehe dazu die Aufgabe E4.

Wegen  $\mathbf{v}(t) \parallel \mathbf{E}^{(\text{ex})}$  gilt im longitudinalen Feld

$$\frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{E}^{(\text{ex})}}{c^2} \mathbf{v}(t) = \frac{v^2(t)}{c^2} \mathbf{E}^{(\text{ex})},$$

also

$$\frac{m}{\left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{3/2}} \mathbf{b}(t) = q\mathbf{E}^{(\text{ex})} = \mathbf{K}^{(\text{ex})}.$$

Der Proportionalitätsfaktor zwischen Kraft und Beschleunigung in dieser Beziehung wurde in der „Urzeit“ der Relativitätstheorie als *longitudinale Masse* bezeichnet.

**Fall 2:**  $\mathbf{v}(0) \nparallel \mathbf{E}^{(\text{ex})}$

In diesem Fall spannen  $\mathbf{v}(0)$  und  $\mathbf{E}^{(\text{ex})}$  eine Ebene auf (s. Abb. 1.12). Die Anfangsbeschleunigung  $\mathbf{b}(0)$  ist dann nach Gl. (1.165) nicht parallel zu  $\mathbf{E}^{(\text{ex})}$ , liegt jedoch in der Ebene von  $\mathbf{v}(0)$  und  $\mathbf{E}^{(\text{ex})}$ . Damit sind auch  $\mathbf{v}(dt) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{b}(0)dt$  und  $\mathbf{b}(dt)$  in dieser Ebene usf. Teilchengeschwindigkeit und Teilchenbeschleunigung liegen also zu allen Zeiten  $t > 0$  in der von  $\mathbf{v}(0)$  und  $\mathbf{E}^{(\text{ex})}$  aufgespannten Ebene, wobei die Beschleunigung zu allen Zeiten eine andere Richtung besitzt als die Kraft. Es handelt sich um eine beschleunigte Bewegung längs einer gekrümmten ebenen Bahn. Löst man die Bewegungsgleichung<sup>79</sup>, so ergibt sich als Bahnkurve eine *Kettenlinie* (Seilkurve, Hyperbelfunktion, Katenoide). Im nichtrelativistischen Grenzfall (Newtongleichung mit Lorentzkraft) kann die Kettenlinie durch eine Parabel ersetzt werden.

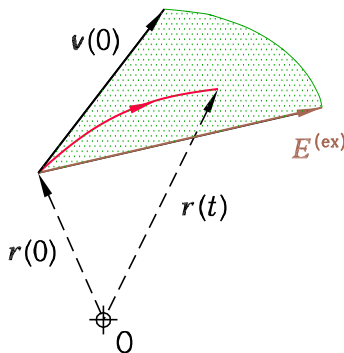


Abbildung 1.12: Bewegung einer Punktladung in einem homogenen elektrostatischen Feld (Zeichnung für  $q > 0$ )

<sup>79</sup>Für die Rechnung legt man die  $x$ -Achse zweckmäßigerweise in Feldrichtung und wählt  $\mathbf{r}(0) = (x(0), y(0), 0)$ ,  $\mathbf{v}(0) = (v_x(0), v_y(0), 0)$ . Die Teilchenbahn verläuft dann in der  $xy$ -Ebene.

Im Spezialfall  $\mathbf{v}(0) \perp \mathbf{E}^{(\text{ex})}$  spricht man gelegentlich von einem „transversalen Feld“, obwohl die Bewegung nur zu einem einzigen Zeitpunkt, nämlich für  $t = 0$ , senkrecht zur Feldrichtung erfolgt. Zu diesem Zeitpunkt gilt nach Gl. (1.165)

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2(0)}{c^2}}} \mathbf{b}(0) = q\mathbf{E}^{(\text{ex})} = \mathbf{K}^{(\text{ex})}.$$

Der Proportionalitätsfaktor zwischen Kraft und Anfangsbeschleunigung in dieser Beziehung wurde in der „Urzeit“ der Relativitätstheorie als *transversale Masse* bezeichnet.

### 1.14.2 Bewegung in einem homogenen magnetostatischen Feld

Die Gleichungen (1.160) bis (1.162) lauten in diesem Fall:

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}} = q \left[ \frac{\mathbf{v}(t)}{c} \times \mathbf{B}^{(\text{ex})} \right], \quad (1.166)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}} = 0 \quad (1.167)$$

und

$$m\mathbf{b}(t) = q\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \left[ \frac{\mathbf{v}(t)}{c} \times \mathbf{B}^{(\text{ex})} \right]. \quad (1.168)$$

Für ein Teilchen in einem reinen Magnetfeld sind Kraft und Beschleunigung stets proportional, wobei der Proportionalitätsfaktor die (von uns nicht benützte) „relativistische Masse“ ist.

Die magnetische Kraft leistet an der Punktladung keine Arbeit, da sie zur jeweiligen Momentangeschwindigkeit orthogonal ist. (Siehe den Arbeitssatz (1.167).) Teilchenenergie und Betrag der Teilchengeschwindigkeit sind daher zeitlich konstant. Mit

$$|\mathbf{v}(t)| = v(t) = v(0) =: v \quad (1.169)$$

folgt aus Gl. (1.168)

$$\mathbf{b}(t) = \frac{q\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{mc} \left[ \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}^{(\text{ex})} \right]. \quad (1.170)$$

Der einzige Unterschied gegenüber dem nichtrelativistischen Fall (Newtongleichung mit Lorentzkraft) ist das Auftreten des Wurzelausdruckes. Man erhält daher dieselbe Art der Bewegung wie im nichtrelativistischen Fall.

**Fall 1:**  $\mathbf{v}(0) \parallel \mathbf{B}^{(\text{ex})}$

Gilt  $\mathbf{v}(0) \parallel \mathbf{B}^{(\text{ex})}$ , so folgt aus Gl. (1.170)  $\mathbf{b}(0) = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{v}(dt) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{b}(0)dt = \mathbf{v}(0)$  usf. Man hat es also mit einer *gleichförmig geradlinigen Bewegung* in Feldrichtung zu tun (longitudinales Feld).

**Fall 2:**  $\mathbf{v}(0) \perp \mathbf{B}^{(\text{ex})}$

### 1.14 Bewegung einer Punktladung in einem vorgegebenen Feld

Gilt  $\mathbf{v}(0) \perp \mathbf{B}^{(\text{ex})}$ , so folgt aus Gl. (1.170)  $\mathbf{b}(0) \perp \mathbf{B}^{(\text{ex})}$  und  $\mathbf{b}(0) \perp \mathbf{v}(0)$ . Ferner ist dann auch  $\mathbf{v}(dt) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{b}(0)dt$  senkrecht zu  $\mathbf{B}^{(\text{ex})}$  usf. Man hat es also mit einer *gleichförmigen Kreisbewegung* in einer zur Feldrichtung senkrechten Ebene zu tun (transversales Feld). Löst man die Bewegungsgleichung<sup>80</sup>, so erhält man für die Kreisfrequenz der Bewegung, die so genannte *Zyklotronfrequenz*,

$$\omega_c = \frac{|q|B^{(\text{ex})}}{mc} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.171)$$

und für den Radius der Kreisbahn  $r_c = v/\omega_c$ .

Im nichtrelativistischen Fall ist die Zyklotronfrequenz durch

$$(\omega_c)_{\text{nichtrel}} = \frac{|q|B^{(\text{ex})}}{mc}.$$

gegeben. Die auf die Eigenzeit<sup>81</sup>

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t$$

des Teilchens bezogene Kreisfrequenz ist gleich der nichtrelativistischen Kreisfrequenz:

$$(\omega_c)_{\text{nichtrel}} \tau = \omega_c t.$$

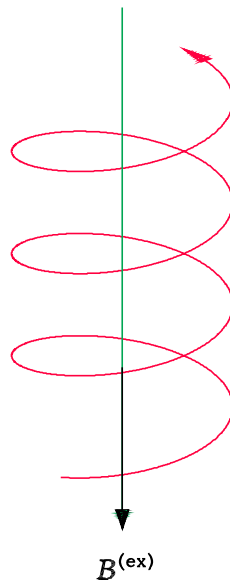


Abbildung 1.13: Bewegung einer Punktladung  
in einem homogenen magnetostatischen  
Feld (Zeichnung für  $q > 0$ )

<sup>80</sup>Für die Rechnung legt man die z-Achse zweckmäßigerweise in Feldrichtung und wählt  $\mathbf{r}(0) = (x(0), y(0), 0)$ ,  $\mathbf{v}(0) = (v_x(0), v_y(0), 0)$ . Die Teilchenbahn verläuft dann in der xy-Ebene.

<sup>81</sup>Die Nullpunkte der Zeitskalen werden so gewählt, dass  $\tau = 0$  mit  $t = 0$  korrespondiert.

**Fall 3:**  $\mathbf{v}(0) \nparallel \mathbf{B}^{(\text{ex})}$ ,  $\mathbf{v}(0) \not\perp \mathbf{B}^{(\text{ex})}$

In diesem Fall hat man es mit einer gleichförmigen Bewegung längs einer Schraubelinie zu tun, welche sich um die Feldrichtung „windet“ (s. Abb. 1.13). Zerlegt man die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens in eine zum Feld parallele und eine zum Feld senkrechte Komponente,  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_{\parallel}(0) + \mathbf{v}_{\perp}(0)$ , so kann man folgendes sagen:

Die Projektion der Bahnbewegung auf eine Ebene senkrecht zu  $\mathbf{B}^{(\text{ex})}$  gibt eine gleichförmige Kreisbewegung mit dem Geschwindigkeitsbetrag  $v_{\perp} = v_{\perp}(0)$ , der Kreisfrequenz  $\omega_c$  von Gl. (1.171) und dem Radius  $r_c = v_{\perp}/\omega_c$ . Dieser Kreisbewegung ist eine gleichförmig geradlinige Bewegung in Feldrichtung mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v}_{\parallel}(0)$  überlagert.<sup>82</sup>

## 1.15 Feld einer vorgegebenen Quellverteilung

### 1.15.1 Retardierte Potentiale

Die **1. Grundaufgabe** der Elektrodynamik wurde bereits auf Seite 53 formuliert, und das zugehörige logische Schema wurde in Abb. 1.10 dargestellt. Vorgegeben sind beliebige Quelledichten  $\rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ , welche die Kontinuitätsgleichung (1.9) erfüllen<sup>83</sup>, und gesucht ist das von diesen Quelledichten *verursachte* („erzeugte“) elektromagnetische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Aufgrund der mathematischen Kompliziertheit der inhomogenen Maxwellgleichungen ist der einzige erfolgversprechende Weg zur Lösung der 1. Grundaufgabe der Weg über die elektromagnetischen Potentiale  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  in Lorenzform. Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir hier die Feldgleichungen für die Potentiale nochmals an (siehe die Gleichungen (1.34) bis (1.36)):

$$\square \varphi(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \quad (1.172)$$

$$\square \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (1.173)$$

$$\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (1.174)$$

Für die inhomogene Wellengleichung kennt man aus der mathematischen Physik in den verschiedensten Koordinatensystemen und für die verschiedensten Randbedingungen bzw. asymptotischen Bedingungen Partikulärlösungen und greensche Funktionen. Da die Befassung mit den entsprechenden mathematischen Methoden den Rahmen einer einführenden Darstellung sprengen würde, schlagen wir im Folgenden einen plausiblen „Rateweg“ ein. Wir versuchen zuerst in Anlehnung an die Elektrostatik, d. h. an das Coulombgesetz, *Partikulärlösungen* der inhomogenen Wellengleichungen (1.172), (1.173) zu erraten. Hierauf verifizieren wir, dass es sich tatsächlich um Partikulärlösungen dieser Gleichungen handelt, und dass geeignete *Paare* von Lösungen für  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$  auch die Lorenzbedingung (1.174) erfüllen. Schließlich bauen wir durch Hinzufügen von Lösungen der homogenen Gleichungen die *allgemeine Lösung* der Gleichungen (1.172) bis

<sup>82</sup>Für die Rechnung legt man die  $z$ -Achse zweckmäßigerweise in Feldrichtung.

<sup>83</sup>Die Quelledichten müssen außerdem im Unendlichen zu allen Zeiten hinreichend rasch abnehmen, damit alle in der Folge angeschriebenen uneigentlichen Integrale existieren.

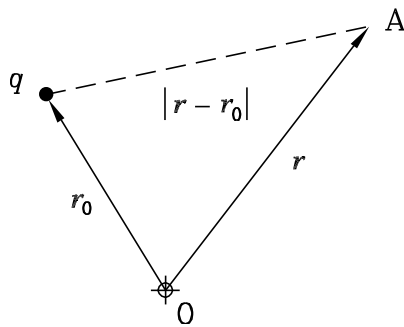


Abbildung 1.14: Ruhende Punktladung

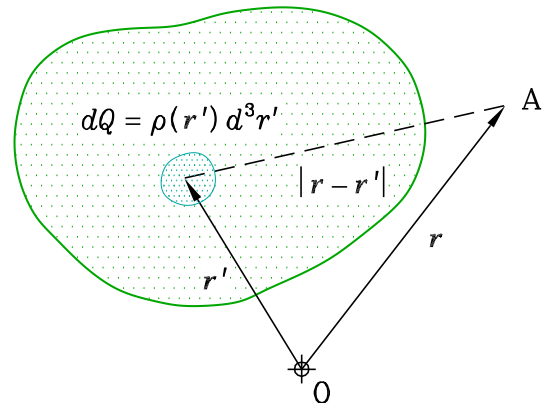


Abbildung 1.15: Kontinuierliche statische Ladungsverteilung

(1.174) auf und wählen mithilfe eines physikalischen Kausalitätsargumentes die Lösung der 1. Grundaufgabe aus.

In der *Elektrostatik* hat man  $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$  und somit als einzige Feldgleichung die *Poissongleichung*

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}). \quad (1.175)$$

Für den Fall einer im Punkt  $\mathbf{r}_0$  ruhenden Punktladung  $q$  (s. Abb. 1.14), d. h. für die Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (1.176)$$

lautet jene Partikulärlösung der Poissongleichung, welche gemäß  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad}\varphi(\mathbf{r})$  das Coulombfeld der Punktladung und somit die richtige Kraft auf eine Testladung liefert<sup>84</sup>,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (1.177)$$

Die allgemeine Lösung der Poissongleichung ergibt sich durch Addition der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, der Laplacegleichung, zu dieser Partikulärlösung. Da die allgemeine Lösung der Laplacegleichung willkürliche Funktionen enthält, besitzt die Poissongleichung bei gegebener Ladungsdichte nichtabzählbar unendlich viele Lösungen. Mathematisch kann man aus dieser Lösungsmannigfaltigkeit das Coulombpotential (bis auf eine bedeutungslose additive Konstante) durch die *asymptotische Bedingung* aussondern, dass die zugehörige Feldstärke für  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \rightarrow +\infty$  gegen null streben muss.

<sup>84</sup>Das Potential des Coulombfeldes ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt, die wir null setzen können, da sie physikalisch bedeutungslos ist. In der *Elektrodynamik* sind die Potentiale, welche ein vorgegebenes elektromagnetisches Feld liefern, nur bis auf Eichtransformationen festgelegt. Dies ist zu beachten, wenn wir später für die Beschreibung der Lösung der 1. Grundaufgabe bestimmte Potentiale als die „richtigen“ auswählen.

In der mathematischen Physik wird das elektrostatische Potential der Einheitspunktladung als *greensche Funktion* des Laplaceoperators bezeichnet. Jede Lösung<sup>85</sup>  $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$  der Differentialgleichung

$$\Delta G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.178)$$

ist eine greensche Funktion des Laplaceoperators. Dabei bedeutet  $\mathbf{r}$  den variablen Aufpunkt und  $\mathbf{r}'$  den variablen Quellpunkt. Die nur von  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  abhängige Partikulärlösung

$$G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.179)$$

welche aus der nichtabzählbar unendlichen Lösungsmannigfaltigkeit durch die oben besprochene asymptotische Bedingung ausgesondert wird, wird als greensche Funktion für den unendlichen Raum bzw. als greensche Funktion für natürliche Randbedingungen bezeichnet.

Um mathematisch zu verifizieren, dass die Funktion von Gl. (1.179) Partikulärintegral von Gl. (1.178) ist, muss man zeigen, dass für  $r \neq 0$  die Beziehung  $\Delta \frac{1}{r} = 0$  gilt, und dass das Integral von  $\Delta \frac{1}{r}$  über einen beliebig kleinen Kugelvolumensbereich um den Koordinatenursprung den Wert  $-4\pi$  besitzt. Letzteres zeigt man leicht, indem man  $\Delta = \text{div grad}$  berücksichtigt und den gaußschen Satz anwendet.

Man kann das Potential einer beliebigen diskreten oder kontinuierlichen Ladungsverteilung (s. Abb. 1.15) unmittelbar anschreiben, wenn man die „richtige“ greensche Funktion kennt. Sind keine Randbedingungen im Endlichen vorgegeben<sup>86</sup>, so ist die „richtige“ greensche Funktion durch Gl. (1.179) gegeben. Da sich eine beliebige Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$  formal in der Form

$$\rho(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.180)$$

aus  $\delta$ -förmigen Quellen aufbauen lässt, muss sich die Lösung mit dieser greenschen Funktion wegen der Linearität der Poissongleichung in der Form

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \rho(\mathbf{r}') G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (1.181)$$

schreiben lassen. Man erhält also für das Potential des von der gegebenen Ladungsverteilung  $\rho$  verursachten elektrostatischen Feldes den Ausdruck<sup>87</sup>

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.182)$$

<sup>85</sup>Im Folgenden beziehen sich alle Ortskoordinaten und alle Zeitargumente, gleichgültig ob „gestrichen“ oder nicht „gestrichen“, auf das Inertialsystem I.

<sup>86</sup>Physikalisch bedeutet dies, dass im Endlichen nur die vorgegebene Quellverteilung vorhanden ist, es also im Endlichen keine Leiterflächen und keine elektrisch polarisierbare Materie gibt. Aufgrund der Homogenität und Isotropie des Bezugsraumes in einem Inertialsystem kann dann die greensche Funktion nur von  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  abhängen.

<sup>87</sup>Damit das Integral existiert, muss  $\rho$  im Unendlichen hinreichend rasch verschwinden.



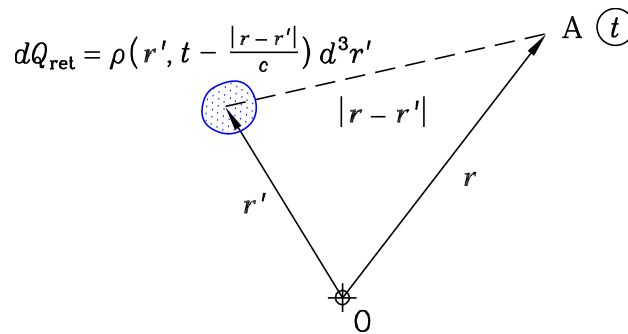


Abbildung 1.16: Zeitabhängige Ladungsverteilung

In einer Theorie mit *unendlicher* Ausbreitungsgeschwindigkeit der physikalischen Wirkungen hätte man bei *zeitabhängiger* Quellverteilung nach wie vor die Poissongleichung als Feldgleichung für das Potential:<sup>88</sup>

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}, t) = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t).$$

Die Partikulärlösung, welche das von der zeitabhängigen Quellverteilung verursachte Feld liefert, wäre dann

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Zufolge der *endlichen* Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  hat man stattdessen die Differentialgleichung

$$\square\varphi(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \quad \text{d. h.} \quad \Delta\varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t).$$

Man kann nun die „richtige“ Lösung dieser Gleichung, d. h. jene Lösung, welche (gemeinsam mit dem zugehörigen Vektorpotential) das von der zeitabhängigen Quellverteilung verursachte Feld beschreibt, folgendermaßen erraten: Um den Beitrag des Quellpunktes  $\mathbf{r}'$  zum Potential  $\varphi$  am Aufpunkt  $\mathbf{r}$  zum Zeitpunkt  $t$  zu erhalten, muss man offenbar das zum *retardierten* Zeitpunkt  $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$  am Ort  $\mathbf{r}'$  befindliche infinitesimale Ladungselement als „Verursacher“ ansehen (s. Abb. 1.16), da ja die Wirkung vom Quellpunkt  $\mathbf{r}'$  zum Aufpunkt  $\mathbf{r}$  mit der Geschwindigkeit  $c$  läuft. Wir vermuten daher, dass

<sup>88</sup>In der newtonschen Gravitationstheorie hat man für das Gravitationspotential  $\varphi$  gerade diese Differentialgleichung, wobei  $\rho$  durch die mit der Gravitationskonstante  $G$  multiplizierte Massendichte zu ersetzen ist.

$$\varphi_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) := \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.183)$$

$$\mathbf{A}_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) := \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.184)$$

die so genannten **retardierten Potentiale**, nicht nur Partikulärlösungen von Gl. (1.172) bzw. von Gl. (1.173) sind und zusammen auch Gl. (1.174) erfüllen, sondern dass diese Potentiale das von der zeitabhängigen Quellverteilung  $\rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  verursachte elektromagnetische Feld beschreiben, d. h. die **Lösung der 1. Grundaufgabe** liefern.

Bevor wir diese Vermutungen bestätigen, registrieren wir noch eine interessante Tatsache: Sind  $\varphi_{\text{ret}}, \mathbf{A}_{\text{ret}}$  Partikulärlösungen von Gl. (1.172) bzw. von Gl. (1.173), so müssen wegen

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (1.185)$$

auch

$$\varphi_{\text{av}}(\mathbf{r}, t) := \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.186)$$

$$\mathbf{A}_{\text{av}}(\mathbf{r}, t) := \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.187)$$

Partikulärlösungen von Gl. (1.172) bzw. von Gl. (1.173) sein, und es ist zu vermuten, dass  $\varphi_{\text{av}}, \mathbf{A}_{\text{av}}$  zusammen ebenfalls Gl. (1.174) erfüllen. Das zu diesen *avancierten Potentialen* gehörige elektromagnetische Feld besitzt zwar keine unmittelbare physikalische Interpretation, wir werden aber sehen, dass man es unter anderem für die Berechnung der Selbstkraft einer Punktladung benötigt.

Wir wollen nun Schritt für Schritt bestätigen, dass alle ausgesprochenen Vermutungen zutreffen. Dabei können wir uns das Leben sehr erleichtern, indem wir die retardierten und avancierten Potentiale durch Hinzunahme einer Zeitintegration formal als vierfache Integrale anschreiben, da wir dann die zugehörigen greenschen Funktionen ablesen und mit diesen weiterarbeiten können. Für die Potentiale gelten die Beziehungen

$$\varphi_{\text{av}}^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{\mathbb{R}} dt' \rho(\mathbf{r}', t') \frac{\delta(t - t' \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.188)$$

$$\mathbf{A}_{\text{av}}^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{\mathbb{R}} dt' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \frac{\delta(t - t' \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.189)$$

und die Quelledichten lassen sich in der Form

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{\mathbb{R}} dt' \rho(\mathbf{r}', t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (1.190)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{\mathbb{R}} dt' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (1.191)$$

schreiben. Wegen der Linearität der Feldgleichungen sind die retardierten und avancierten Potentiale dann und nur dann Partikulärlösungen der inhomogenen Wellengleichungen (1.172), (1.173), wenn

$$G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') := \frac{\delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.192)$$

Partikulärlösungen von

$$\square G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (1.193)$$

sind. Jede Lösung  $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$  dieser Differentialgleichung ist eine greensche Funktion des d'Alembertoperators. Im gegebenen Fall gibt es weder räumliche Randbedingungen im Endlichen noch Anfangsbedingungen für einen endlichen Zeitpunkt, und wegen der Homogenität und Isotropie des Bezugsraumes und der Homogenität der Zeit in Bezug auf ein Inertialsystem können daher problemangepasste greensche Funktionen nur von  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  und  $t - t'$  abhängen.

Es ist zu beweisen, dass die in (1.192) definierten Funktionen Partikulärlösungen von Gl. (1.193) sind. Dieser Beweis ist mathematisch einfach und wird in Aufgabe E5 behandelt. Ferner ist zu zeigen, dass die retardierten Potentiale  $\varphi_{\text{ret}}, \mathbf{A}_{\text{ret}}$  und desgleichen die avancierten Potentiale  $\varphi_{\text{av}}, \mathbf{A}_{\text{av}}$  zusammen auch die Lorenzgleichung (1.174) erfüllen.

Für den Beweis benützt man die raumzeitliche Translationsinvarianz von  $G_{\text{av}}^{\text{ret}}$ , das räumliche Verhalten von  $G_{\text{ret}}^{\text{av}}$  und von  $\mathbf{j}$  im Unendlichen, das zeitliche Verhalten von  $G_{\text{ret}}^{\text{av}}$  und von  $\rho$  für asymptotische Zeiten und die Kontinuitätsgleichung für die Quelledichten. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\text{av}}^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{\mathbb{R}} dt' \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t')}_{-\frac{\partial}{\partial t'} G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t')} \rho(\mathbf{r}', t') \\ &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{\mathbb{R}} dt' \underbrace{\left[ -\frac{\partial}{\partial t'} G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \right]}_{-\frac{\partial}{\partial t'} \left[ G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \rho(\mathbf{r}', t') \right]} \rho(\mathbf{r}', t') \\ &\quad + G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \left[ -G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \rho(\mathbf{r}', t') \right]_{t'=-\infty}^{t'=+\infty}$$

0 für jedes feste  $\mathbf{r}, \mathbf{r}', t$ , da  
 $G_{\text{av}}^{\text{ret}}$  für  $t' \rightarrow \pm\infty$  null wird  
(s. Gl. (1.192)) und  $\rho$  endlich  
bleibt

$$+ \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{\mathbb{R}} dt' G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'},$$

also

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\text{av}}^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{\mathbb{R}} dt' G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'}. \quad (1.194)$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{A}_{\text{av}}^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{\mathbb{R}} dt' \underbrace{\nabla_{\mathbf{r}'} G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t')}_{-\nabla_{\mathbf{r}'} G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t')} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \\ &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{\mathbb{R}} dt' \left[ \underbrace{-\nabla_{\mathbf{r}'} G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t')}_{-\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot [G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')]} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \right. \\ &\quad \left. + G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \right], \end{aligned}$$

und mithilfe des gaußsches Satzes erhält man

$$\text{div} \mathbf{A}_{\text{av}}^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}} dt' \left[ -\oint_{\infty} d\mathbf{f}' \cdot G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \right]$$

0 für jedes feste  $\mathbf{r}, t, t'$ , da  $G_{\text{av}}^{\text{ret}}$  und  $\mathbf{j}$   
für  $r' \rightarrow +\infty$  gegen null streben

$$+ \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{\mathbb{R}} dt' G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \text{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t'),$$

also

$$\text{div} \mathbf{A}_{\text{av}}^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{\mathbb{R}} dt' G_{\text{av}}^{\text{ret}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') \text{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t'). \quad (1.195)$$

Addiert man die Ausdrücke (1.194) und (1.195) so ergibt sich null, da im Integranden der Faktor

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} + \text{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = 0$$

auftritt.

Um die Schreibarbeit zu reduzieren, verwenden wir für die folgenden Überlegungen die Viererschreibweise. (Siehe dazu die Beziehung (1.117) und die Feldgleichungen (1.119), (1.120).) Die *allgemeine Lösung* der Feldgleichungen (1.172) bis (1.174) für die elektromagnetischen Potentiale lässt sich dann in der Form

$$A^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) = A_0^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) + A_{\text{ret}}^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (1.196)$$

schreiben, wobei  $A_0^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$  die allgemeine Lösung der *homogenen* Feldgleichungen

$$\square \underline{A}_0 = \underline{0}, \quad \underline{\partial} \cdot \underline{A}_0 = 0 \quad (1.197)$$

darstellt. Die Überlegungen, die uns zu den retardierten Potentialen geführt haben, sprechen dafür, dass die Lösung der 1. Grundaufgabe durch die retardierten Potentiale gegeben ist. Ist also kein einlaufendes Wellenfeld vorhanden, so muss  $A^\mu = A_{\text{ret}}^\mu$  gelten. Es stellt sich die Frage, wie die *asymptotische Bedingung*, welche diese Lösung aus der Lösungsmannigfaltigkeit (1.196) aussondert und daher das zur Vervollständigung der Maxwelltheorie erforderliche Zusatzpostulat darstellt, mathematisch zu formulieren ist. *Physikalisch* lässt sie sich einfach formulieren: Ist kein einlaufendes Wellenfeld vorhanden, so kann bei einer *räumlich* lokalisierten Quellverteilung in großer Entfernung von der Quellverteilung nur deren Strahlungsfeld vorhanden sein, d. h. es kann räumlich asymptotisch nur *auslaufende Wellen* geben. Die mathematische Bedingung, welche dies gewährleistet, die so genannte *sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung*, ist aber so kompliziert, dass wir sie hier nicht anschreiben. Es müssen nämlich räumlich asymptotische Bedingungen für die Komponenten der fouriertransformierten elektromagnetischen Feldstärken  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)$  vorgeschrieben werden.<sup>89</sup> Mithilfe der Ausstrahlungsbedingung kann man die 1. Grundaufgabe mathematisch streng formulieren und die retardierten Potentiale auf konstruktivem Weg erhalten.

Ist ein einlaufendes Wellenfeld vorhanden, so besitzt das Viererpotential die Form (1.196), wobei  $A_0^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$  dieses einlaufende Wellenfeld beschreibt. Um dies deutlich zu machen, schreiben wir Gl. (1.196) in der Form

$$A^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) = A_{\text{ein}}^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) + A_{\text{ret}}^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (1.198)$$

Da das Viererpotential  $A_{\text{av}}^\mu$  – wie wir gezeigt haben – ebenfalls eine Partikulärlösung der inhomogenen Feldgleichungen für die Potentiale darstellt, muss sich die Lösung (1.198) auch als Summe der avancierten Lösung und einer geeigneten Lösung der homogenen Feldgleichungen schreiben lassen. Nennen wir diese Lösung der homogenen Feldgleichungen  $A_{\text{aus}}^\mu$ , so gilt

$$\begin{aligned} A^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) &= A_{\text{ein}}^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) + A_{\text{ret}}^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ &= A_{\text{aus}}^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) + A_{\text{av}}^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3). \end{aligned} \quad (1.199)$$

<sup>89</sup>Siehe dazu Stumpf, H., und W. Schuler: Elektrodynamik. Vieweg, Braunschweig 1981.

Um die Bedeutung dieser Beziehung zu erhellen und nochmals eine Bestätigung dafür zu erhalten, dass das retardierte Viererpotential die Lösung der 1. Grundaufgabe liefert, betrachten wir vorübergehend eine *zeitlich* lokalisierte Quellverteilung  $j^\mu$ . Eine Quellverteilung nennen wir zeitlich lokalisiert, wenn  $j^\mu$  nur in einem endlichen Zeitintervall von null verschiedene Werte annehmen kann.<sup>90</sup> Für unsere Überlegungen wählen wir das Zeitintervall  $(-T, +T)$ . Aus den Beziehungen (1.183), (1.184) bzw. (1.186), (1.187) folgt dann:

$$\begin{aligned} \text{für } t < -T \text{ gilt: } \quad A_{\text{ret}}^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) &= 0, \\ A^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) &= A_{\text{ein}}^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3); \end{aligned} \quad (1.200)$$

$$\begin{aligned} \text{für } t > +T \text{ gilt: } \quad A_{\text{av}}^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) &= 0, \\ A^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) &= A_{\text{aus}}^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3). \end{aligned} \quad (1.201)$$

Das Viererpotential  $A_{\text{ein}}^\mu$  beschreibt ein für  $t \rightarrow -\infty$  aus dem Unendlichen *einlaufendes* Wellenfeld. Es ist Lösung der homogenen Feldgleichungen und ist durch sein Verhalten für  $t \rightarrow -\infty$  bestimmt.

Die physikalische Ursache des einlaufenden Wellenfeldes ist nicht Gegenstand der Untersuchung. Man kann sich als Ursache Quellen im Unendlichen vorstellen, die dieses Feld ausstrahlen, weshalb man auch von einem einlaufenden Strahlungsfeld spricht. Das *einlaufende* Feld kann für endliche Zeiten durchaus Anteile enthalten, welche bereits über das betrachtete Raumgebiet „hinweggelaufen“ sind und daher von diesem bereits wieder *weglaufen*.

Das retardierte Potential  $A_{\text{ret}}^\mu$  beschreibt das *von der Quellverteilung  $j^\mu$  verursachte* elektromagnetische Feld. Es ist Lösung der inhomogenen Feldgleichungen und ist ausschließlich durch  $j^\mu$  bestimmt. Vor dem „Einschalten“ der Quellverteilung ist  $A_{\text{ret}}^\mu$  null, da die Wirkung nicht der Ursache zuvorgehen kann (Kausalität). Das jeweilige *Gesamtfeld* wird durch  $A^\mu = A_{\text{ein}}^\mu + A_{\text{ret}}^\mu$  beschrieben (Lösung der inhomogenen Feldgleichungen). Will man das für  $t > +T$  vorhandene Wellenfeld berechnen, so muss man  $A^\mu$  unter Zuhilfenahme des avancierten Viererpotentials (Lösung der inhomogenen Feldgleichungen und ausschließlich durch  $j^\mu$  bestimmt) gemäß  $A^\mu = A_{\text{aus}}^\mu + A_{\text{av}}^\mu$  zerlegen. Das dadurch erhaltene Potential  $A_{\text{aus}}^\mu$  beschreibt dann das für  $t > +T$  vorhandene Wellenfeld, welches sich aus dem Strahlungsfeld der Quellverteilung  $j^\mu$  sowie dem einlaufenden Wellenfeld zusammensetzt und *auslaufendes* Feld genannt wird. Das zum Potential

$$A_{\text{rad}}^\mu = A_{\text{aus}}^\mu - A_{\text{ein}}^\mu = A_{\text{ret}}^\mu - A_{\text{av}}^\mu \quad (1.202)$$

gehörige Feld (spezielle Lösung der homogenen Feldgleichungen) wird entsprechend als *Strahlungsfeld der Quellverteilung  $j^\mu$*  interpretiert.

Die Bezeichnung *auslaufendes* Feld soll lediglich darauf hinweisen, dass es sich um das Wellenfeld handelt, das sich *nach* „Ausschalten“ der Quellverteilung ausbreitet. Es kann für

<sup>90</sup>Eine solche Quellverteilung stellt vom physikalischen Standpunkt eine Fiktion dar, da für die elektrische Ladung ein strenger Erhaltungssatz gilt, man daher eine Ladungsverteilung nicht einfach ein- und ausschalten kann.

$t > +T$  durchaus noch Anteile besitzen, welche räumlich gesehen auf das betrachtete Raumgebiet *einfallen*. Für  $t \rightarrow +\infty$  liegt allerdings oft die Situation vor, dass es nur mehr ein vom betrachteten Raumgebiet weglauendes Feld gibt. Dies ist der Fall, wenn das gesamte von Quellen im Unendlichen stammende Wellenfeld bereits über dieses Raumgebiet „hinweggelaufen“ ist.

Da das Zeitintervall  $(-T, +T)$  beliebig groß gewählt werden kann, liegt es nahe, die obigen Interpretationen von  $A_{\text{ein}}^\mu$ ,  $A_{\text{ret}}^\mu$ ,  $A^\mu$  und  $A_{\text{rad}}^\mu$  auch für zeitlich *nicht* lokalisierte Quelledichten  $j^\mu$  zu übernehmen. Da aber für eine zeitlich nicht lokalisierte Quellverteilung  $A_{\text{av}}^\mu$  für  $t \rightarrow +\infty$  nicht gegen null strebt, kann man dann das Strahlungsfeld der Quellverteilung nicht mehr durch den Grenzübergang  $t \rightarrow +\infty$  aus dem retardierten Feld „herausfiltern“.

Durch die asymptotische Bedingung, welche die Lösung der 1. Grundaufgabe eindeutig festlegt, wird im Rahmen der Maxwelltheorie eine *Zeitrichtung* ausgezeichnet. Die Maxwellgleichungen (1.11) bis (1.14) bzw. die Feldgleichungen (1.172) bis (1.174) für die Potentiale sind *invariant* gegenüber Zeitumkehrtransformationen.<sup>91</sup> Die „Brechung“ der Zeitumkehrinvarianz durch ein Zusatzpostulat trägt der Erfahrung Rechnung, dass die Umwandlung von Teilchenenergie in elektromagnetische Feldenergie durch Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen ein *irreversibler Vorgang* ist. Die Grundgleichungen (1.45) bis (1.50) der Maxwell-Lorentz-Theorie sind ebenfalls zeitumkehrinvariant, und die asymptotischen Bedingungen müssen auch in der Maxwell-Lorentz-Theorie eine Zeitrichtung auszeichnen (siehe Abschnitt 1.18).

### 1.15.2 Feld einer bewegten Punktladung

Die exakte Berechnung der retardierten Potentiale (1.183), (1.184) ist nur für sehr einfache Quellverteilungen möglich.<sup>92</sup> Ein wichtiges Beispiel für ein exakt lösbares Problem stellt die Berechnung des Feldes einer Punktladung dar, deren Bewegungsgesetz  $\mathbf{r}(t')$ ,  $-\infty < t' < +\infty$ , *vorgegeben* ist. Ladungs- und Stromdichte lauten dann

$$\rho(\mathbf{r}', t') = q \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t')), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{v}(t') \rho(\mathbf{r}', t') = q \mathbf{v}(t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t')). \quad (1.203)$$

Diese Quelledichten setzen wir nicht in die Formeln (1.183), (1.184), sondern in die Formeln (1.188), (1.189) ein. Vertauschen wir überdies die Integrationsreihenfolge, d. h.

<sup>91</sup>Es ist üblich von *Zeitumkehr* zu sprechen, gemeint ist damit aber *Bewegungsumkehr*, d. h. die Transformation  $t \rightarrow -t$ ,  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ ,  $\rho \rightarrow \rho$ ,  $\mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{j}$ ,  $\varphi \rightarrow \varphi$  und  $\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$ .

<sup>92</sup>Im Allgemeinen ist man bei der Berechnung auf Näherungsmethoden angewiesen. Bei räumlich lokalisierten Quellverteilungen legt man den Koordinatenursprung in den Bereich der Quellverteilung und entwickelt  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  für weit entfernte Aufpunkte  $\mathbf{r}$  nach Potenzen von  $r'/r$ . Man erhält dann eine *Multipolentwicklung* der Potentiale, deren Koeffizienten für die Beiträge niedrigster Ordnung analytisch oder numerisch berechnet werden können.

führen wir die räumliche Integration *zuerst* durch, so haben wir<sup>93</sup>

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = q \int_{\mathbb{R}} dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t')) \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

bzw.

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = q \int_{\mathbb{R}} dt' \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} \quad (1.204)$$

und analog

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = q \int_{\mathbb{R}} dt' \frac{\mathbf{v}(t') \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}{c}\right)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}. \quad (1.205)$$

Diese Beziehungen reflektieren die Tatsache, dass das von der Punktladung in einem festen Aufpunkt  $\mathbf{r}$  zu einem festen Zeitpunkt  $t$  verursachte Feld durch den „Zustand“ der Ladung zu einem festen retardierten Zeitpunkt bestimmt sein muss (s. Abb. 1.17). Die Integration erfolgt über den Bahnparameter, wobei zufolge der  $\delta$ -Funktion nur ein einziger Zeitpunkt  $t'$  einen Beitrag liefert, und zwar jener Zeitpunkt, für den das Argument der  $\delta$ -Funktion in den Gleichungen (1.204), (1.205) null ist. *Physikalisch* ist dieser Zeitpunkt  $t'$  dadurch bestimmt, dass die Wirkung mit der Geschwindigkeit  $c$  vom Bahnpunkt  $\mathbf{r}(t')$  zum Aufpunkt  $\mathbf{r}$  „läuft“, während sich die Ladung längs ihrer Bahn vom Punkt  $\mathbf{r}(t')$  zum Punkt  $\mathbf{r}(t)$  bewegt. Die Bestimmungsgleichung für diesen Zeitpunkt  $t'$  lautet daher<sup>94</sup>

$$t - t' = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}{c},$$

sodass für das entsprechende  $t'$  das Argument der  $\delta$ -Funktion in den Gleichungen (1.204), (1.205) tatsächlich null ist. Lässt man Aufpunkt  $\mathbf{r}$  und Zeitpunkt  $t$  variieren, so erhält man gemäß

$$t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t' = t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) \quad (1.206)$$

eine *Funktion*  $t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t)$ . Diese Funktion ist durch die linke Gleichung in (1.206) *implizit* definiert. Ihre *explizite* Berechnung ist nur in Ausnahmefällen möglich.<sup>95</sup>

Zur Vereinfachung der Schreibweise bei den zum Teil komplizierten Rechnungen dieses Abschnittes ist es zweckmäßig, Abkürzungen und Kurzschreibweisen einzuführen. Folgende Abkürzungen werden benützt:

<sup>93</sup>Da wir in diesem Abschnitt ausschließlich die *retardierten* Potentiale und Feldstärken betrachten, lassen wir zur Vereinfachung der Schreibweise den Subskript *ret* bei Potentialen und Feldstärken weg.

<sup>94</sup>Aus Kausalitätsgründen ist klar, dass der Zeitpunkt  $t'$  bei gegebenem  $\mathbf{r}, t$  *eindeutig* bestimmt ist.

<sup>95</sup>Ein Beispiel stellt die gleichförmig geradlinige Bewegung dar (s. die Aufgabe E6).



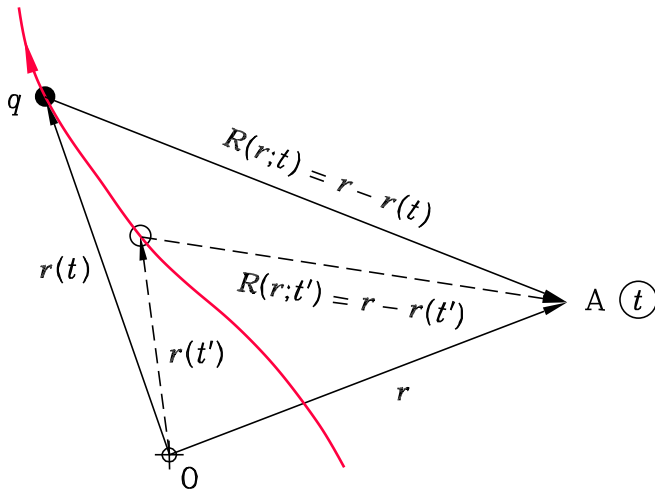


Abbildung 1.17: Bestimmung des retardierten Zeitpunktes  $t' = t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t)$  für festes  $\mathbf{r}, t$

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}; t') := \mathbf{r} - \mathbf{r}(t'), \quad (1.207)$$

$$f(\mathbf{r}, t; t') := t - t' - \frac{R(\mathbf{r}; t')}{c}, \quad (1.210)$$

$$R(\mathbf{r}; t') := |\mathbf{R}(\mathbf{r}; t')|, \quad (1.208)$$

$$g(\mathbf{r}; t') := \frac{\partial f(\mathbf{r}, t; t')}{\partial t'}, \quad (1.211)$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}; t') := \frac{\mathbf{R}(\mathbf{r}; t')}{R(\mathbf{r}; t')}, \quad (1.209)$$

$$\boldsymbol{\beta}(t') := \frac{\mathbf{v}(t')}{c}. \quad (1.212)$$

Ferner vereinbaren wir folgende Kurzschreibweisen: Für eine Funktion  $F$  von  $t'$  oder von  $\mathbf{r}$  und  $t'$  oder von  $\mathbf{r}, t$  und  $t'$  schreiben wir einfach  $F$ . Soll dabei  $t' = t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t)$  gesetzt werden, so schreiben wir  $[F]_{\text{ret}}$ . Ein Beispiel:  $g$  steht für  $g(\mathbf{r}; t')$ , und  $[g]_{\text{ret}}$  steht für  $g(\mathbf{r}; t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t))$ .

Setzt man in die Definition von  $g$  die Größe  $f$  ein, so erhält man

$$g(\mathbf{r}; t') = \frac{\partial}{\partial t'} \left( t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}{c} \right).$$

Führt man hier die Differentiation nach  $t'$  unter Berücksichtigung von

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')| = \sqrt{(x - x(t'))^2 + (y - y(t'))^2 + (z - z(t'))^2}$$

durch, so ergibt sich nach elementarer Rechnung

$$g(\mathbf{r}; t') = -(1 - \mathbf{n}(\mathbf{r}; t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')). \quad (1.213)$$

Für den in der Folge benötigten Absolutbetrag von  $g$  folgt dann wegen  $|\boldsymbol{\beta}(t')| < 1$

$$|g(\mathbf{r}; t')| = 1 - \mathbf{n}(\mathbf{r}; t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'). \quad (1.214)$$

Wir gehen nun daran, die retardierten Potentiale und Feldstärken der bewegten Punktladung zu berechnen. Mit den oben eingeführten Abkürzungen und Kurzschreibweisen nehmen die Gleichungen (1.204), (1.205) die Form

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = q \int_{\mathbb{R}} dt' \frac{\delta(f)}{R}, \quad (1.215) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = q \int_{\mathbb{R}} dt' \frac{\boldsymbol{\beta} \delta(f)}{R} \quad (1.216)$$

an. Da  $f$  als Funktion von  $t'$  eine einzige Nullstelle, nämlich  $t' = t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t)$ , besitzt, gilt nach den Rechenregeln für die  $\delta$ -Funktion

$$\delta(f(\mathbf{r}, t; t')) = \frac{\delta(t' - t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t))}{|g(\mathbf{r}; t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t))|}. \quad (1.217)$$

Durchführung der Integration in den Gleichungen (1.215), (1.216) gibt dann

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{q}{R|g|} \right]_{\text{ret}}, \quad (1.218) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{q\boldsymbol{\beta}}{R|g|} \right]_{\text{ret}}. \quad (1.219)$$

Ausführlich angeschrieben lauten die retardierten Potentiale für die bewegte Punktladung

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})| \left( 1 - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})|} \cdot \frac{\mathbf{v}(t_{\text{ret}})}{c} \right)}, \quad (1.220)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}(t_{\text{ret}})}{c} \varphi(\mathbf{r}, t), \quad \text{mit} \quad t_{\text{ret}} = t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t). \quad (1.221)$$

Sie werden als **Liénard-Wiechert-Potentiale** bezeichnet. Die Berechnung der zugehörigen Feldstärken mithilfe der Beziehungen (1.24), (1.26) ist ziemlich verwickelt. Da auch  $t_{\text{ret}}$  von  $\mathbf{r}$  und  $t$  abhängt, wobei diese Funktion nur *implizit* gegeben ist (siehe Gl. (1.206)), wäre es sehr unzweckmäßig, in die Beziehungen für die Feldstärken die Endformeln (1.220), (1.221) für die Potentiale einzusetzen. Die Rechnung ist *wesentlich* einfacher, wenn man die Formeln (1.215), (1.216) einsetzt und die erforderlichen Ableitungen unter dem Integral durchführt.

Geht man auf diese Weise vor, so hat man zunächst einmal

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = q \int_{\mathbb{R}} dt' \left\{ \frac{\mathbf{R}}{R^3} \delta(f) + \frac{1}{cR} \left( \frac{\mathbf{R}}{R} - \boldsymbol{\beta} \right) \delta'(f) \right\}, \quad (1.222)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= q \int_{\mathbb{R}} dt' \text{rot} \frac{\boldsymbol{\beta} \delta(f)}{R} = q \int_{\mathbb{R}} dt' \left\{ \text{grad} \frac{\delta(f)}{R} \times \boldsymbol{\beta} \right\} \\ &= q \int_{\mathbb{R}} dt' \left\{ \frac{1}{R^2} \left( \boldsymbol{\beta} \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) \delta(f) + \frac{1}{cR} \left( \boldsymbol{\beta} \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) \delta'(f) \right\}. \end{aligned} \quad (1.223)$$

Mit den Beziehungen (1.211), (1.213) und (1.214) folgt

$$\delta'(f) = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t'}} \frac{\partial}{\partial t'} \delta(f) = -\frac{1}{|g|} \frac{\partial}{\partial t'} \delta(f), \quad (1.224)$$

und man erhält nach partieller Integration der Terme mit  $\delta'(f)$  in den Gleichungen (1.222), (1.223)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = q \int_{\mathbb{R}} dt' \delta(f) \left\{ \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{1}{R|g|} \left( \frac{\mathbf{R}}{R} - \boldsymbol{\beta} \right) \right) \right\}, \quad (1.225)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = q \int_{\mathbb{R}} dt' \delta(f) \left\{ \frac{1}{R^2} \left( \boldsymbol{\beta} \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{1}{R|g|} \left( \boldsymbol{\beta} \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) \right) \right\}. \quad (1.226)$$

Mithilfe von Gl. (1.217) folgt schließlich

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{q\mathbf{R}}{R^3|g|} + \frac{q}{|g|} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{1}{R|g|} \left( \frac{\mathbf{R}}{R} - \boldsymbol{\beta} \right) \right) \right]_{\text{ret}}, \quad (1.227)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{q}{R^2|g|} \left( \boldsymbol{\beta} \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) + \frac{q}{|g|} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{1}{R|g|} \left( \boldsymbol{\beta} \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) \right) \right]_{\text{ret}}. \quad (1.228)$$

Die weitere Rechnung ist elementar, doch erfordert sie Geschick beim Zusammenfassen. Durchführung der Differentiation nach  $t'$  gibt mit

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{R} = -\boldsymbol{\beta}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} R = -\frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = -\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}, \quad (1.229)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} |g| = \frac{\beta^2}{R} - \frac{(\mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{R^3} - \frac{\mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{Rc} = \frac{\beta^2}{R} - \frac{(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{R} - \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{c} \quad (1.230)$$

für die elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \left[ \frac{q}{R^2|g|} \mathbf{n} + \frac{q}{R^2|g|^2} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \frac{q}{R^2|g|^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \left( \beta^2 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - \frac{R}{c} (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{R^2|g|^2} \left( -\boldsymbol{\beta} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \frac{R}{c} \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right]_{\text{ret}} \\ &= \left[ \frac{q}{R^2|g|^3} \left\{ \mathbf{n}(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + [\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})](1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(\beta^2 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}))(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \right\} + \frac{q}{cR|g|^3} \left\{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}} \underbrace{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})}_{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})} \right\} \right]_{\text{ret}}, \\ \mathbf{E} &= \left[ \frac{q}{R^2|g|^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2) \right]_{\text{ret}} + \left[ \frac{q}{cR|g|^3} \left\{ \mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right\} \right]_{\text{ret}} \quad (1.231) \end{aligned}$$

und für die magnetische Feldstärke

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \left[ \frac{q}{R^2|g|} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}) + \frac{q}{R^2|g|^2} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \frac{q}{R^2|g|^3} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n})(\beta^2 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - \frac{R}{c} (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{q}{R^2|g|^2} (\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \mathbf{n}) \frac{R}{c} + \frac{q}{R^2|g|^2} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \right]_{\text{ret}} \\
 &= \left[ \frac{q}{R^2|g|^3} \left\{ (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n})(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + 2(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n})(\beta^2 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{q}{cR|g|^3} \left\{ (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \right\} \right]_{\text{ret}}, \\
 \mathbf{B} &= \left[ \frac{q}{R^2|g|^3} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n})(1 - \beta^2) \right]_{\text{ret}} + \left[ \frac{q}{cR|g|^3} \left\{ (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \right\} \right]_{\text{ret}}.
 \end{aligned} \tag{1.232}$$

Die magnetische Feldstärke  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  lässt sich als äußeres Produkt des Vektors  $[\mathbf{n}]_{\text{ret}}$  mit  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  schreiben. Es gilt nämlich (s. Gl. (1.231))

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}$$

und

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} \times \left\{ \mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right\} &= \mathbf{n} \times \left\{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}}(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \right\} \\
 &= (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}).
 \end{aligned}$$

Bei den retardierten Potentialen der Punktladung haben wir am Ende der Rechnung in die Kurzform (1.218), (1.219) alle Abkürzungen eingesetzt und haben die Formeln (1.220), (1.221) erhalten. Bei den zugehörigen Feldstärken schreiben wir nur die Kurzform an, da die ausführliche Form wegen ihrer Kompliziertheit viel zu unübersichtlich ist. Das von einer bewegten Punktladung verursachte elektromagnetische Feld, das so genannte **Liénard-Wiechert-Feld**, ist durch die folgenden Formeln gegeben:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{q}{\gamma^2(v)|g|^3 R^2} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \right]_{\text{ret}} + \left[ \frac{q}{c|g|^3 R} \left\{ \mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right\} \right]_{\text{ret}}, \tag{1.233}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{n}]_{\text{ret}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \tag{1.234}$$

Für  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}(t)$  strebt  $t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t)$  gegen  $t$ . Die Feldstärken divergieren für  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}(t)$  daher wie der Kehrwert von  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)|^2$ , sodass das „vorläufige“ Kraftgesetz Gl. (1.39) tatsächlich noch eine unendliche Selbstkraft enthält.

### Ruhende Punktladung

Setzt man in die Formeln für die Liénard-Wiechert-Potentiale und für die Liénard-Wiechert-Feldstärken  $\mathbf{r}(t') = \mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{v}(t') = \dot{\mathbf{v}}(t') = \mathbf{0}$  ein, so erhält man – wie dies der

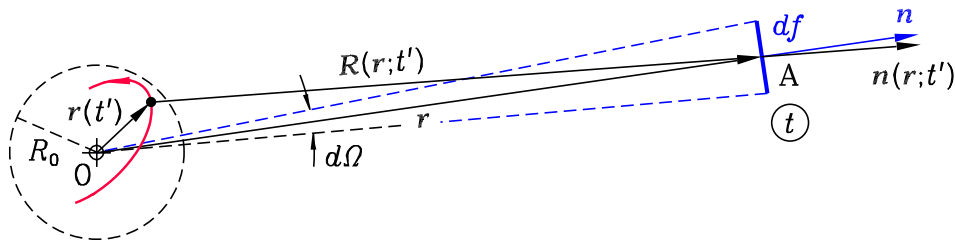


Abbildung 1.18: Räumlich lokalisierte Teilchenbewegung

Fall sein muss – das *elektrostatistische Coulombfeld*

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0}; \quad (1.235)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0}. \quad (1.236)$$

*Gleichförmig geradlinig bewegte Punktladung*

In diesem Fall gilt  $\mathbf{r}(t') = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t'$ ,  $\mathbf{v}(t') = \mathbf{v}_0$ ,  $\dot{\mathbf{v}}(t') = \mathbf{0}$ , und der zweite Term in Gl. (1.233) sowie der zugehörige Term in Gl. (1.234) sind daher für alle Zeiten null. Dies bedeutet (s. die Diskussion bei der beschleunigt bewegten Punktladung), dass eine gleichförmig geradlinig bewegte Ladung nicht strahlt. Das entsprechende elektromagnetische Feld heißt *konvektives Coulombfeld*, da es nicht „in sich dynamisch“ ist, sondern lediglich vom Teilchen „mitgetragen“ wird. (Im Ruhssystem des Teilchens liegt ein elektrostatisches Coulombfeld vor.) Potentiale und Feldstärken des Feldes einer gleichförmig geradlinig bewegten Punktladung wurden in Aufgabe E3 mittels Lorentztransformation vom Ruhssystem berechnet. Dabei ergab sich, dass die Richtung der elektrischen Feldstärke im Aufpunkt  $\mathbf{r}$  zum Zeitpunkt  $t$  durch  $\mathbf{n}(\mathbf{r}; t)$  gegeben ist. Für die gleichförmig geradlinig bewegte Punktladung muss also  $[\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}]_{\text{ret}}$  proportional zu  $\mathbf{n}(\mathbf{r}; t)$  sein. Siehe dazu die Aufgabe E6.

*Beschleunigt bewegte Punktladung*

Um die Bedeutung der beiden Terme in Gl. (1.233) und der zugehörigen Terme in Gl. (1.234) herauszufinden, betrachten wir den Fall einer Punktladung, welche sich *räumlich lokalisiert* bewegt, d. h. es soll für alle Zeiten  $|\mathbf{r}(t')| < R_0$  gelten, wobei  $R_0$  vorgegeben ist (s. Abb. 1.18). Für Aufpunkte  $\mathbf{r}$  mit  $r \gg R_0$  gilt dann für alle Zeiten  $R(\mathbf{r}; t') \sim r$ .

Der 1. Term von Gl. (1.233) und der entsprechende Beitrag zu  $\mathbf{B}$  verhalten sich dann für große  $r$  wie  $1/r^2$  und tragen daher (wie wir von Seite 34 wissen und in Abschnitt 1.16.1 noch einmal explizit bestätigen werden) zum Energiefluss durch die „unendlich ferne Oberfläche“ nichts bei. Dieser Feldanteil „bleibt beim Teilchen“ er „bewegt sich mit dem

Teilchen mit“. Formal ist er identisch mit dem konvektiven Coulombfeld, doch ist er „in sich dynamisch“, da an die Stelle der konstanten Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t))$  tritt. Man spricht vom *verallgemeinerten Coulombfeld* (Geschwindigkeitsfeld)  $\mathbf{E}_v, \mathbf{B}_v$  der Ladung.

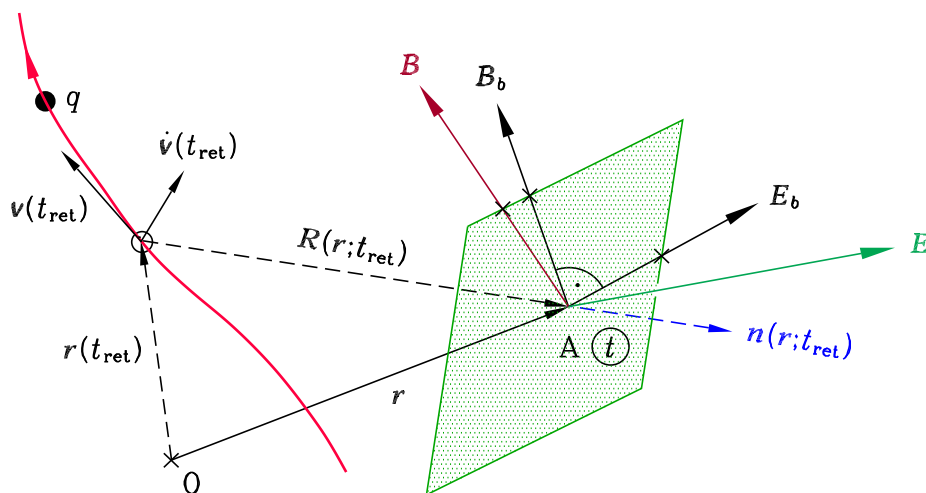


Abbildung 1.19: Feld einer beschleunigt bewegten Punktladung

Der 2. Term von Gl. (1.233) und der entsprechende Beitrag zu  $\mathbf{B}$  wird als *Beschleunigungsfeld*  $\mathbf{E}_b, \mathbf{B}_b$  der Ladung bezeichnet. Die Feldstärken dieses Feldanteils verhalten sich für eine lokalisierte Teilchenbewegung für große  $r$  wie  $1/r$  und tragen daher zum Energiefluss durch die „unendlich ferne Oberfläche“ bei. Wie wir in Abschnitt 1.16.1 zeigen werden, ist der asymptotische Energiefluss überall und zu allen Zeiten nach „außen“ gerichtet und beschreibt daher die irreversible Umwandlung von Teilchenenergie in elektromagnetische Feldenergie, welche als *Ausstrahlung* bezeichnet wird: Eine beschleunigt bewegte Ladung strahlt. Ein *Teil* des Beschleunigungsfeldes

$$\mathbf{E}_b(\mathbf{r}, t) := \left[ \frac{q}{c|g|^3 R} \{ \mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \} \right]_{\text{ret}}, \quad (1.237)$$

$$\mathbf{B}_b(\mathbf{r}, t) := [\mathbf{n}]_{\text{ret}} \times \mathbf{E}_b(\mathbf{r}, t) \quad (1.238)$$

löst sich als **Strahlungsfeld** vom Teilchen ab. Betrachten wir einen festen Aufpunkt  $\mathbf{r}$  und einen festen Zeitpunkt  $t$ . Dann ist  $t' = t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t)$  ein fester retardierter Zeitpunkt. Elektrische und magnetische Feldstärke des Beschleunigungsfeldes der Punktladung sind im betrachteten Aufpunkt zum betrachteten Zeitpunkt dem Betrage nach gleich groß, zueinander senkrecht und senkrecht zur Richtung  $[\mathbf{n}]_{\text{ret}} = \mathbf{n}(\mathbf{r}; t_{\text{ret}})$  vom Quellpunkt  $\mathbf{r}(t_{\text{ret}})$  zum Aufpunkt  $\mathbf{r}$  (s. Abb. 1.19). Diese Eigenschaften sind für ein elektromagnetisches Strahlungsfeld (elektromagnetisches Wellenfeld) charakteristisch.

Für das *Gesamtfeld* der beschleunigt bewegten Punktladung im Aufpunkt  $\mathbf{r}$  zum Zeitpunkt  $t$  gilt ebenfalls, dass elektrische und magnetische Feldstärke zueinander senkrecht sind, doch sind sie nicht dem Betrage nach gleich, und es ist  $\mathbf{E}$  nicht transversal zur Richtung  $\mathbf{n}(\mathbf{r}; t_{\text{ret}})$ .

## 1.16 Ausstrahlung von Wellen durch eine vorgegebene Quellverteilung

Das elektromagnetische Strahlungsfeld einer vorgegebenen Quellverteilung kann im Prinzip mithilfe von Gl. (1.202) berechnet werden. Für eine zeitlich lokalisierte Quellverteilung strebt  $A_{\text{av}}^\mu$  für  $t \rightarrow +\infty$  gegen null, und man kann das Strahlungsfeld aus dem retardierten Feld durch den Grenzübergang  $t \rightarrow +\infty$  „herausfiltern“. Benützt man die Beziehung (1.202) für eine zeitlich *nicht* lokalisierte Quellverteilung, so muss man jedoch  $A_{\text{ret}}^\mu - A_{\text{av}}^\mu$  tatsächlich berechnen. Ist die betreffende Quellverteilung *räumlich lokalisiert*, so gibt es einen einfacheren Weg die Ausstrahlung zu behandeln: Man hat lediglich das *Beschleunigungsfeld*, d. h. jenen Anteil des retardierten Feldes, welcher sich räumlich asymptotisch wie  $\frac{1}{r}$  verhält, zu nehmen. Mithilfe des zugehörigen asymptotischen Energiestromes kann man dann die Ausstrahlung der Quellverteilung berechnen.

### 1.16.1 Ausstrahlung durch eine beschleunigt bewegte Punktladung

Die Teilchenbewegung verlaufe zu allen Zeiten im Endlichen, sodass die entsprechende Quellverteilung *räumlich lokalisiert* ist. Es gilt dann für alle Zeiten  $|\mathbf{r}(t')| < R_0$  mit vorgegebenem  $R_0$  (s. Abb. 1.18 von Seite 77), und man hat für Aufpunkte  $\mathbf{r}$  mit  $r \gg R_0$  für alle Zeiten  $R(\mathbf{r}; t') \sim r$ .

Die Energiestromdichte ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_v(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}_v(\mathbf{r}, t)] \\ &+ \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_v(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}_b(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_b(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}_v(\mathbf{r}, t)] \\ &+ \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_b(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}_b(\mathbf{r}, t)]. \end{aligned} \quad (1.239)$$

Die erste Zeile in diesem Ausdruck verhält sich asymptotisch zu allen Zeiten wie  $1/r^4$ , die zweite Zeile wie  $1/r^3$  und die dritte Zeile wie  $1/r^2$ . Verwenden wir für den Beitrag in der dritten Zeile die Bezeichnung  $\mathbf{S}_b(\mathbf{r}, t)$  und berücksichtigen wir, dass aufgrund der Eigenschaften von  $\mathbf{E}_b, \mathbf{B}_b$  der Betrag von  $\mathbf{E}_b \times \mathbf{B}_b$  durch  $\mathbf{E}_b^2$ , und die Richtung von  $\mathbf{E}_b \times \mathbf{B}_b$

durch  $[\mathbf{n}]_{\text{ret}}$  gegeben ist, so hat man

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_b(\mathbf{r}, t) &:= \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_b(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}_b(\mathbf{r}, t)] = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_b^2(\mathbf{r}, t) [\mathbf{n}]_{\text{ret}} \\ &= \frac{q^2}{4\pi c} \left[ \frac{1}{|g|^6 R^2} \{ \mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \}^2 \mathbf{n} \right]_{\text{ret}}. \end{aligned} \quad (1.240)$$

Betrachten wir einen Aufpunkt  $\mathbf{r}$  auf einer Kugelfläche mit dem Radius  $r$  (s. Abb. 1.18). Für ein nach außen orientiertes Flächenelement der Kugelfläche hat man

$$d\mathbf{f} = \mathbf{n} df \quad \text{mit} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad df = r^2 d\Omega, \quad (1.241)$$

wobei  $d\Omega$  das entsprechende Raumwinkelelement darstellt. Führt man räumliche Polarwinkel  $\Omega \equiv (\vartheta, \varphi)$  ein (s. Abb. 1.20), so gilt

$$\mathbf{n} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta), \quad d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (1.242)$$

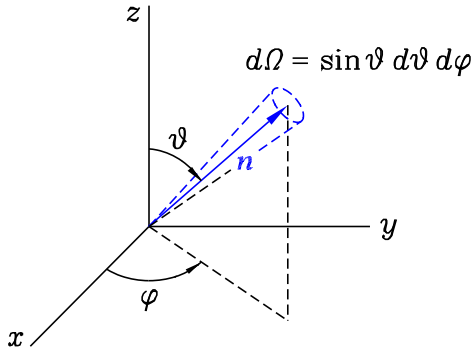


Abbildung 1.20: Festlegung einer Raumrichtung und eines Raumwinkels durch räumliche Polarwinkel

Aufgrund des asymptotischen Verhaltens der Terme in (1.239) und wegen  $\mathbf{E}_b^2(\mathbf{r}, t) \geq 0$  und  $[\mathbf{n}]_{\text{ret}} \cdot \mathbf{n} > 0$  für  $r > R_0$  existieren die folgenden Grenzwerte und ergeben für jeden Zeitpunkt endliche nichtnegative Werte:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} [\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} r^2] = \lim_{r \rightarrow +\infty} [\mathbf{S}_b(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} r^2] \geq 0, \quad (1.243)$$

$$\lim_{\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3} \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3} \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}_b(\mathbf{r}, t) > 0. \quad (1.244)$$

Es strömt also zu allen Zeiten und an allen Stellen, an denen die Normalkomponente der Energiestromdichte nicht gerade null ist, Energie durch die „unendlich ferne Oberfläche“ nach außen (Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen).

Wir betrachten nun ein endliches Beschleunigungsintervall  $T_1 \leq t' \leq T_2$  der Ladung und fragen nach der Gesamtenergie, welche von der Ladung in diesem Zeitintervall in das Raumwinkelelement  $d\Omega$  um eine vorgegebene Richtung  $\mathbf{n} \hat{=} \Omega$  abgestrahlt wird.



Will man diese Energie *experimentell* bestimmen, so muss man in einem Aufpunkt  $\mathbf{r}$  mit  $r \gg R_0$ ,  $\mathbf{r}/r = \mathbf{n}$  die im Zeitintervall

$$t_1(\mathbf{r}) \leq t \leq t_2(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} t_1(\mathbf{r}) := T_1 + \frac{R(\mathbf{r}; T_1)}{c} \\ t_2(\mathbf{r}) := T_2 + \frac{R(\mathbf{r}; T_2)}{c} \end{cases} \quad (1.245)$$

durch das zu  $\mathbf{n}$  senkrechte Flächenelement  $df = r^2 d\Omega$  hindurchtretende elektromagnetische Feldenergie messen (s. Abb. 1.21). Beachte, dass  $t'$  der retardierte Zeitpunkt zum Zeitpunkt  $t$  im Aufpunkt  $\mathbf{r}$  ist, und daher zwischen  $t'$  und  $t$  die Beziehung (1.206) besteht. Für vorgegebenes festes  $t'$  folgt daher das zugehörige  $t$  aus der Gleichung

$$t = t(\mathbf{r}; t') = t' + \frac{R(\mathbf{r}; t')}{c}.$$

Die Intervallgrenzen für  $t$  sind entsprechend durch  $t_i(\mathbf{r}) = t(\mathbf{r}; T_i)$ ,  $i = 1, 2$ , gegeben. Wie die Beziehung

$$t_2(\mathbf{r}) - t_1(\mathbf{r}) = T_2 - T_1 + \frac{R(\mathbf{r}; T_2)}{c} - \frac{R(\mathbf{r}; T_1)}{c}$$

zeigt, ist die Länge der Intervalle  $[T_1, T_2]$  und  $[t_1(\mathbf{r}), t_2(\mathbf{r})]$  *verschieden*.

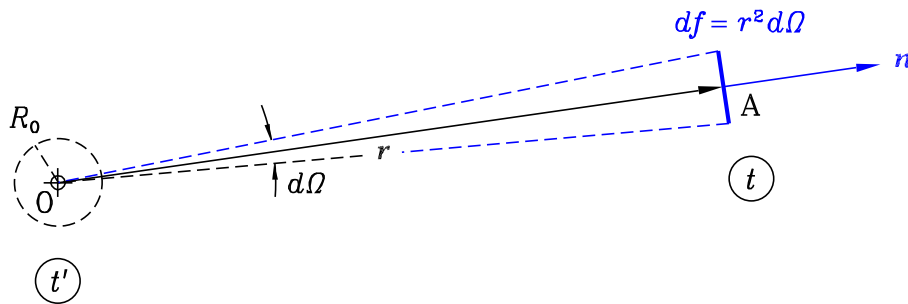


Abbildung 1.21: Zur Berechnung der Abstrahlung einer räumlich lokalisiert bewegten Punktladung

Der Experimentator kann den Energiestrom immer nur in einem *endlichen* Abstand messen. Er muss dabei  $r$  so groß wählen, dass die Terme in der ersten und zweiten Zeile von Gl. (1.239) im Rahmen seiner Messgenauigkeit keine Beiträge mehr liefern. Der Theoretiker kann die abgestrahlte Energie *exakt* berechnen, indem er den *Grenzübergang*  $r \rightarrow +\infty$  durchführt. Mit Gl. (1.240) ergibt sich auf diese Weise: Die gesamte von der Ladung während des Beschleunigungsintervalles  $T_1 \leq t' \leq T_2$  in das Raumwinkelelement  $d\Omega$  um eine vorgegebene Richtung  $\mathbf{n} \hat{=} \Omega$  abgestrahlte Energie ist gleich der gesamten im Zeitintervall  $t_1(\mathbf{r}) \leq t \leq t_2(\mathbf{r})$  durch das Flächenelement  $df = r^2 d\Omega$  im Grenzfall

$r \rightarrow +\infty$  nach außen strömenden Energie, und für diese gilt

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{t_1(r)}^{t_2(r)} dt d\Omega \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} r^2 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{t_1(r)}^{t_2(r)} dt d\Omega \mathbf{S}_b(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} r^2 = \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{t_1(r)}^{t_2(r)} dt d\Omega \frac{q^2}{4\pi c} \left[ \frac{\{\mathbf{n}(\mathbf{r}; t') \times ((\mathbf{n}(\mathbf{r}; t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))\}^6}{(1 - \mathbf{n}(\mathbf{r}; t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))^6 R^2(\mathbf{r}; t')} \mathbf{n}(\mathbf{r}; t') \right]_{t'=t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t)} &\cdot \mathbf{n} r^2. \end{aligned} \quad (1.246)$$

Führen wir bei festgehaltenem  $\mathbf{r}$  anstelle von  $t$  die Integrationsvariable  $t' = t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t)$  ein, d. h. machen wir die Variablensubstitution

$$t = t' + \frac{R(\mathbf{r}; t')}{c} \quad (\mathbf{r} \text{ fest}), \quad (1.247)$$

so gilt

$$dt = (1 - \mathbf{n}(\mathbf{r}; t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) dt',$$

$$t = t_1(\mathbf{r}) \leftrightarrow t' = T_1, \quad t = t_2(\mathbf{r}) \leftrightarrow t' = T_2,$$

und wir erhalten einen Ausdruck, in dem wir den Grenzübergang unter dem Integral durchführen können. Berücksichtigen wir dabei, dass für  $r \rightarrow +\infty$

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}; t') \rightarrow \mathbf{n}, \quad \frac{r}{R(\mathbf{r}; t')} \rightarrow 1$$

gilt (s. Abb. 1.18 auf Seite 77), so folgt

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{t_1(r)}^{t_2(r)} dt d\Omega \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} r^2 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{t_1(r)}^{t_2(r)} dt d\Omega \mathbf{S}_b(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} r^2 \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{T_1}^{T_2} dt' d\Omega \frac{q^2}{4\pi c} \frac{\{\mathbf{n}(\mathbf{r}; t') \times ((\mathbf{n}(\mathbf{r}; t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))\}^2}{(1 - \mathbf{n}(\mathbf{r}; t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))^5} \frac{r^2}{R^2(\mathbf{r}; t')} (\mathbf{n}(\mathbf{r}; t') \cdot \mathbf{n}) \\ &= \int_{T_1}^{T_2} dt' d\Omega \underbrace{\frac{q^2}{4\pi c} \frac{\{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))\}^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))^5}}_{=: d^2 U_{\text{rad}}(t', \Omega)}. \end{aligned} \quad (1.248)$$

Da  $T_1, T_2$  beliebig gewählt werden können, bedeutet  $d^2 U_{\text{rad}}(t', \Omega)$  die Energie, die eine beschleunigt bewegte Punktladung im Zeitintervall  $(t', t' + dt')$ , in welchem sie sich vom Ort  $\mathbf{r}(t')$  an den Ort  $\mathbf{r}(t' + dt') = \mathbf{r}(t') + \mathbf{v}(t') dt'$  bewegt, in das Raumwinkelement  $d\Omega$  um eine vorgegebene Richtung  $\mathbf{n} \hat{=} \Omega$  abstrahlt.

Für die Zeitvariable kann man natürlich eine beliebige Bezeichnung verwenden, insbesondere kann man in der Formel für  $d^2 U_{\text{rad}}$  statt  $t'$  überall  $t$  schreiben.<sup>96</sup>

<sup>96</sup>Bei der Ableitung der Formel für  $d^2 U_{\text{rad}}$  bedeutete  $t'$  die retardierte Zeit  $t' = t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t)$  und  $t$  die Zeit für die Messung im Aufpunkt  $\mathbf{r}$ . In der Endformel kommt  $t$  nicht mehr vor, weshalb das Symbol nun für den Bahnparameter „frei“ ist.

Die von einer beschleunigt bewegten Punktladung zum Zeitpunkt  $t$  pro Zeiteinheit in die Raumwinkeleinheit um die Richtung  $\mathbf{n} \hat{=} \Omega$  abgestrahlte Energie ist also durch

$$\frac{d^2 U_{\text{rad}}(t, \Omega)}{dt d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{\{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}(t)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t))\}^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}(t))^5} \quad (1.249)$$

gegeben. Die von einer beschleunigt bewegten Punktladung zum Zeitpunkt  $t$  pro Zeiteinheit *insgesamt* abgestrahlte Energie erhält man daraus durch Integration über alle Raumrichtungen:

$$\frac{dU_{\text{rad}}(t)}{dt} = \int_{[4\pi]} d\Omega \frac{d^2 U_{\text{rad}}(t, \Omega)}{dt d\Omega}. \quad (1.250)$$

Die Berechnung dieses Integrals ist mathematisch elementar, aber langwierig.

Für die Durchführung der Integration wählt man zweckmäßigerweise ein 1-2-3-Koordinatensystem mit 3-Richtung in Richtung von  $\mathbf{v}(t)$ .<sup>97</sup> Gilt für den betreffenden Zeitpunkt  $\dot{\mathbf{v}}(t) \parallel \mathbf{v}(t)$ , so ist die Durchführung der Integration einfach und wird deshalb dem Leser überlassen. Sind  $\mathbf{v}(t)$  und  $\dot{\mathbf{v}}(t)$  *nicht* parallel, so definieren sie eine Ebene. Diese Ebene wird als 3-1-Ebene des Koordinatensystems gewählt (s. Abb. 1.22). Ferner werden die unbestimmten Integrale

$$\int du \frac{u}{(1-u)^4} = \left(\frac{u}{2} - \frac{1}{6}\right) \frac{1}{(1-u)^3} + C,$$

$$\int du \frac{u^2}{(1-u)^5} = \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u}{3} + \frac{1}{12}\right) \frac{1}{(1-u)^4} + C$$

benützt.

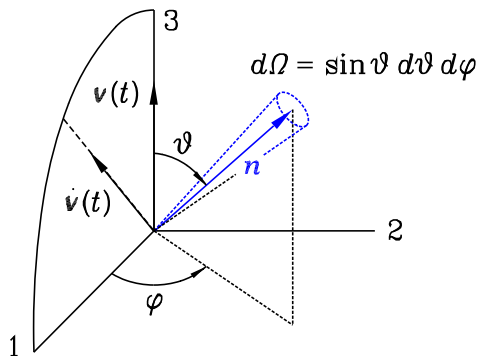


Abbildung 1.22: Wahl des Koordinatensystems für die Durchführung der Integration über den Raumwinkel

Wegen

$$\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \boldsymbol{\beta}(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}}(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}),$$

$$\{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})\}^2 = \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + 2(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - (1 - \beta^2)(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2$$

<sup>97</sup>Da  $t$  für die Integration fest ist, ist durch  $\mathbf{v}(t)$  eine feste Raumrichtung definiert.

kann man Gl. (1.249) auch in der Form

$$\frac{d^2 U_{\text{rad}}}{dt d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \left\{ \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + 2(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^4} - (1 - \beta^2) \frac{(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \right\} \quad (1.251)$$

schreiben. Setzt man diesen Ausdruck in Gl. (1.250) ein und führt man unter Benützung von  $\mathbf{n} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$  die inneren Produkte  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}$  und  $\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}$  unter Beachtung von  $\boldsymbol{\beta} = (0, 0, \beta)$ ,  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = (\dot{\beta}_1, 0, \dot{\beta}_3)$  aus, so treten die folgenden Integrale auf:

$$I_1 = \int_{[4\pi]} d\Omega \frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \frac{1}{(1 - \beta \cos \vartheta)^3} = \frac{4\pi}{(1 - \beta^2)^2}, \quad (1.252)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{[4\pi]} d\Omega \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^4} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \frac{\dot{\beta}_1 \sin \vartheta \cos \varphi + \dot{\beta}_3 \cos \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^4} \\ &= 2\pi \dot{\beta}_3 \frac{1}{\beta^2} \int_{-\beta}^{+\beta} du \frac{u}{(1 - u)^4} = \frac{16\pi}{3} \frac{\dot{\beta}_3}{(1 - \beta^2)^3}, \end{aligned} \quad (1.253)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{[4\pi]} d\Omega \frac{(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \frac{(\dot{\beta}_1 \sin \vartheta \cos \varphi + \dot{\beta}_3 \cos \vartheta)^2}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \frac{\dot{\beta}_1^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + 2\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi + \dot{\beta}_3^2 \cos^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5} \\ &= \pi \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \frac{\dot{\beta}_1^2 \sin^2 \vartheta + 2\dot{\beta}_3^2 \cos^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5} \\ &= \pi \dot{\beta}_1^2 \frac{1}{\beta} \int_{-\beta}^{+\beta} du \frac{1}{(1 - u)^5} + \pi (2\dot{\beta}_3^2 - \dot{\beta}_1^2) \frac{1}{\beta^3} \int_{-\beta}^{+\beta} du \frac{u^2}{(1 - u)^5} \\ &= 2\pi \dot{\beta}_1^2 \frac{1 + \beta^2}{(1 - \beta^2)^4} + 2\pi \left( \frac{2\dot{\beta}_3^2}{3} - \frac{\dot{\beta}_1^2}{3} \right) \frac{1 + 5\beta^2}{(1 - \beta^2)^4} \\ &= \frac{4\pi}{3} \frac{1}{(1 - \beta^2)^4} \left[ (1 - \beta^2) \dot{\beta}_1^2 + (1 + 5\beta^2) \dot{\beta}_3^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.254)$$

Mit den Integralen (1.252) bis (1.254) erhält man dann in dem gemäß Abb. 1.22 gewählten Koordinatensystem

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{rad}}}{dt} &= \frac{2q^2}{3c} \frac{1}{(1 - \beta^2)^3} \left\{ \frac{3}{2} (1 - \beta^2) (\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_3^2) + 4\beta^2 \dot{\beta}_3^2 - \frac{1}{2} (1 - \beta^2) \dot{\beta}_1^2 - \frac{1}{2} (1 + 5\beta^2) \dot{\beta}_3^2 \right\} \\ &= \frac{2q^2}{3c} \frac{1}{(1 - \beta^2)^3} \left\{ \dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_3^2 - \beta^2 \dot{\beta}_1^2 \right\}. \end{aligned} \quad (1.255)$$

Um eine für beliebige Koordinatensysteme gültige Formel zu erhalten, müssen wir dieses Ergebnis so umschreiben, dass nur die Drehinvarianten  $\beta^2 \equiv \beta^2$ ,  $\dot{\beta}^2$  und  $\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}$  vorkommen. Eine solche Formel finden wir, wenn wir davon ausgehen, dass in dem speziellen Koordinatensystem  $\dot{\beta}^2 = \dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_3^2$  und  $\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = \beta \dot{\beta}_3$  gilt. Schreiben wir also statt Gl. (1.255)

$$\frac{dU_{\text{rad}}}{dt} = \frac{2q^2}{3c} \frac{1}{(1-\beta^2)^3} \left\{ (1-\beta^2)(\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_3^2) + \beta^2 \dot{\beta}_3^2 \right\}, \quad (1.256)$$

so folgt daraus unmittelbar

$$\frac{dU_{\text{rad}}}{dt} = \frac{2q^2}{3c} \frac{1}{(1-\beta^2)^3} \left\{ (1-\beta^2) \dot{\beta}^2 + (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \right\} = \frac{2q^2}{3c} \frac{1}{(1-\beta^2)^3} \left\{ \dot{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \right\}. \quad (1.257)$$

Für die von einer beschleunigt bewegten Punktladung zum Zeitpunkt  $t$  in der Zeiteinheit insgesamt abgestrahlte Energie gilt also

$$\frac{dU_{\text{rad}}(t)}{dt} = \frac{2q^2}{3c} \frac{\dot{\beta}^2(t) - [\boldsymbol{\beta}(t) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t)]^2}{[1-\beta^2(t)]^3}. \quad (1.258)$$

Mit dem Phänomen der Abstrahlung ist das Auftreten einer Selbstkraft, der *Strahlungsrückwirkungskraft*, verbunden. Man erwartet von einem korrekten Ausdruck für die Selbstkraft, dass die von ihr in der Zeiteinheit am Teilchen geleistete Arbeit

$$\frac{dA_{\text{rad}}(t)}{dt} = \mathbf{K}^{(\text{rad})}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \quad (1.259)$$

negativ und dem Betrage nach gleich der in der Zeiteinheit abgestrahlten Energie ist. Wie wir später sehen werden (s. Abschnitt 1.18) ist aber für den abrahamschen Ausdruck für  $\mathbf{K}^{(\text{rad})}(t)$

$$-\frac{dA_{\text{rad}}(t)}{dt} \neq \frac{dU_{\text{rad}}(t)}{dt}, \quad (1.260)$$

es gilt lediglich

$$-\overline{\frac{dA_{\text{rad}}(t)}{dt}} = \overline{\frac{dU_{\text{rad}}(t)}{dt}}, \quad (1.261)$$

wobei die Querstriche geeignete *Zeitmittelwerte* bedeuten.

In Lehrbüchern findet man dazu folgende „Erklärung“: Der Grund für die Beziehungen (1.260), (1.261) sei, dass strikte Energieerhaltung nur für das *Gesamtsystem* Teilchen plus Feld gelte, wobei in der Feldenergie neben dem Beitrag des Beschleunigungsfeldes der Beitrag des Geschwindigkeitsfeldes und die „Kreuzterme“ zu berücksichtigen seien. Das „Nahfeld“ wirke als „Energiepuffer“. Neben der irreversiblen Abgabe von Energie an das Feld durch Abstrahlung erfolge noch ein reversibler Energieaustausch mit dem „Nahfeld“.

Diese „Erklärung“ krankt schon allein daran, dass in den Ausdrücken für Energiedichte und Energiestromdichte eben auch „Kreuzterme“ auftreten (s. Gl. (1.239)). Die

tatsächliche Lösung besteht in einer Änderung der Interpretation des abrahamschen Vektors  $\mathbf{K}^{(\text{rad})}(t)$  in der endgültigen Formulierung der Maxwell-Lorentz-Theorie, auf die schon auf Seite 26 bei der Diskussion der Probleme mit den Bewegungsgleichungen hingewiesen wurde.

Eine stabile Kreisbahn ist in der klassischen Physik für ein elektrisch geladenes Teilchen nur möglich, wenn die Abstrahlungsverluste dauernd durch Einwirkung von außen (durch „zwangsweises Herumführen“) kompensiert werden. Bei einem sich selbst überlassenen Wasserstoffatom müsste das Elektron nach der Maxwell-Lorentz-Theorie bei einem Anfangsabstand von einem bohrschen Radius vom Proton binnen  $3 \cdot 10^{-13}$  s auf einer Spiralbahn „zum Proton fallen“. Wie dieses Beispiel zeigt, versagt die klassische Physik im atomaren Bereich.

Wie man aus der Beziehung (1.258) sieht, nimmt die in der Zeiteinheit insgesamt abgestrahlte Energie mit Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit extrem zu.<sup>98</sup> Die durch Gl. (1.249) beschriebene Winkelverteilung zeigt im ultrarelativistischen Fall eine ausgeprägte Bevorzugung der Abstrahlung in Richtung der Momentangeschwindigkeit (in „Vorwärtsrichtung“), da im Nenner eine hohe Potenz von  $1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}(t)$  auftritt.<sup>99</sup> Gilt dagegen im betrachteten Inertialsystem  $\beta(t) \ll 1$ , so erhält man (s. Aufgabe E7)

$$\frac{d^2 U_{\text{rad}}(t, \Omega)}{dt d\Omega} \approx \frac{q^2 \dot{\mathbf{v}}^2(t)}{4\pi c^3} \sin^2 \theta(t), \quad (1.262)$$

wobei  $\theta(t)$  den Winkel zwischen  $\mathbf{n}$  und  $\dot{\mathbf{v}}(t)$  bedeutet. Die Abstrahlung ist also in Bezug auf „Vorwärts-“ und „Rückwärtsrichtungen“ symmetrisch und durch ein  $\sin^2 \theta$ -Gesetz gegeben. Für die insgesamt in der Zeiteinheit abgestrahlte Energie gilt dann die *larmorsche Formel*

$$\frac{dU_{\text{rad}}(t)}{dt} \approx \frac{2q^2 \dot{\mathbf{v}}^2(t)}{3c^3}. \quad (1.263)$$

Die Abbildungen 1.23 bis 1.25 auf den Seiten 87, 88 zeigen die Winkelverteilungen für einige typische Fälle.<sup>100</sup> Die Pfeilrichtung gibt die Richtung der Momentangeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  an, und  $\chi$  bezeichnet den Winkel zwischen der Richtung  $\mathbf{n}$  und der Richtung von  $\mathbf{v}$ . Es handelt sich um *Polardiagramme*, d. h. unter dem entsprechenden Winkel  $\chi$  ist auf dem zugehörigen Strahl  $d^2 U_{\text{rad}}/dt d\Omega$  aufgetragen, und zwar in Einheiten  $q^2 \dot{\mathbf{v}}^2/4\pi c^3$ . Beim Vergleich ist zu beachten, dass in den Polardiagrammen im Allgemeinen für verschiedene  $\beta$ -Werte verschiedene Zeicheneinheiten benützt werden (s. die auf den Abszissen eingetragenen Zahlenwerte).

Durch Untersuchung der Winkelverteilung der elektromagnetischen Strahlung mithilfe von Detektoren kann man Rückschlüsse auf den Bewegungszustand von geladenen Teilchen, etwa in Beschleunigern, ziehen, ohne die Teilchen zu „stören“.

<sup>98</sup>Für  $\beta = 0,99999999$  gilt  $1/(1 - \beta^2)^3 \simeq 10^{23}$ .

<sup>99</sup>Für  $\beta = 0,99999999$  gilt  $1/(1 + \beta)^5 \simeq 3 \cdot 10^{-2}$  und  $1/(1 - \beta)^5 = 10^{40}$ , was ein Verhältnis zwischen der Abstrahlung in „Vorwärtsrichtung“ und der Abstrahlung in „Rückwärtsrichtung“ von rund 41 Zehnerpotenzen ergibt. Diese Aussage gilt unter der Voraussetzung, dass für diese Richtungen der Zähler in Gl. (1.249) nicht „zufällig“ null ist.

<sup>100</sup>Praktische Beispiele dazu sind das geladene Teilchen im Linearbeschleuniger bzw. im Kreisbeschleuniger. Die Beschleunigung ist dann zu *allen Zeiten* parallel bzw. senkrecht zur Geschwindigkeit, während dies für die Abbildungen nur für den betrachteten Zeitpunkt  $t$  vorausgesetzt ist.

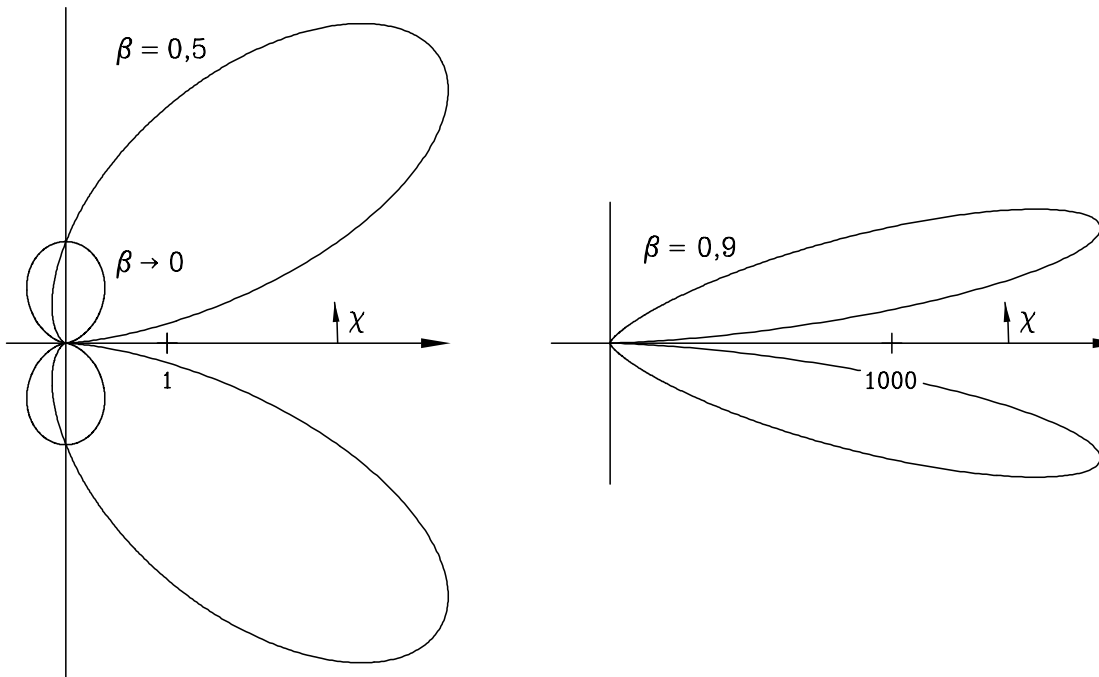


Abbildung 1.23: Winkelverteilung der Strahlung im Fall  $\dot{\mathbf{v}} \parallel \mathbf{v}$  in Einheiten  $q^2 \dot{\mathbf{v}}^2 / 4\pi c^3$  für verschiedene Werte von  $\beta = v/c$

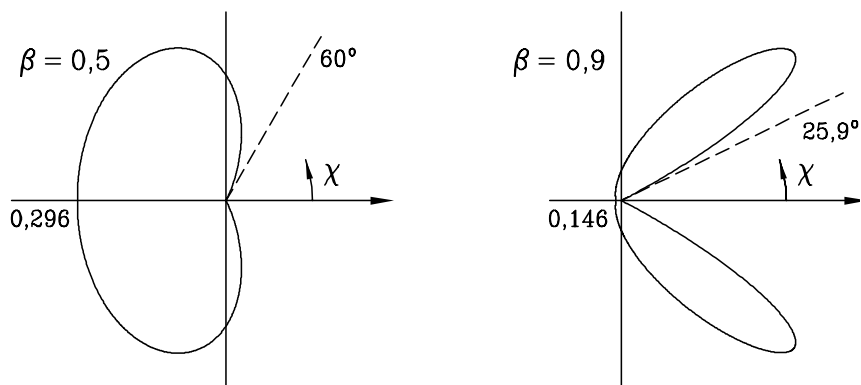


Abbildung 1.24: Vergrößerte Darstellung der Winkelverteilungen von Abbildung 1.23 (a) für  $\beta = 0,5$  und  $\beta = 0,9$  in den Winkelbereichen  $\chi > 60^\circ$  bzw.  $\chi > 25,9^\circ$

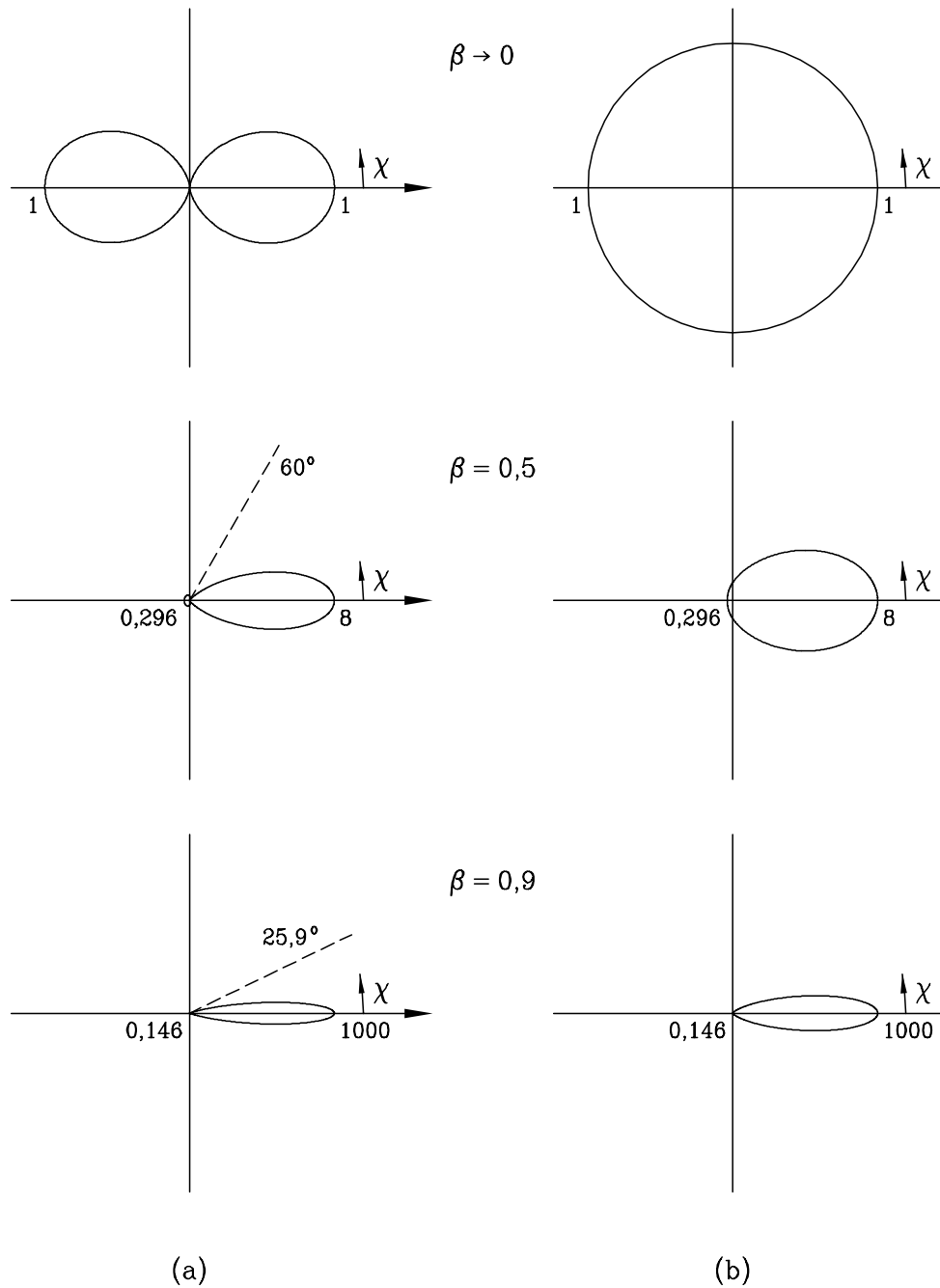


Abbildung 1.25: Winkelverteilung der Strahlung im Fall  $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$   
 in Einheiten  $q^2 \dot{\mathbf{v}}^2 / 4\pi c^3$  für verschiedene Werte von  $\beta = v/c$   
 (a) in der Ebene von  $\dot{\mathbf{v}}$  und  $\mathbf{v}$   
 (b) in der Ebene senkrecht zu  $\dot{\mathbf{v}}$ , welche  $\mathbf{v}$  enthält



## 1.17 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

Lösungen der *homogenen Maxwellgleichungen*

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.264)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.265)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.266)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.267)$$

bezeichnet man als *freie elektromagnetische Felder*. Sie spielen als einlaufende Felder, als auslaufende Felder und als Strahlungsfelder gegebener Quellverteilungen eine Rolle (siehe Seite 54 und Seite 70). Freie elektromagnetische Felder breiten sich als *elektromagnetische Wellen* aus. Physikalisch gesehen stellen freie elektromagnetische Felder Näherungen für raumzeitliche Ausschnitte aus real vorliegenden Gesamtfeldern in großen Entfernungen von Quellen dar.

Die mathematische Beschreibung von Wellenausbreitungsvorgängen ist Inhalt der **2. Grundaufgabe** der Elektrodynamik: Vorgegeben sind die Feldstärken des Wellenfeldes zum Anfangszeitpunkt  $t_0 = 0$ ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{E}_a(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{B}_a(\mathbf{r}), \quad (1.268)$$

zu berechnen ist die raumzeitliche Entwicklung des Wellenfeldes für  $t > 0$ . Die Anfangswerte müssen dabei die Bedingungen  $\operatorname{div} \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{B}_a(\mathbf{r}) = 0$  erfüllen.

Wir wissen, dass im Fall der Quellenfreiheit die elektromagnetischen Potentiale  $\varphi, \mathbf{A}$  in Lorenzgleichung homogene Wellengleichungen erfüllen. Da man aber leicht zeigen kann (s. Aufgabe E8), dass im Fall der Quellenfreiheit die kartesischen Komponenten der Feldstärken  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  selbst homogene Wellengleichungen erfüllen, ist es zweckmäßig, die Feldstärken direkt, d. h. ohne Umweg über die Potentiale, zu berechnen. Jede Lösung der homogenen Maxwellgleichungen ist notwendigerweise Lösung der *homogenen Wellengleichungen*

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{0}, \quad (1.269)$$

$$\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (1.270)$$

Umgekehrt gibt es natürlich Lösungen der homogenen Wellengleichungen, welche *nicht*

den homogenen Maxwellgleichungen genügen.<sup>101</sup> Wir müssen also *solche* Lösungen der Gleichungen (1.269), (1.270) auswählen, welche *auch* die Gleichungen (1.264) bis (1.267) erfüllen.

### 1.17.1 Fortschreitende ebene Wellen und Wellenpakete

Um die 2. Grundaufgabe zu lösen, nützt man die Linearität der Maxwellgleichungen aus, welche die Superposition von Partikulärlösungen ermöglicht. Man verschafft sich ein vollständiges System von Partikulärlösungen der homogenen Maxwellgleichungen, nach welchen man die gesuchte Lösung entwickelt. Im Prinzip kann man *irgendein* derartiges Entwicklungssystem (ebene Wellen, Kugelwellen, Zylinderwellen etc.) heranziehen, doch wird je nach der gegebenen Anfangsbedingung bzw. je nach der Geometrie der Quelle aus praktischen Gründen (Konvergenzverhalten der Entwicklung) einmal die Benützung des einen, einmal die Benützung eines anderen Entwicklungssystems zweckmäßig sein. Im Folgenden wird nur das mathematisch einfachste Entwicklungssystem, das System der ebenen Wellen, behandelt.

Wie man leicht verifizieren kann, gilt folgende mathematische Aussage: Ist  $\mathbf{n}$  ein beliebig vorgegebener reeller Einheitsvektor, und  $f$  eine beliebige zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktion einer reellen Variablen, so ist (lies „ $f$  von“)

$$u(\mathbf{r}, t) = f\left(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{c} - t\right) \quad (1.271)$$

Partikulärlösung der homogenen Wellengleichung

$$\Delta u(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (1.272)$$

Ist also  $\mathbf{n}$  ein beliebig vorgegebener reeller Einheitsvektor und sind  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  beliebige reellwertige zweimal stetig differenzierbare Vektorfunktionen einer reellen Variablen, so sind

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{c} - t\right), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{g}\left(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{c} - t\right) \quad (1.273)$$

Partikulärlösungen der homogenen Wellengleichungen (1.269), (1.270).

Verwenden wir Gl. (1.273) als *Lösungsansatz* für die homogenen Maxwellgleichungen (1.264) bis (1.267), so erhalten wir mit

$$\tau = \tau(\mathbf{r}, t) := \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{c} - t \quad (1.274)$$

aus den Gleichungen (1.264) bis (1.267) bei vorgegebenem  $\mathbf{n}$  die folgenden Bedingungen für die Funktionen  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$ :

---

<sup>101</sup>Dies ist allein aufgrund der Tatsache klar, dass die Maxwellgleichungen die Feldstärken  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  „koppeln“, während die Wellengleichungen dies nicht tun.

$$\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{f}}{d\tau} = 0, \quad (1.275) \quad \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{f}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{g}}{d\tau}, \quad (1.277)$$

$$\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{g}}{d\tau} = 0, \quad (1.276) \quad \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{g}}{d\tau} = -\frac{d\mathbf{f}}{d\tau}. \quad (1.278)$$

Integration nach  $\tau$  und Nullsetzen der dabei auftretenden additiven raumzeitlich konstanten Felder, welche keine Wellenausbreitungsvorgänge beschreiben, gibt

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} = 0, \quad (1.279) \quad \mathbf{n} \times \mathbf{f} = \mathbf{g}, \quad (1.281)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} = 0, \quad (1.280) \quad \mathbf{n} \times \mathbf{g} = -\mathbf{f}. \quad (1.282)$$

Diese teilweise redundanten Bedingungen<sup>102</sup> sagen aus: Besitzt die Vektorfunktion  $\mathbf{f}$  nur Komponenten in der zu  $\mathbf{n}$  senkrechten Ebene und gilt  $\mathbf{g} = \mathbf{n} \times \mathbf{f}$ , so erfüllt der Ansatz (1.273) die homogenen Maxwellgleichungen, d. h. (1.273) ist Partikulärintegral der homogenen Maxwellgleichungen.

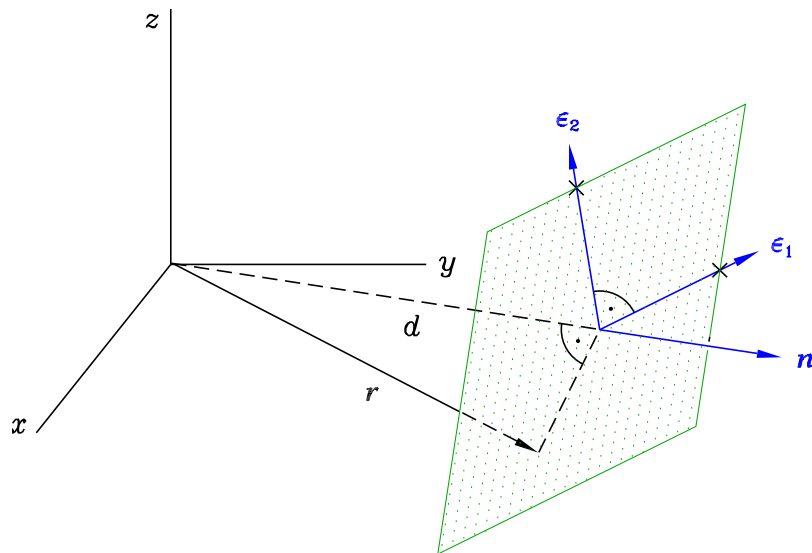


Abbildung 1.26: Zur allgemeinen fortschreitenden ebenen Welle

Führen wir zwei zueinander und zu  $\mathbf{n}$  senkrechte Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , ein (siehe Abb. 1.26), wobei  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$  ein orthonormiertes Rechtssystem bilden sollen, so muss also  $\mathbf{f}$  die Form

$$\mathbf{f}(\tau) = \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}_\alpha f_\alpha(\tau)$$

besitzen, wobei  $f_1, f_2$  Komponenten bezüglich  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  (nicht bezüglich  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ ) bedeuten. Die Vektoren  $\mathbf{e}_\alpha$  werden als *Polarisationsvektoren* bezeichnet.

<sup>102</sup>Diese Redundanz ist nicht verwunderlich, da ja die homogenen Wellengleichungen *notwendige* Bedingungen für Lösungen der homogenen Maxwellgleichungen darstellen.

Die homogenen Maxwellgleichungen (1.264) bis (1.267) besitzen also *Partikulärlösungen* vom Typ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1,2} \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{c} - t), \quad (1.283)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (1.284)$$

wobei  $\mathbf{n}$  ein beliebig vorgegebener reeller Einheitsvektor ist,  $f_1, f_2$  beliebige (nicht konstante) zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktionen einer reellen Variablen sind, und  $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \mathbf{n}$  ein orthonormiertes Dreibein (Rechtssystem) darstellt. Die Feldstärken  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  besitzen dann zu einem festen Zeitpunkt  $t$  in allen Aufpunkten  $\mathbf{r}$ , welche die Gleichung  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = d$  mit vorgegebenem festen  $d \in \mathbb{R}$  erfüllen, gleiche Werte. Die zum Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  senkrechten Ebenen (s. Abb. 1.26) stellen also geometrische Orte konstanter Feldstärken für festes  $t$  dar, weshalb man von einer *ebenen Welle* spricht. Die Feldstärkenwerte, welche zum Zeitpunkt  $t$  in einer zu  $\mathbf{n}$  senkrechten Ebene mit dem Abstand  $d$  vom Ursprung vorliegen, liegen zum Zeitpunkt  $t + \delta t$  in einer zu  $\mathbf{n}$  senkrechten Ebene mit dem Abstand  $d + \delta d$ ,  $\delta d = c \delta t$ , vor, die ebene Welle schreitet also ohne Änderung ihrer Gestalt (ohne Verzerrung oder Dämpfung) mit der Geschwindigkeit  $c$  („Vakuumlichtgeschwindigkeit“) in Richtung  $\mathbf{n}$  fort. Man bezeichnet  $\mathbf{n}$  entsprechend als *Ausbreitungsrichtung* (Fortpflanzungsrichtung) der ebenen Welle.

Die Formeln (1.283), (1.284) beschreiben die **allgemeinste fortschreitende ebene Welle mit gegebener Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$** .

Ebene elektromagnetische Wellen besitzen die Eigenschaft  $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}, \mathbf{B} \perp \mathbf{n}$ , sind also *Transversalwellen*. Ferner gilt

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{B}, \quad |\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|, \quad (1.285)$$

$$\mathbf{n}, \mathbf{E}, \mathbf{B} \text{ orthogonales Rechtssystem.} \quad (1.286)$$

Eine ebene elektromagnetische Welle ist für beliebige inertielle Beobachter eine ebene elektromagnetische Welle, die Ausbreitungsrichtung ist allerdings bezugssystemabhängig (Aberration). (Beachte, dass die Beziehungen (1.285) lorentzinvariant sind; siehe die Feldskalare Gl. (1.130).) Die Beziehung  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$  bedeutet, dass für eine elektromagnetische Welle im Vakuum elektrische und magnetische Energiedichte gleich groß sind.

Energiedichte, Energiestromdichte und Impulsdichte einer ebenen elektromagnetischen Welle sind gegeben durch:

$$u_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t), \quad (1.287)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} = u_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t) c \mathbf{n}, \quad (1.288)$$

$$\mathcal{P}_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)}{c^2} = \frac{u_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t)}{c} \mathbf{n}. \quad (1.289)$$

Beachte die folgende Korrespondenz: Für das Photon gilt  $|\mathbf{p}| = E/c$ .

Eine ebene Welle heißt *aperiodisch* oder *periodisch*, je nachdem, ob sich die elektromagnetischen Feldstärken in den festen Ebenen  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \text{konst.}$  zeitlich aperiodisch oder zeitlich periodisch ändern. Eine periodische ebene Welle heißt insbesondere *harmonisch*, wenn diese zeitliche Änderung zeitlich harmonisch (sinus- bzw. cosinusförmig) ist. Da eine harmonische ebene Welle durch eine einzige Frequenz charakterisiert ist, bezeichnet man sie auch als *monochromatisch*. Jede nichtmonochromatische periodische ebene Welle und jede aperiodische ebene Welle lässt sich durch Überlagerung von monochromatischen ebenen Wellen mit gleicher Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$  und verschiedenen Frequenzen aufbauen (Fourierreihe einer periodischen Funktion bzw. Darstellung als Fourierintegral für eine aperiodische Funktion).

Die allgemeinste harmonische (monochromatische) fortschreitende ebene Welle mit der Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$  erhält man, wenn man in Gl. (1.283) für die Funktionen  $f_\alpha$

$$f_\alpha(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{c} - t) = E_{0\alpha} \cos[\omega(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{c} - t) + \delta_\alpha], \quad (1.290)$$

$$E_{0\alpha} \geq 0 \quad (\text{nicht für beide } \alpha\text{-Werte null}), \quad (1.291)$$

$$\delta_\alpha \in [0, 2\pi), \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.292)$$

setzt. Dabei ist  $\omega$  die *Kreisfrequenz* der Welle. Weitere für die monochromatische Welle wichtige Größen bzw. Beziehungen sind:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{Frequenz}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{zeitliche}) \text{ Periode}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega} = cT \quad \text{Wellenlänge (räumliche Periode)}$$

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{Kreiswellenzahl}$$

$$\omega(k) = ck \quad \text{Dispersionsbeziehung}$$

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega(k)}{k} = c \quad \text{(Betrag der) Phasengeschwindigkeit}$$

$$\mathbf{k}(\omega) = k(\omega) \mathbf{n} \quad \text{Kreiswellenzahlvektor}$$

Die **allgemeinste monochromatische fortschreitende ebene Welle mit Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$  und Kreisfrequenz  $\omega$**  besitzt also die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\alpha=1,2} E_{0\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} \cos\left[\frac{\omega}{c} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) + \delta_{\alpha}\right] \\ &= \sum_{\alpha=1,2} E_{0\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} \cos[\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_{\alpha}] \quad (1.293) \end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha=1,2} E_{0\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(k) t + \delta_{\alpha}],$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (1.294)$$

Die Frequenz kann dabei einen beliebigen positiven Wert besitzen. Der *experimentell* erforschte Frequenzbereich reicht von  $\nu = 10^3$  Hertz bis  $\nu = 10^{24}$  Hertz (s. Abb. 1.27). Der sichtbare Spektralbereich liegt zwischen  $\nu = 4 \cdot 10^{14}$  Hertz und  $\nu = 7,5 \cdot 10^{14}$  Hertz.

In der Speziellen Relativitätstheorie erhält man unter Benützung der Einstein-de Broglie-Beziehungen für Energie und Impuls des Photons die Aussage, dass die Größen  $\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z$  Komponenten eines Vierervektors, des Kreiswellenzahl-Vierervektors  $\underline{k}$ , bilden:

$$\text{I: } (k^{\mu}) = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right) = \frac{\omega}{c} (1, \mathbf{n}). \quad (1.295)$$

Dies gestattet die Ableitung der Formeln für die Aberration und den Dopplereffekt.

Aus Gl. (1.295) folgt, dass die Phase  $\phi(\mathbf{r}, t) := \mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r} - \omega t$  einer monochromatischen ebenen Welle ein *Viererskalarfeld* in Bezug auf homogene Lorentztransformationen darstellt:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = -\underline{k} \cdot \underline{x}, \quad \phi'(\mathbf{r}', t') = \phi(\mathbf{r}, t). \quad (1.296)$$

Diese wichtige Aussage kann man auch in der klassischen Feldtheorie der elektromagnetischen Strahlung ableiten, indem man in das Transformationsgesetz der Feldstärken bei Wechsel des Inertialsystems  $I \rightarrow I'$  die Ausdrücke von Gl. (1.293), (1.294) einsetzt. Aberration und Dopplereffekt können somit bereits auf dem Boden der klassischen Feldtheorie erklärt werden.

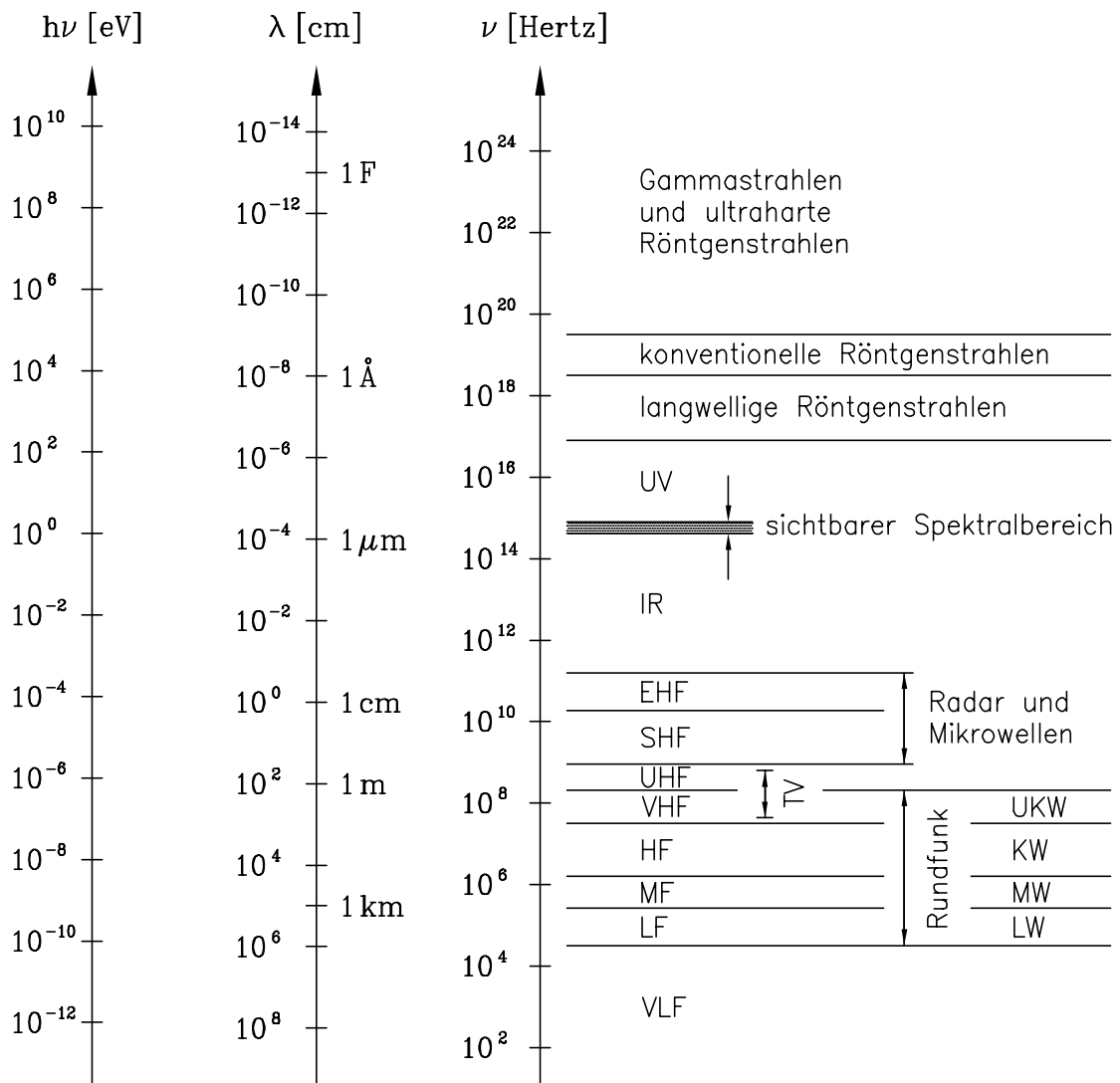


Abbildung 1.27: Experimentell erforschter Frequenzbereich elektromagnetischer Wellen

VLF ... very low frequency, LF ... low frequency, MF ... medium frequency,  
 HF ... high frequency, VHF ... very high frequency, UHF ... ultra high frequency,  
 SHF ... super high frequency, EHF ... extremely high frequency

*Polarisationszustand einer monochromatischen ebenen Welle*

Je nach der relativen Phase und dem Amplitudenverhältnis,

$$\chi := \delta_2 - \delta_1 \in [0, 2\pi), \quad \frac{E_{01}}{E_{02}} \in [0, +\infty), \quad (1.297)$$

handelt es sich um *elliptisch*, *zirkular* oder *linear polarisierte Strahlung*, d. h. die Spitze des  $\mathbf{E}$ -Vektors durchläuft in einer festen Ebene  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \text{konst.}$  im Laufe der Zeit eine Ellipse, einen Kreis oder eine Strecke (s. dazu Abb. 1.28 und Aufgabe E9). Man spricht im

Allgemeines von *rechtselliptischer* bzw. *rechtszirkularer* Strahlung, wenn die Polarisationsellipse bzw. der Polarisationskreis von der Spitze des  $\mathbf{E}$ -Vektors im Uhrzeigersinn durchlaufen wird, wofern man der Welle „nachblickt“ (Rechtsschraube bezüglich der Richtung  $\mathbf{n}$ ). Zirkulare Polarisation liegt vor, wenn  $\chi = \frac{\pi}{2}$  oder  $\frac{3\pi}{2}$  und  $E_{01} = E_{02}$  gilt.

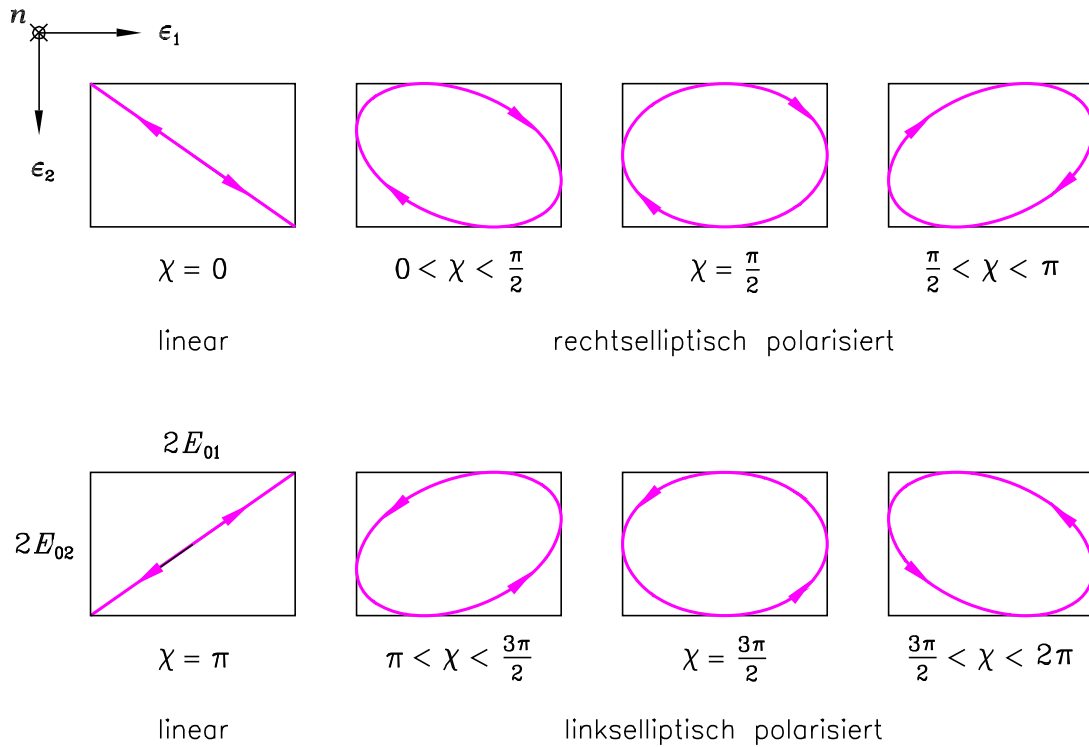


Abbildung 1.28: Polarisationszustand einer monochromatischen ebenen Welle

Betrachten wir speziell den Fall der linearen Polarisation: Für  $\chi = 0$  bzw.  $\pi$  folgt aus den Gleichungen (1.293), (1.294) mit  $\delta \equiv \delta_1$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \boldsymbol{\epsilon} \cos[\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta], \quad (1.298)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (1.299)$$

$$E_0 = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{E_{01} \boldsymbol{\epsilon}_1 \pm E_{02} \boldsymbol{\epsilon}_2}{\sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2}} \quad \text{für} \quad \chi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}. \quad (1.300)$$

Der *Polarisationsvektor*  $\boldsymbol{\epsilon} \perp \mathbf{n}$  gibt die *Polarisationsrichtung* der linear polarisierten ebenen Welle an, und die von  $\mathbf{n}$  und  $\boldsymbol{\epsilon}$  aufgespannte Ebene heißt *Polarisationsebene* der Welle („Schwingungsebene“ von  $\mathbf{E}$ ). Die Feldstärken  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  besitzen jeweils gleiche Amplitude und Phase (s. Abb. 1.29).



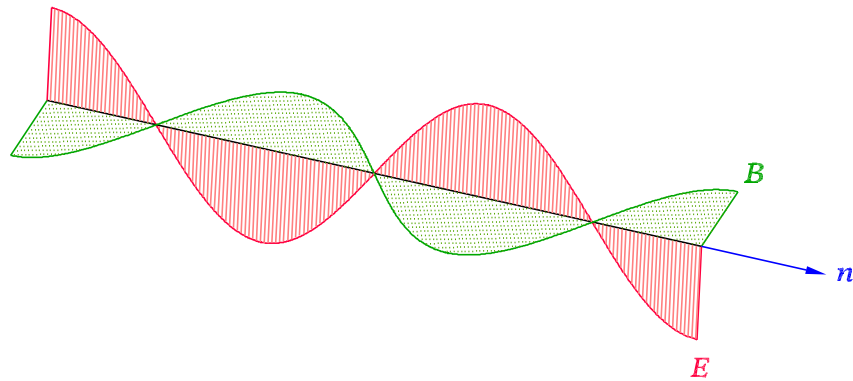


Abbildung 1.29: Linear polarisierte monochromatische ebene Welle

*Intensität einer monochromatischen ebenen Welle*

Die *Intensität* einer monochromatischen Welle wird als Betrag des Zeitmittels des Poyntingvektors über eine Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  definiert:

$$I(\mathbf{r}) := |\overline{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)}|, \quad \overline{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt \mathbf{S}(\mathbf{r}, t). \quad (1.301)$$

Wie man leicht zeigen kann (siehe die Aufgabe E10), folgt daraus mit der Formel (1.71) für den Poyntingvektor für die ebene monochromatische Welle Gl. (1.293), (1.294) die ortsunabhängige Intensität

$$I = \frac{c}{4\pi} \overline{\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t)} = \frac{c}{8\pi} (E_{01}^2 + E_{02}^2). \quad (1.302)$$

Durch Überlagerung monochromatischer fortschreitender ebener Wellen<sup>103</sup> gleicher Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$ , deren Kreisfrequenzen ganzzahlige Vielfache einer *Grundfrequenz*  $\omega$  sind, erhält man die **allgemeinste periodische fortschreitende ebene Welle mit Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$** :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1,2} \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} \sum_{l=1}^{\infty} E_{0\alpha}^{(l)} \cos\left[\frac{l\omega}{c} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) + \delta_{\alpha}^{(l)}\right], \quad (1.303)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (1.304)$$

Zeitliche Periode und Wellenlänge sind wieder durch die Beziehungen

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = cT \quad (1.305)$$

<sup>103</sup>Dabei können die Teilwellen natürlich verschiedene Amplituden und Phasen besitzen.

gegeben. Gilt für mindestens zwei  $l$ -Werte  $(E_{01}^{(l)}, E_{02}^{(l)}) \neq (0, 0)$ , so handelt es sich um eine *nichtmonochromatische* periodische ebene Welle.

Überlagert man monochromatische fortschreitende ebene Wellen gleicher Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$ , deren Kreisfrequenzen *nicht* ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz sind, so erhält man aperiodische Wellen. In den Anwendungen hat man es dabei im Allgemeinen mit Überlagerungen zu tun, bei denen die enthaltenen Frequenzen aus einem Kontinuum stammen. Lassen wir aber Amplitudenfunktionen mit  $\delta$ -förmigen Singularitäten zu, so können wir auch Fälle einbeziehen, in denen diskrete Frequenzen vorkommen. Die **allgemeinste aperiodische fortschreitende ebene Welle mit Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$**  lautet dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\alpha=1,2} \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} \int_0^{+\infty} d\omega E_{0\alpha}(\omega) \cos\left[\frac{\omega}{c}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) + \delta_{\alpha}(\omega)\right] \\ &= \sum_{\alpha=1,2} \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} \int_0^{+\infty} d\omega E_{0\alpha}(\omega) \cos[\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_{\alpha}(\omega)], \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (1.306)$$

$$(1.307)$$

Da eine periodische Welle keine Information außer ihrer Periode vermitteln kann, benötigt man zur Informationsübermittlung aperiodische Wellen. *Ebene* aperiodische Wellen sind aber noch insofern unrealistisch, als ihnen eine unendliche Gesamtenergie zukommt.<sup>104</sup> Sie kommen daher nur als Näherungen für die Beschreibung von raumzeitlichen Ausschnitten aus realistischen Signalen in Frage. Zur exakten Beschreibung von realistischen Ausbreitungsvorgängen muss man geeignete Überlagerungen von ebenen Wellen *verschiedener* Ausbreitungsrichtungen  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$  bilden. Derartige Überlagerungen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \mathbf{E}_{0\alpha}(\mathbf{k}) \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(k)t + \delta_{\alpha}(\mathbf{k})], \quad (1.308)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \left(\frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}_{0\alpha}(\mathbf{k})\right) \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(k)t + \delta_{\alpha}(\mathbf{k})] \quad (1.309)$$

$(\mathbf{k}, \mathbf{E}_{01}(\mathbf{k}), \mathbf{E}_{02}(\mathbf{k}))$  orthogonales Rechtssystem) nennt man **Wellenpakete**. Die Partialwellen haben zwar alle eine Geschwindigkeit vom Betrag  $c$ , „laufen“ aber in verschiedene Richtungen  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ . Wellenpakete ändern deshalb ihre Gestalt im Laufe der Zeit, sie

<sup>104</sup>Da die Feldstärken in den zur Ausbreitungsrichtung senkrechten Ebenen nicht gegen null streben, kann das über den ganzen Raum erstreckte Integral über die Energiedichte nicht existieren.

„zerfließen“. Im *engeren Sinne* spricht man von einem Wellenpaket, wenn die Amplitudenfunktionen  $\mathbf{E}_{01}(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{E}_{02}(\mathbf{k})$  nur für  $\mathbf{k}$ -Vektoren „um ein  $\mathbf{k}_0$  herum“ wesentlich von null verschieden sind. Das Wellenpaket pflanzt sich dann „als Ganzes“ mit der Geschwindigkeit  $c\mathbf{n}_0 = c\mathbf{k}_0/k_0$  fort und stellt ein langsam zerfließendes Signal dar.

Da die fortschreitenden ebenen Wellen aller Ausbreitungsrichtungen und aller Frequenzen – wie man beweisen kann – ein vollständiges Entwicklungssystem für Lösungen der homogenen Maxwellgleichungen (1.264) bis (1.267) bilden, lässt sich die Lösung der 2. Grundaufgabe in der Form (1.308), (1.309) schreiben, wobei die Amplitudenfunktionen  $\mathbf{E}_{0\alpha}(\mathbf{k})$  und die Phasenfunktionen  $\delta_\alpha(\mathbf{k})$  aus den Anfangsbedingungen (1.268) berechnet werden können.

Führt man für jedes  $\mathbf{k}$  zwei zueinander und zu  $\mathbf{k}$  senkrechte Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k})$  ein, sodass  $\mathbf{e}_1(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{e}_2(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{k}/k$  ein orthonormiertes Rechtssystem bilden, so gilt:

$$\mathbf{E}_{0\alpha}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \left| \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left[ \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{B}_a(\mathbf{r}) \right] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right| \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}), \quad (1.310)$$

$$\delta_\alpha(\mathbf{k}) = \arg \left\{ \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left[ \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{B}_a(\mathbf{r}) \right] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right\}. \quad (1.311)$$

Wie wir gesehen haben, breiten sich in einem Inertialsystem im Vakuum beliebige elektromagnetische Wellen mit der Geschwindigkeit  $c$  aus. Dies bietet die Möglichkeit für eine „bequemere“ Uhrensynchronisation, als es der „unendlich langsame“ Uhrentransport darstellt: Im Bezugsraum wird von einem im Koordinatenursprung befindlichen Beobachter zu dem Zeitpunkt, zu dem seine Uhr die Zeit 0 anzeigt, eine Kugelwelle ausgesendet, und der an der Ortsmarke  $x, y, z$  befindliche Hilfsbeobachter stellt bei Eintreffen dieses Lichtsignals die an seiner Ortsmarke befindliche Uhr auftragsgemäß auf die Zeit  $t = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}/c$ .

### 1.17.2 Komplexe Schreibweise

*Lineare* Operationen wie Addition, Subtraktion, Differentiation und Integration von komplexwertigen Feldfunktionen vermengen niemals Real- und Imaginärteile, da für komplexe Zahlen  $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$  gilt. Solange man es daher in der Maxwelltheorie mit den Feldgleichungen selbst sowie mit in den Feldstärken linearen Ausdrücken zu tun hat, kann man als mathematischen „Trick“ zur Vereinfachung der Rechnungen komplexe Feldgrößen einführen. Ein Beispiel: Will man verifizieren, dass die allgemeine monochromatische Welle Gl. (1.293), (1.294) die Feldgleichungen (1.264) bis (1.267)

erfüllt, so zeigt man, dass

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) := \sum_{\alpha=1,2} E_{0\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_\alpha e^{i[\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t+\delta_\alpha]}, \quad (1.312)$$

$$\mathbf{B}_c(\mathbf{r}, t) := \mathbf{n} \times \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{k}(\omega) = k(\omega) \mathbf{n}, \quad (1.313)$$

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \mathbf{n} \text{ orthonormiertes Dreibein} \quad (1.314)$$

die Feldgleichungen (1.264) bis (1.267) erfüllt. Da der Nablaoperator und der Operator der Zeitableitung hinsichtlich der Wirkung auf  $\mathbf{E}_c, \mathbf{B}_c$  Gl. (1.312), (1.313) durch

$$\boldsymbol{\nabla} \rightarrow i\mathbf{k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \quad (1.315)$$

ersetzt werden können, ist die Rechnung mit  $\mathbf{E}_c, \mathbf{B}_c$  wesentlich einfacher. Das Ergebnis der Rechnung ist dann, dass Real- und Imaginärteil *für sich* die Feldgleichungen (1.264) bis (1.267) erfüllen, dass also insbesondere die *physikalischen Felder*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re } \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t), \quad (1.316)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re } \mathbf{B}_c(\mathbf{r}, t) \quad (1.317)$$

die Feldgleichungen erfüllen.

Es ist dann zweckmäßig mit  $\mathbf{E}_c, \mathbf{B}_c$  weiterzurechnen, solange ausschließlich lineare Operationen auf die Feldgrößen angewendet werden (z. B. Aufbau von allgemeinen ebenen Wellen und von Wellenpaketen durch lineare Überlagerung monochromatischer ebener Wellen). Die Funktionalgleichung  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$  der Exponentialfunktion gestattet es nämlich,  $\mathbf{E}_c, \mathbf{B}_c$  einfacher anzuschreiben. So hat man beispielsweise für den Ausdruck (1.312)

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a} e^{i[\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t]} \quad (1.318)$$

mit dem *komplexen Amplitudenvektor*

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=1,2} \boldsymbol{\epsilon}_\alpha E_{0\alpha} e^{i\delta_\alpha} \quad (1.319)$$

und für das zu  $\mathbf{E}$  Gl. (1.306) gehörige  $\mathbf{E}_c$

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \int_0^{+\infty} d\omega \mathbf{a}(\omega) e^{i[\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t]} \quad (1.320)$$

mit

$$\mathbf{a}(\omega) = \sum_{\alpha=1,2} \boldsymbol{\epsilon}_\alpha E_{0\alpha}(\omega) e^{i\delta_\alpha(\omega)}. \quad (1.321)$$

Erst wenn *nichtlineare* Ausdrücke vorkommen, muss man vor dem Einsetzen zu den Realteilen übergehen, da  $\text{Re}(z_1 z_2) \neq \text{Re } z_1 \text{Re } z_2$  ist. So gilt für die Energiestromdichte

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{c}{4\pi} (\text{Re } \mathbf{E}_c \times \text{Re } \mathbf{B}_c) \neq \frac{c}{4\pi} \text{Re}(\mathbf{E}_c \times \mathbf{B}_c). \quad (1.322)$$

Bei der Untersuchung der Wellenausbreitung im Vakuum konnten wir ganz gut ohne die komplexe Schreibweise „leben“. Bei der Behandlung der Wellenausbreitung in linearen Medien mit Dispersion und Absorption sowie bei der Behandlung von Reflexion und Brechung erweist sich aber die komplexe Schreibweise als unentbehrlich, da die Rechnungen sonst zu kompliziert werden und die Interpretation der Ergebnisse – falls man überhaupt zu Ergebnissen gelangt – viel schwieriger ist.

Siehe die Aufgabe E11.

## 1.18 Rückwirkung der Strahlung auf die Bewegung der Quellen

Wir haben uns mit der Frage der Selbstkraft einer beschleunigt bewegten Ladung bereits im ersten Punkt von Abschnitt 1.7 sowie in Abschnitt 1.9 befasst. Hier werden zunächst das abrahamsche Selbstkraftpostulat und die daraus folgende Formel für die Selbstkraft angegeben, und es werden die resultierenden Probleme für die endgültige Formulierung der „wahren“ Grundgesetze der Maxwell-Lorentz-Theorie und die Überwindung dieser Probleme skizziert. Am Ende des Abschnittes erörtern wir, welche Überlegungen das abrahamsche Selbstkraftpostulat nahe legen.

*Postulat: Selbstkraft: abrahamsche Strahlungsrückwirkungskraft*

Die Selbstkraft auf eine Ladung  $q_a$  ist zum Zeitpunkt  $t$  durch

$$\mathbf{K}_a^{(\text{rad})}(t) = q_a \left[ \mathbf{E}_{a,-}(\mathbf{r}_a(t), t) + \frac{\mathbf{v}_a(t)}{c} \times \mathbf{B}_{a,-}(\mathbf{r}_a(t), t) \right] \quad (1.323)$$

gegeben. Dabei sind  $\mathbf{E}_{a,-}$ ,  $\mathbf{B}_{a,-}$  durch

$$\mathbf{E}_{a,-}(\mathbf{r}, t) := \frac{1}{2} \left[ \mathbf{E}_{a,\text{ret}}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}_{a,\text{av}}(\mathbf{r}, t) \right], \quad (1.324)$$

$$\mathbf{B}_{a,-}(\mathbf{r}, t) := \frac{1}{2} \left[ \mathbf{B}_{a,\text{ret}}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{B}_{a,\text{av}}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (1.325)$$

definiert.

Das retardierte Feld einer Punktladung (Liénard-Wiechert-Feld) wurde in Abschnitt 1.15.2 berechnet, das entsprechende avancierte Feld kann auf analoge Weise erhalten

werden. Da wir die Berechnung der Formel für  $\mathbf{K}_a^{(\text{rad})}(t)$  aus den Beziehungen (1.323) bis (1.325) wegen ihrer Kompliziertheit und Langwierigkeit ohnehin nicht durchführen können<sup>105</sup>, schreiben wir das avancierte Feld einer Punktladung hier gar nicht an.

Der für die Selbstkraft angesetzte Ausdruck sieht formal wie ein Lorentzkraftterm aus, für das Eigenfeld wird aber nicht das *retardierte* Feld der Ladung  $q_a$  genommen – diese Wahl hat im „vorläufigen“ Kraftgesetz zum Problem der unendlichen Selbstkraft geführt –, sondern eine spezielle Lösung der *homogenen* Feldgleichungen, die wie man zeigen kann für  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a(t)$  endlich ist, sodass das obige Postulat jedenfalls auf eine *endliche Selbstkraft* führt. Wie bereits auf Seite 18 besprochen wurde, ist in der klassischen mikroskopischen Elektrodynamik das Selbstkraftproblem auf eine Weise zu lösen, die keinerlei Bezugnahme auf (bzw. Annahmen über) innere Struktur, innere Ladungsverteilung und Größe der Ladung enthält. Nur Lösungen der *homogenen* Feldgleichungen werden dieser qualitativen Forderung gerecht. Welche Lösung der homogenen Feldgleichungen zu wählen ist, lässt sich daraus natürlich nicht ersehen.

Setzt man die Feldstärken von Gl. (1.324), (1.325) in Gl. (1.323) ein, so kann man  $\mathbf{K}_a^{(\text{rad})}(t)$  vollständig durch Teilchenvariablen ausdrücken. Die entsprechende Rechnung ist allerdings kompliziert und erfordert die Benützung des Vierertensorformalismus. Das Ergebnis für die Viererkraft lautet:

$$\mathcal{K}_a^{(\text{rad})\mu} = \frac{2q_a^2}{3c^3} \left( \frac{d\beta_a^\mu}{d\tau_a} - \frac{\beta_a \cdot \beta_a}{c^2} \nu_a^\mu \right). \quad (1.326)$$

Berücksichtigt man die Beziehung

$$(\mathcal{K}_a^{(\text{rad})\mu}) = \gamma(v_a) \left( \frac{\mathbf{K}_a^{(\text{rad})} \cdot \mathbf{v}_a}{c}, \mathbf{K}_a^{(\text{rad})} \right) \quad (1.327)$$

und die Ausdrücke für Vierergeschwindigkeit und Viererbeschleunigung, so erhält man daraus für die abrahamsche Strahlungsrückwirkungskraft der Ladung  $q_a$  (Argument  $t$  weggelassen).

#### Abrahamsche Strahlungsrückwirkungskraft

$$\mathbf{K}_a^{(\text{rad})} = \frac{2q_a^2}{3c^3} \left[ 5\gamma^6(v_a) \frac{(\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{b}_a)^2}{c^4} \mathbf{v}_a + 2\gamma^4(v_a) \frac{b_a^2}{c^2} \mathbf{v}_a + \gamma^4(v_a) \frac{\mathbf{v}_a \cdot \dot{\mathbf{b}}_a}{c^2} \mathbf{v}_a + 3\gamma^4(v_a) \frac{\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{b}_a}{c^2} \mathbf{b}_a + \gamma^2(v_a) \dot{\mathbf{b}}_a \right]. \quad (1.328)$$

Die Bewegungsgleichungen (1.44) mit (1.41) bis (1.43) und (1.328) heißen *Lorentz-Abraham-Dirac-Gleichungen*.<sup>106</sup> Da die Abrahamkraft nicht nur von  $\mathbf{v}_a(t)$  und  $\mathbf{b}_a(t)$ , sondern

<sup>105</sup>Man findet die Rechnung in Abschnitt 6-5 von Rohrlich, F.: Classical Charged Particles. World Scientific, Singapore 2007.

<sup>106</sup>Dirac leitete diese Gleichungen 1938 als erster in *offensichtlich lorentzkovarianter* Form ab.

auch von  $\dot{\mathbf{b}}_a(t)$  abhängt, ergeben sich die bereits auf Seite 26 besprochenen Schwierigkeiten.

Aus der Lorentz-Abraham-Dirac-Gleichung für das Teilchen  $a$  kann man ablesen, dass die Berücksichtigung von  $\mathbf{K}_a^{(\text{rad})}(t)$  in der Bewegungsgleichung, d. h. bei der Berechnung von  $\mathbf{r}_a(t)$ , tatsächlich – wie bereits in Abschnitt 1.14 festgehalten wurde – nur dann nötig ist, wenn das geladene Teilchen eine Geschwindigkeit mit einem Betrag nahe an  $c$  erreicht *und* seinen Bewegungszustand in Zeitintervallen der Größenordnung

$$\Delta\tau_a = \frac{2q_a^2}{3m_a c^3}, \quad (1.329)$$

d. h. auf Strecken der Größenordnung  $c\Delta\tau_a$  merklich ändert.

Für die folgenden Betrachtungen lasse ich den Teilchenindex weg. Die Formel für die Abrahamkraft lautet dann

$$\mathbf{K}^{(\text{rad})} = \frac{2q^2}{3c^3} \left[ 5\gamma^6(v) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{b})^2}{c^4} \mathbf{v} + 2\gamma^4(v) \frac{b^2}{c^2} \mathbf{v} + \gamma^4(v) \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{b}}}{c^2} \mathbf{v} + 3\gamma^4(v) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}}{c^2} \mathbf{b} + \gamma^2(v) \dot{\mathbf{b}} \right]. \quad (1.330)$$

Berechnet man mit diesem Ausdruck die von  $\mathbf{K}^{(\text{rad})}$  in der Zeiteinheit an der Ladung geleistete Arbeit Gl. (1.259) und vergleicht man mit der Formel für die von der Ladung in der Zeiteinheit abgestrahlte Energie Gl. (1.258), so sieht man, dass tatsächlich  $-dA_{\text{rad}}(t)/dt \neq dU_{\text{rad}}(t)/dt$  gilt.

Ist die Geschwindigkeit der Ladung betragsmäßig klein gegen  $c$ , so vereinfacht sich der Ausdruck für  $\mathbf{K}^{(\text{rad})}$  beträchtlich und die Verhältnisse werden wesentlich übersichtlicher. Es ergibt sich dann

$$\mathbf{K}^{(\text{rad})}(t) \approx \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}(t) \quad (1.331)$$

und somit

$$-\frac{dA_{\text{rad}}(t)}{dt} = -\mathbf{K}^{(\text{rad})}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \approx -\frac{2q^2}{3c^3} \mathbf{v}(t) \cdot \ddot{\mathbf{v}}(t), \quad (1.332)$$

während nach der Larmorschen Formel (1.263)

$$\frac{dU_{\text{rad}}(t)}{dt} \approx \frac{2q^2}{3c^3} \dot{\mathbf{v}}^2(t) \quad (1.333)$$

gilt.

Verläuft die Bewegung der Ladung über ein endliches Zeitintervall *gleichmäßig beschleunigt* ( $\dot{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$ ,  $\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ ), so ist während dieses Zeitintervalls  $\mathbf{K}^{(\text{rad})} = \mathbf{0}$ , obwohl die Ladung dauernd Energie abstrahlt. (Allerdings besteht – wie schon auf Seite 85 erwähnt – die Gleichheit von  $-dA_{\text{rad}}(t)/dt$  und  $dU_{\text{rad}}(t)/dt$  im Zeitmittel über ein hinreichend langes Intervall. In Aufgabe E12 ist dies für den Fall einer periodischen Bewegung zu beweisen.)

Gilt in einem bestimmten Augenblick  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ ,  $\ddot{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$ , so wird in diesem Augenblick nichts abgestrahlt, es gilt aber für diesen Augenblick  $\mathbf{K}^{(\text{rad})} \neq \mathbf{0}$ .

Wie bereits auf Seite 85 erwähnt, verschwinden alle diese Ungereimtheiten, wenn man die Interpretation der Abrahamkraft als Strahlungsrückwirkungskraft fallen lässt. Die korrekte Beschreibung der Strahlungsrückwirkung findet man im Buch von Rohrlich.<sup>107</sup>

<sup>107</sup>S. Abschnitt 6-7 und Supplement, Teil B, von Rohrlich, F.: Classical Charged Particles. World Scientific, Singapore 2007.

Um die unphysikalischen Lösungen der Lorentz-Abraham-Dirac-Gleichungen auszuschließen – es handelt sich dabei um Lösungen, bei denen es ohne äußere Kraft zu einem Anwachsen der Geschwindigkeit kommt, weshalb man von „runaway“-Lösungen spricht – und eine korrekte Formulierung der Anfangsbedingungen zu ermöglichen, ging Rohrlich 1961 unter Hinzunahme der *asymptotischen Bedingungen*

$$\lim_{r_a \rightarrow +\infty} \beta_a^\mu = 0 \quad (1.334)$$

zu bis auf das Fehlen der unphysikalischen Lösungen äquivalenten *Integrodifferentialgleichungen* über, welche er als die *wahren Bewegungsgleichungen* bezeichnete.<sup>108</sup> Die Bedingungen (1.334) bedeuten, dass die Bewegung von Ladungen, welche ins räumlich Unendliche gelangen, kräftefrei, also unbeschleunigt sein muss.

Ein Rest von „unphysikalischem Verhalten“ blieb aber: Die rohrlichschen Bewegungsgleichungen liefern für den Fall, dass eine äußere Kraft *plötzlich* eingeschaltet wird, eine „Vorausbeschleunigung“ (Präacceleration) der Ladung. Dieser akausale Effekt ist allerdings auf ein makroskopisch sehr kleines Zeitintervall der Größenordnung  $\Delta\tau_a$  beschränkt. (Für das Elektron gilt  $\Delta\tau_e \approx 6 \cdot 10^{-24}$  s.) Dieses Zeitintervall ist so kurz, dass man es weder mit makroskopischen Hilfsmitteln messen, noch eine äußere Kraft mit derartiger zeitlicher Präzision einschalten kann. Rohrlich sprach deshalb von einem Mangel an *mikroskopischer Kausalität*, aber der für eine klassische Theorie erforderlichen Eigenschaft der *makroskopischen Kausalität*.

Es dauerte weitere 39 Jahre, bis die echten „wahren“ Bewegungsgleichungen gefunden wurden, *gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung*, die keinerlei unphysikalische Züge wie „runaway“-Lösungen, Prä- oder Postacceleration enthalten.<sup>109</sup> Eine für „gewöhnlich Sterbliche“ verständliche Behandlung dieser neuen Bewegungsgleichungen findet man in den Abschnitten 9-4, 9-5 und im Supplement (der schon in den bisherigen Fußnoten zitierten) 2007-er Auflage des Buches von Rohrlich.

Eine Analyse der Grenzen, welche einer klassischen Bewegungsgleichung durch die Quantentheorie gesetzt sind, gestattet es, in den Lorentz-Abraham-Dirac-Gleichungen eine *mathematische Näherung* durchzuführen, die auf gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung führt, welche aber *physikalisch gesehen* gar keine Näherung darstellt, da die mathematischen Bedingungen für die Gültigkeit der Näherung innerhalb der durch die Quantentheorie gesetzten Grenzen stets erfüllt sind. Weitere mathematische Korrekturterme würden bereits in die Domäne der Quantentheorie führen.<sup>110</sup>

Die endgültigen Grundgleichungen lauten (die Kräfte sind in den Bewegungsgleichungen als Folge der Herleitung aus den Lorentz-Abraham-Dirac-Gleichungen „eingebaut“):

---

<sup>108</sup>S. Abschnitt 6-6 des Buches von Rohrlich.

<sup>109</sup>Spohn, H.: *Europhysics Letters* **50** (2000), 287-292; Spohn, H.: *Dynamics of Charged Particles and their Radiation Field*. Cambridge University Press, Cambridge 2004.

<sup>110</sup>Es ist eine Ironie der Geschichte der Physik, dass die korrekten Bewegungsgleichungen schon ein halbes Jahrhundert zuvor in Band II (Klassische Feldtheorie) des Lehrbuches der Theoretischen Physik von Landau und Lifschitz als *mathematische Näherungen* zu den Lorentz-Abraham-Dirac-Gleichungen abgeleitet wurden. Es erkannte aber niemand die *physikalische Bedeutung* dieser Gleichungen.



Grundgleichungen der Maxwell-Lorentz-Theorie in Viererschreibweise	
<i>Feldgleichungen: Maxwellgleichungen</i>	
$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu,$	(1.335)
$\epsilon^{\sigma\lambda\mu\nu} \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0$	(1.336)
mit $\underline{j}$ Gl. (1.103), Gl. (1.5) und Gl. (1.6).	
<i>Bewegungsgleichungen: Spohngleichungen</i> (Landau-Lifschitz-Gleichungen) [modifizierte Lorentz-Abraham-Dirac-Gleichungen]	
$m_a \beta_a^\mu = \mathcal{K}_a^\mu + \Delta\tau_a \left( \frac{d\mathcal{K}_a^\mu}{d\tau_a} + \underline{v}_a \cdot \frac{d\mathcal{K}_a}{d\tau_a} \underline{v}_a^\mu \right), \quad a = 1, 2, \dots, N,$	(1.337)
mit	(1.338)
$(\mathcal{K}_a^\mu) = \gamma(v_a) \left( \frac{\mathbf{K}_a \cdot \mathbf{v}_a}{c}, \mathbf{K}_a \right),$	(1.339)
$\mathbf{K}_a(t) = q_a \left[ \mathbf{E}^{(a)}(\mathbf{r}_a(t), t) + \frac{\mathbf{v}_a(t)}{c} \times \mathbf{B}^{(a)}(\mathbf{r}_a(t), t) \right],$	(1.340)
wobei die Felder $\mathbf{E}^{(a)}(\mathbf{r}, t)$ , $\mathbf{B}^{(a)}(\mathbf{r}, t)$ durch (1.42), (1.43) gegeben sind.	

*Formal* erhält man die Spohngleichungen aus den Lorentz-Abraham-Dirac-Gleichungen, indem man den in mehrfacher Hinsicht problematischen abrahamschen Kraftterm  $\mathcal{K}_a^{(\text{rad})\mu}$  durch den *problemspezifischen* (da von  $\underline{\mathcal{K}}_a$  abhängigen) Term mit  $\Delta\tau_a$  ersetzt. Da  $\underline{\mathcal{K}}_a$  nur von  $\mathbf{r}_a$  und  $\mathbf{v}_a$  abhängt, hängt der Term mit  $\Delta\tau_a$  nur von  $\mathbf{r}_a$ ,  $\mathbf{v}_a$  und  $\dot{\mathbf{v}}_a$ , im Gegensatz zu  $\mathcal{K}_a^{(\text{rad})\mu}$  aber *nicht* von  $\dot{\mathbf{b}}_a$  ab.

Fassen wir zusammen, was seit der historisch ersten Formulierung der mikroskopischen Elektrodynamik durch Lorentz (1902) an den Grundgleichungen geändert wurde: Zuerst wurden die newtonschen Bewegungsgleichungen mit der Lorentz-Gesamtkraft (1.39) durch die einsteinschen Bewegungsgleichungen mit der Lorentz-Gesamtkraft ersetzt (in Viererschreibweise (1.149) mit (1.148)). Als nächstes wurde im Gesetz für die Gesamtkraft auf die Ladung  $q_a$  der divergente Lorentz-Selbstkraftterm (1.40) durch die Abrahamkraft (1.323) ersetzt. Durch Einsetzen dieses neuen Gesetzes für die Gesamtkraft in die einsteinschen Bewegungsgleichungen ergaben sich die Lorentz-Abraham-Dirac-Gleichungen. Aus diesen wurden schließlich die Spohngleichungen erhalten, indem der abrahamsche Kraftterm  $\mathcal{K}_a^{(\text{rad})\mu}$  durch den Term mit  $\Delta\tau_a$  ersetzt wurde.

Die Maxwellgleichungen „überlebten“ alle Stürme unverändert, ebenso das Kraftgesetz von Lorentz für die Kräfte der Ladungen  $q_b$ ,  $b \neq a$ , auf die Ladung  $q_a$  sowie für die Kräfte der Felder äußerer Quellen und einlaufender Felder auf die Ladung  $q_a$  (s. (1.339), (1.340)).

Die endgültigen Grundgleichungen stehen im Einklang mit der Erfahrung. Für den Fall von *Streuproblemen* (Ladungen für  $t \rightarrow \mp\infty$  weit voneinander entfernt und keinen äußeren Kräften ausgesetzt, daher „kräftefrei“ und nicht strahlend) lässt sich die Exis-

tenz von Lösungen beweisen. Es gibt aber bis heute keinen Eindeutigkeitsbeweis, keine analytischen Lösungen für  $N > 1$  und keinen Konvergenzbeweis für die benutzten störungstheoretischen Methoden.<sup>111</sup>

Zum Abschluss der mikroskopischen Elektrodynamik skizziere ich noch den von Abraham, Lorentz und Poincaré beschrittenen historischen Weg, wobei es mir lediglich darauf ankommt aufzuzeigen, welche Überlegungen die Heranziehung der Felder  $\mathbf{E}_{a,-}$ ,  $\mathbf{B}_{a,-}$  von Gl. (1.324), (1.325) zur Berechnung der Abrahamkraft plausibel machten. Details der Ableitung sowie eine ausführliche Diskussion der hier nicht behandelten Aspekte des historischen Modells einer „physikalischen Punktladung“ findet man im Buch von Jackson.

Die grundlegende Modellannahme ist, dass die „physikalische Punktladung“ eine starre kugelsymmetrische Ladungsverteilung mit Radius  $r_0$  besitzt (s. Abb. 1.30):

$$\rho(\mathbf{r}', t') = \rho_0(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t')|), \quad (1.341)$$

$$\rho_0(|\mathbf{x}|) = 0 \text{ für } |\mathbf{x}| > r_0, \quad (1.342)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \rho(\mathbf{r}', t') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \rho_0(|\mathbf{x}|) = q. \quad (1.343)$$

Für die zugehörige Stromdichte gilt dann

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{v}(t') \rho(\mathbf{r}', t') = \mathbf{v}(t') \rho_0(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t')|). \quad (1.344)$$

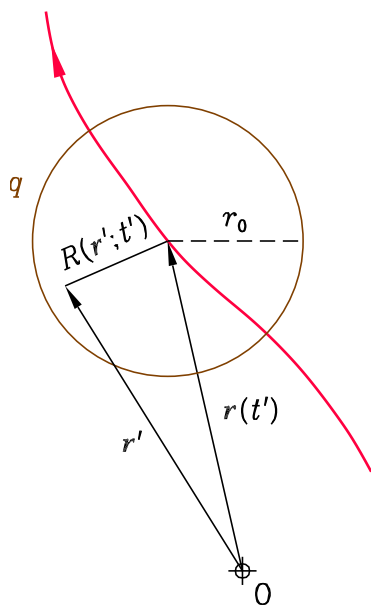


Abbildung 1.30: Abraham-Lorentz-Modell der „physikalischen Punktladung“

Der Radius  $r_0$  soll sehr klein sein, wobei der Grenzübergang  $r_0 \rightarrow 0$  ins Auge gefasst wird. Die

<sup>111</sup>Bezüglich näherer Details zu diesen Grundlagenproblemen siehe Jackson, J. D.: Klassische Elektrodynamik. Walter de Gruyter, Berlin 2006; Rohrlich, F.: Classical Charged Particles. World Scientific, Singapore 2007. Beachte, dass man bei einem Streuproblem nur die *Teilchenorte und Teilchenimpulse* für  $t \rightarrow -\infty$  vorgeben muss: das zeitlich asymptotische elektromagnetische Feld ist dann als zugehöriges retardiertes Feld, also als Überlagerung konvektiver Coulombfelder, *bestimmt*.

Selbstkraft der Ladung soll gemäß

$$\mathbf{K}^{(S)}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left[ \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^{(E)}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{c} \times \mathbf{B}^{(E)}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (1.345)$$

aus dem *retardierten* Eigenfeld der Quellverteilung (1.341), (1.344) berechnet werden. Bei der Berechnung der Feldstärken  $\mathbf{E}^{(E)}$ ,  $\mathbf{B}^{(E)}$  sind also die Potentiale

$$\varphi^{(E)}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.346)$$

$$\mathbf{A}^{(E)}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.347)$$

zu verwenden.

Die Selbstkraft der „physikalischen Punktladung“ bezeichnen wir mit  $\mathbf{K}^{(S)}$ , weil wir ja nicht erwarten können, als Ergebnis der Rechnung  $\mathbf{K}^{(\text{rad})}$  zu erhalten. Erstens enthält die abrahamsche Strahlungsrückwirkungskraft keinen Ladungsradius, und zweitens müssen wir im Grenzfall  $r_0 \rightarrow 0$  ein Divergieren der aus diesem Modell berechneten Selbstkraft erwarten, da für die „mathematische Punktladung“ ein Lorentzkraftterm mit retardiertem Eigenfeld eine unendliche Selbstkraft ergeben hat.

Das Modell ist mit dem einsteinschen Relativitätsprinzip nicht vereinbar<sup>112</sup> und kann daher auch nicht auf ein brauchbares Naturgesetz führen. Es kann jedoch die Problematik beleuchten und eventuell einen Näherungsausdruck für die Strahlungsrückwirkungskraft für kleine Geschwindigkeiten der Ladung liefern.

Bevor wir auf die Berechnung von  $\mathbf{K}^{(S)}$  eingehen, eine Bemerkung zur äußeren Kraft auf die Ladung. Für die äußere Kraft auf die „physikalische Punktladung“ gilt

$$\mathbf{K}^{(\text{ex,g})}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left[ \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^{(\text{ex,g})}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{c} \times \mathbf{B}^{(\text{ex,g})}(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (1.348)$$

Falls sich die Feldstärken des Feldes der äußeren Quellen und eines allfälligen einlaufenden Feldes über die Ausdehnung der Ladung nur wenig ändern, kann man diesen Ausdruck durch die übliche Lorentzkraft von Gl. (1.152) ersetzen. Im Grenzfall  $r_0 \rightarrow 0$  geht der Ausdruck (1.348) *exakt* in den Ausdruck (1.152) über. Die äußere Kraft macht also keinerlei Probleme.

Die Berechnung von  $\mathbf{K}^{(S)}(t)$  ist kompliziert und langwierig, wir geben nur den Weg und das Ergebnis an. Da das Modell ohnehin nur für kleine Geschwindigkeiten der Ladung brauchbare Ergebnisse liefern kann, setzt man zur Vereinfachung der Rechnung

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \quad (t \text{ fest}), \quad (1.349)$$

d. h. man nimmt an, dass sich die Ladung im zugrunde gelegten Inertialsystem zu jenem Zeitpunkt, für den man die Selbstkraft berechnen will, momentan gerade in Ruhe befindet. Für die

<sup>112</sup>Das Modell wurde 1903 – also vor der Entdeckung der Relativitätstheorie – von Abraham eingeführt und von Lorentz 1904 weiter untersucht.

Selbstkraft zu diesem festen Zeitpunkt  $t$  folgt dann

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{(S)}(t) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^{(E)}(\mathbf{r}, t) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \rho(\mathbf{r}, t) \left[ \mathbf{grad} \varphi^{(E)}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^{(E)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right].\end{aligned}\quad (1.350)$$

Für jene Punkte  $\mathbf{r}$ , für die es von null verschiedene Beiträge zu diesem Integral gibt, unterscheiden sich die Zeiten  $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$  von  $t$  um ein Retardierungsintervall der Größenordnung  $r_0/c$ . Man kann deshalb in den Beziehungen (1.346), (1.347) im Integranden eine Taylorentwicklung in der Zeitvariablen an der Stelle  $t$  durchführen:

$$\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^n} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^n \left[ \frac{\partial^n \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'^n} \right]_{t'=t}, \quad (1.351)$$

$$\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^n} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^n \left[ \frac{\partial^n \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'^n} \right]_{t'=t}. \quad (1.352)$$

Für die Selbstkraft  $\mathbf{K}^{(S)}(t)$  erhält man damit eine Entwicklung nach Potenzen von  $r_0$ :

$$\mathbf{K}^{(S)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{K}_n^{(S)}(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{K}_n^{(S)}(t) \sim \mathbf{O}(r_0^{(n-1)}). \quad (1.353)$$

Wie erwartet divergiert der Ausdruck für  $\mathbf{K}^{(S)}(t)$  für  $r_0 \rightarrow 0$  wie  $1/r_0$ , da der Beitrag  $\mathbf{K}_0^{(S)}(t)$  wie  $1/r_0$  divergiert. Man erhält

$$\mathbf{K}_0^{(S)}(t) = -\frac{4}{3} \frac{E_{\text{elm}}^{(S)}}{c^2} \dot{\mathbf{v}}(t), \quad (1.354)$$

wobei

$$E_{\text{elm}}^{(S)} := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\rho_0(|\mathbf{x}|) \rho_0(|\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (1.355)$$

die innere elektromagnetische Wechselwirkungsenergie (elektrostatische Selbstenergie) der Ladung ist. Wie man zeigen kann, folgt für  $r_0 \rightarrow 0$

$$E_{\text{elm}}^{(S)} \sim \alpha \frac{q^2}{r_0} \rightarrow \infty. \quad (1.356)$$

Dabei ist  $\alpha$  ein Zahlenfaktor der Größenordnung 1, dessen Wert von der Radialabhängigkeit der Ladungsdichte abhängt (Beispiele: homogen geladenes Volumen:  $\alpha = \frac{3}{5}$ , homogen geladene Oberfläche:  $\alpha = \frac{1}{2}$ ).

Schauen wir uns die weiteren Terme der Entwicklung für  $\mathbf{K}^{(S)}(t)$  an. Von besonderer Bedeutung ist, dass sich für den von  $r_0$  unabhängigen Beitrag  $\mathbf{K}_1^{(S)}(t)$  die abrahamsche Strahlungsrückwirkungskraft ergibt:

$$\mathbf{K}_1^{(S)}(t) = \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{K}^{(\text{rad})}(t). \quad (1.357)$$

Dieser Beitrag ist unabhängig von der Struktur der Ladung, lediglich die Gesamtladung  $q$  geht ein. Die Beiträge  $\mathbf{K}_n^{(S)}(t)$ ,  $n \geq 2$ , sind komplizierte Ausdrücke, welche  $\mathbf{v}^{(n+1)}(t)$  und nichtlineare Ausdrücke in  $\dot{\mathbf{v}}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{v}}(t)$ , ...,  $\mathbf{v}^{(n)}(t)$  enthalten. Dabei gilt

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \mathbf{K}_n^{(S)}(t) = \mathbf{0} \quad \text{für } n \geq 2. \quad (1.358)$$

Alle Formeln wurden unter der Voraussetzung  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$  abgeleitet. Nimmt man an, dass die erhaltenen Ausdrücke auch für  $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$  brauchbare Näherungsausdrücke darstellen, wofern nur während der Beobachtungsdauer für alle Zeiten  $|\mathbf{v}(t)| \ll c$  gilt, so erhält man als „Bewegungsgleichung“

$$m_0 \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{K}^{(\text{ex,g})}(t) - \frac{4}{3} \frac{E_{\text{elm}}^{(S)}}{c^2} \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K}^{(\text{rad})}(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{K}_n^{(S)}(t), \quad (1.359)$$

wobei die Masse mit  $m_0$  bezeichnet wurde, da sie noch „renormiert“ werden muss, also noch nicht die eigentliche Teilchenmasse  $m$  darstellt.

Die Gleichung (1.359) ist nicht nur mathematisch unbrauchbar, da sie Ableitungen bis zu unendlicher Ordnung enthält, sie steht auch mit dem Experiment im Widerspruch, da man keine von einem Ladungsradius  $r_0$  abhängigen Selbstkräfte beobachtet. Lässt man aber  $r_0$  gegen null streben, hat man wieder das Problem der unendlichen Selbstkraft.

Historisch hat man diese unendliche Selbstkraft durch „Renormierung“ der Teilchenmasse „unter den Teppich gekehrt“. Ordnet man der Selbstenergie des geladenen Teilchens durch

$$m_{\text{elm}} := \frac{E_{\text{elm}}^{(S)}}{c^2} \quad (1.360)$$

eine „elektromagnetische Masse“ zu<sup>113</sup>, so kann man Gl. (1.359) für endliches  $r_0$  in der Form

$$(m_0 + \left[\frac{4}{3}\right] m_{\text{elm}}) \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{K}^{(\text{ex,g})}(t) + \mathbf{K}^{(\text{rad})}(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{K}_n^{(S)}(t) \quad (1.361)$$

schreiben. Der Faktor  $\frac{4}{3}$  wurde dabei eingeklammert, da er – wie man zeigen kann – von der Inkonsistenz des Abraham-Lorentz-Modells der „physikalischen Punktladung“ mit dem Relativitätsprinzip herrührt, also nur durch einen „Fehler“ entstanden ist. Man interpretiert dann  $m_0$  als eine *negative* „innere“ Masse, die das ausgedehnte Teilchen aufgrund der Selbstenergie besitzt, welche zu den ad hoc eingeführten „Poincarékräften“ gehört, die die Ladungsverteilung gegen die Coulombabstoßung der Ladungselemente zusammenhalten. Nimmt man an, dass beim Grenzübergang  $r_0 \rightarrow 0$ , bei dem die elektromagnetische Masse  $m_{\text{elm}}$  gegen  $+\infty$  strebt, die „innere“ Masse  $m_0$  so gegen  $-\infty$  strebt, dass  $m_0 + \left[\frac{4}{3}\right] m_{\text{elm}}$  im Grenzfall die endliche experimentell beobachtete Masse  $m$  ergibt („Massenrenormierung“), so erhält man für  $r_0 \rightarrow 0$  die Gleichung

$$m \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{K}^{(\text{ex,g})}(t) + \mathbf{K}^{(\text{rad})}(t). \quad (1.362)$$

Dies ist die nichtrelativistische Näherung für die Lorentz-Abraham-Dirac-Gleichung.

<sup>113</sup>Beachte: Diese Zuordnung erfolgte historisch im Rahmen nichtrelativistischer Rechnungen vor Entdeckung der Relativitätstheorie.

Heute wissen wir, dass weder ein im Sinne der Quantentheorie strukturloses Teilchen wie das Elektron noch ein im Sinne der Quantentheorie strukturbehaftetes Teilchen wie das Proton adäquat als klassisches Teilchen mit bestimmter Ausdehnung, Struktur und Ladungsverteilung beschrieben werden kann, und man deshalb im Rahmen der klassischen mikroskopischen Elektrodynamik eine Formulierung finden muss, welche keinerlei Annahmen über innere Struktur, innere Ladungsverteilung und Größe enthält. Wie diese Formulierung aussehen muss, erkennt man, wenn man in die Ausgangsgleichung für  $\mathbf{K}^{(S)}(t)$  anstelle der retardierten Potentiale die entsprechenden *avancierten* Potentiale einsetzt. Statt des Ergebnisses (1.353) erhält man dann

$$\mathbf{K}^{(S)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathbf{K}_n^{(S)}(t), \quad (1.363)$$

wobei die Größen  $\mathbf{K}_n^{(S)}(t)$  dieselben sind wie in Gl. (1.353). Mit den Potentialen

$$\frac{1}{2} \left( \varphi_{\text{ret}}^{(E)}(\mathbf{r}, t) - \varphi_{\text{av}}^{(E)}(\mathbf{r}, t) \right), \quad \frac{1}{2} \left( \mathbf{A}_{\text{ret}}^{(E)}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{A}_{\text{av}}^{(E)}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (1.364)$$

ergibt sich daher

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \mathbf{K}^{(S)}(t) = \mathbf{K}^{(\text{rad})}(t). \quad (1.365)$$

Es gibt dann keinen unendlichen Selbstkraftbeitrag, und in die Theorie geht von vornherein nur die experimentell beobachtbare Masse  $m$  ein. Damit ist das zu Beginn dieses Abschnittes formulierte Selbstkraftpostulat gerechtfertigt.

## Kapitel 2

# Makroskopische Elektrodynamik

In der makroskopischen Elektrodynamik wird die Materie als Kontinuum behandelt, weshalb man auch von der *Elektrodynamik kontinuierlicher Medien* (Substanzen) spricht. Wir nehmen dabei an, dass die Materie im betrachteten Inertialsystem ruht.<sup>1</sup>

### 2.1 Mikroskopische und makroskopische Felder

Wie in der Mechanik gibt es auch in der Elektrodynamik weite und technisch wichtige Anwendungsgebiete, für welche die mikroskopische Beschreibung der Materie wegen ihrer Kompliziertheit nicht zielführend und für die Beschreibung der untersuchten Phänomene auch nicht erforderlich ist. Wer die Belastbarkeit und das Schwingungsverhalten einer Stahlbrücke untersuchen will, muss sich nicht damit befassen, was die Elektronen und Kerne der Brücke „tun“, er kann die Materie im Rahmen der Elastizitätstheorie als Kontinuum behandeln, wobei die speziellen Materialeigenschaften durch eine Materialkonstante, den Elastizitätsmodul, beschrieben werden. Analog wird die Materie bei der Untersuchung von Gleichstrom- und Wechselstrom-Leitungsnetzen, Elektromotoren und Generatoren, optischen Geräten etc. im Rahmen der makroskopischen Elektrodynamik als Kontinuum behandelt, wobei die speziellen Materialeigenschaften durch die elektrische und magnetische Suszeptibilität und die elektrische Leitfähigkeit beschrieben werden.

Die *mikroskopischen Felder* zeigen wie die mikroskopischen Queldichten starke räumliche und zeitliche Variationen. Ein makroskopisches Stück Materie enthält ungefähr  $10^{23\pm 5}$  Elektronen und Kerne, die sich aufgrund ihrer elektromagnetischen Wechselwirkungen dauernd gegeneinander bewegen. Die räumlichen Schwankungen der Feldstärken vollziehen sich über Strecken von  $10^{-8}$  cm oder darunter, wobei sich die Beträge der Feldstärken auf diesen kurzen Abständen um mehr als sechs Größenordnungen ändern.<sup>2</sup> Die Perioden der zeitlichen Schwankungen liegen zwischen  $10^{-17}$  s („Bahnbewegungen“ der Elektronen in Atomen und Molekülen) und  $10^{-13}$  s („Schwingungen“ von Kernen in

<sup>1</sup>Die folgenden Abschnitte 2.1, 2.2 lehnen sich eng an Abschnitt 6.7 des Buches von Jackson an: Jackson, J. D.: Klassische Elektrodynamik. Walter de Gruyter, Berlin 2006.

<sup>2</sup>Die inneratomaren elektrischen Felder sind von der Größenordnung  $10^{11}$  V/m.

Molekülen). Makroskopische Messinstrumente mitteln über räumliche Bereiche, welche sehr viele Elektronen und Kerne enthalten. Dabei werden alle über makroskopische Distanzen unkorrelierten mikroskopischen Variationen herausgemittelt, man misst so genannte *makroskopische Felder*. – Oft hat man es auch mit Anordnungen zu tun, bei denen man in der Materie selbst überhaupt keine Messung durchführt (also auch keine makroskopischen Felder misst). Bei der Untersuchung der spektralen Zerlegung des Lichtes durch ein Glasprisma misst man beispielsweise nur den Ablenkungswinkel des Lichtes nach dem Austritt aus dem Prisma. Um diesen Ablenkungswinkel theoretisch zu berechnen, benötigt man Gleichungen für die makroskopischen Felder im Glasprisma und Stetigkeitsbedingungen für die Grenzflächen zum Vakuum. Auf die komplizierten mikroskopischen Vorgänge im Prisma muss man dabei nicht eingehen.

Die makroskopische klassische Elektrodynamik wurde historisch zuerst als rein *phänomenologische Theorie* eingeführt. Erst Lorentz versuchte, aus den mikroskopischen Feldstärken, den mikroskopischen Quelldichten und den Gleichungen zwischen diesen Größen durch geeignete Mittelungsprozesse zu makroskopischen Feldstärken, makroskopischen Quelldichten und den aus der phänomenologischen Theorie bekannten Gleichungen für die makroskopischen Feldstärken zu gelangen. Die *Struktur der Materie* (Kerne, Atome, Moleküle; Gase, Flüssigkeiten, Festkörper) kann nur *quantentheoretisch* verstanden werden. Nimmt man jedoch die Struktur als gegeben an<sup>3</sup>, so kann man für den Übergang von der mikroskopischen zur makroskopischen Betrachtungsweise *klassische* („mechanistische“) *mikroskopische Modelle* benützen. Als „elementare Bestandteile“ der mikroskopischen Struktur werden dabei Elektronen und Kerne angesehen, diese werden als *klassische Punktteilchen* beschrieben. In den Endformeln sind dann lediglich die auftretenden klassischen Mittelwerte formal durch quantenmechanische Mittelwerte (Erwartungswerte) zu ersetzen, und im Ausdruck für die Magnetisierung sind die „inneren“ magnetischen Momente, welche mit den Spins der Elektronen und den „inneren“ Drehimpulsen der Kerne verknüpft sind, hinzuzufügen.

Wir haben in der mikroskopischen Elektrodynamik die Feldstärken mit  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  und die Gesamtquelldichten, welche sich aus den mikroskopischen Systemquelldichten und den Dichten allfälliger äußerer Quellen zusammensetzen, mit  $\rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  bezeichnet (s. die Gleichungen (1.5), (1.6) und (1.11) bis (1.14)). Da wir diese Bezeichnungen in der makroskopischen Elektrodynamik für die makroskopischen Feldstärken und für die so genannte makroskopische freie Ladungs- und Stromdichte des Mediums zur Verfügung haben wollen, bezeichnen wir im Folgenden die mikroskopischen Feldstärken mit  $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$  und die „zur Materie gehörigen“ mikroskopischen Quelldichten mit  $\rho^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t)$ . Die *mikroskopischen Feldgleichungen* lauten dann

$$\operatorname{div} \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = 4\pi [\rho^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) + \rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t)], \quad (2.1)$$

---

<sup>3</sup>Für kristallisiertes Kupfer hat man beispielsweise von einem kubisch flächenzentrierten Gitter einfach positiver Kupferionen (Gitterkonstante  $a = 3,615 \text{ \AA}$ ) und einem „Gas“ quasifreier Elektronen (ein Elektron pro Kupferion) auszugehen.



$$\operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} [\mathbf{j}^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t)] + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Enthält das Materiestück  $N$  Elektronen und Kerne, so gilt dabei

$$\rho^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^N q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{j}^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^N q_k \mathbf{v}_k(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)). \quad (2.6)$$

Von den äußeren Queldichten nehmen wir an, dass sie fest vorgegeben sind, die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.7)$$

erfüllen und *keine mikroskopischen räumlichen Schwankungen* aufweisen.

Unser Ziel ist es, die aus der phänomenologischen Elektrodynamik der Medien bekannten, für ruhende Materie gültigen **makroskopischen Feldgleichungen**

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi [\rho(\mathbf{r}, t) - \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t)], \quad (2.8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.9)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.10)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.11)$$

samt der physikalischen Interpretation der Felder  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{M}$  und der Queldichten  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  aus den mikroskopischen Feldgleichungen (2.1) bis (2.4) durch einen geeigneten Mittelungsprozess abzuleiten. In diesem Zusammenhang rufen wir die folgenden aus der phänomenologischen Elektrodynamik bekannten Bezeichnungen und Interpretationen in Erinnerung:

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$	(makroskopische) elektrische Feldstärke
$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$	(makroskopische) magnetische Feldstärke <sup>4</sup>
$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$	elektrisches Polarisationsfeld der Materie, Polarisation

	(elektrisches Dipolmoment pro Volumseinheit)
$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$	magnetisches Polarisationsfeld der Materie, Magnetisierung (magnetisches Dipolmoment pro Volumseinheit)
$\rho(\mathbf{r}, t)$	freie elektrische Ladungsdichte der Materie
$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$	elektrische Leitungsstromdichte der Materie
$\rho_P(\mathbf{r}, t) := -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$	Polarisationsladungsdichte der Materie
$\mathbf{j}_P(\mathbf{r}, t) := \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$	Polarisationsstromdichte der Materie
$\mathbf{j}_M(\mathbf{r}, t) := c \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$	Magnetisierungsstromdichte der Materie

Zwischen den makroskopischen Quelldichten  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  besteht natürlich wieder eine Kontinuitätsgleichung, ebenso zwischen  $\rho_P$  und  $\mathbf{j}_P$  ( $\mathbf{j}_M$  ist quellenfrei).

Die Feldgleichungen (2.8) bis (2.11) reichen zur Bestimmung der Feldstärken  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  nicht aus. Es müssen zusätzlich noch **Materialgleichungen** (Verknüpfungsgleichungen) benutzt werden, welche  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{j}$  als Funktionale der makroskopischen Feldstärken angeben<sup>5</sup>:

$$\mathbf{P}[\mathbf{E}, \mathbf{B}], \quad \mathbf{M}[\mathbf{E}, \mathbf{B}], \quad \mathbf{j}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]. \quad (2.12)$$

Die Materialgleichungen beschreiben in einer pauschalen mittleren Weise die „Antwort“ der Materie auf das Anlegen eines äußeren Feldes mit bestimmten qualitativen Eigenschaften. Sie können je nach der Art der betrachteten Materie und je nachdem, ob die von außen angelegten Felder schwach oder stark, zeitlich konstant bzw. zeitlich langsam veränderlich oder zeitlich rasch veränderlich sind, sehr verschieden aussehen und sind unvermeidlich Beziehungen, welche durch Näherungen gewonnen werden. Die Ableitung von Materialgleichungen setzt die Zugrundelegung eines klassischen oder quantenmechanischen Modells für die mikroskopische Struktur der Materie voraus, mit dessen Hilfe näherungsweise Beziehungen zwischen mittleren Polarisationsfeldern und den makroskopischen Mittelwerten der elektromagnetischen Feldstärken bestimmt werden. Die Feldgleichungen (2.8) bis (2.11) hingegen sind fast universell (d. h. für beliebige ruhende Materie) gültig. (Die kleine Einschränkung durch das Wort *fast* bezieht sich dabei darauf, dass vereinzelt in der Feldgleichung (2.8) noch eine makroskopische elektrische Quadrupoldichte der Materie berücksichtigt werden muss.) Die makroskopische Elektrodynamik besitzt nicht den Charakter einer einheitlichen physikalischen Theorie, sie stellt eine Sammlung von jeweils näherungsweise gültigen Teiltheorien für die Beschreibung von relativ engen Gruppen von Phänomenen dar (z. B. Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen nicht zu hoher Frequenz und nicht zu

<sup>4</sup>Wird in älteren, aus Tradition aber auch in einigen neuen Büchern als *magnetische Induktion* bezeichnet. Diese irreführende Bezeichnung sollte man „aussterben“ lassen.

<sup>5</sup>Bezüglich  $\rho$  siehe Seite 130.

großer Intensität). Für jede dieser Teiltheorien gilt dann das in Abb. 2.1 dargestellte *logische Schema der makroskopischen Elektrodynamik*.

(Vergleiche diese Abbildung mit Abb. 1.7 von Seite 28.)

Die einfachste Form der Materialgleichungen lautet  $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ ; siehe dazu Abschnitt 2.3.

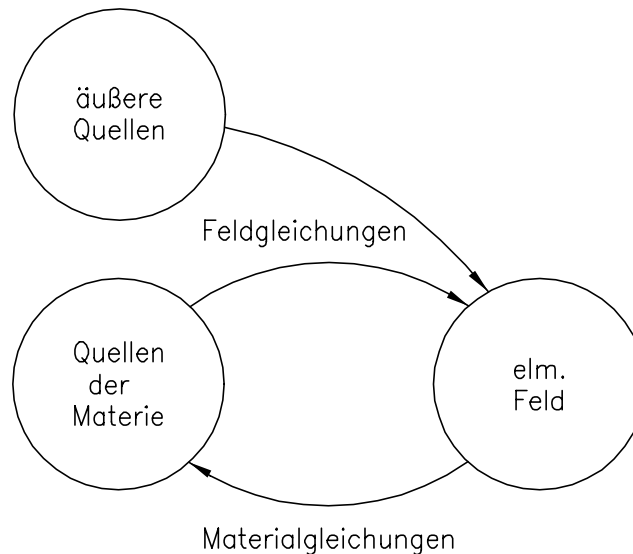


Abbildung 2.1: Logisches Schema der makroskopischen Elektrodynamik

In der Elektrodynamik der Medien ist es üblich neben den makroskopischen *elektromagnetischen Feldstärken*  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  zwei *Hilfsfelder*  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  einzuführen, mit deren Hilfe es möglich ist, die Feldgleichungen „einfacher“ und „symmetrischer“ zu schreiben:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r}, t), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{r}, t). \quad (2.14)$$

Die verbalen Bezeichnungen für diese Hilfsfelder sind in der Literatur nicht einheitlich<sup>6</sup>, weshalb wir einfach vom (Hilfs-)Feld  $\mathbf{D}$  und vom (Hilfs-)Feld  $\mathbf{H}$  sprechen.

Die *Feldgleichungen* (2.8) bis (2.11) lauten dann

<sup>6</sup> $\mathbf{D}$  wird als *dielektrische Verschiebung* oder *elektrische Verschiebung* oder *elektrische Induktion* bezeichnet,  $\mathbf{H}$  wird *magnetische Feldstärke* oder *magnetische Induktion* oder *magnetische Verschiebung* genannt. „Aussterben“ lassen sollte man jedenfalls die Bezeichnung *magnetische Feldstärke* für  $\mathbf{H}$ . (Siehe dazu Seite 119.)

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi [\rho(\mathbf{r}, t) + \rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t)], \quad (2.15)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.16)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.17)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} [\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t)] + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.18)$$

und die *Materialgleichungen* sind in der folgenden Form anzuschreiben:

$$\mathbf{D}[\mathbf{E}, \mathbf{B}], \quad \mathbf{H}[\mathbf{E}, \mathbf{B}], \quad \mathbf{j}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]. \quad (2.19)$$

Wir befassen uns vorerst nur mit den *Feldgleichungen*. Auf den ersten Blick könnte man meinen, es wäre für den Übergang zum Kontinuumsmodell sowohl eine räumliche als auch eine zeitliche Mittelung auszuführen, um die mikroskopischen Schwankungen, welche von der atomistischen Struktur herrühren, auszuglätten. Dies trifft jedoch nicht zu. Es ist allein eine *räumliche Mittelung* vorzunehmen.

Um den Bereich abzugrenzen, in dem man eine brauchbare Beschreibung durch die makroskopische Elektrodynamik erwarten kann, bemerken wir, dass sich Reflexion und Brechung von sichtbarem Licht (Wellenlängen zwischen  $4 \cdot 10^{-5}$  cm und  $8 \cdot 10^{-5}$  cm) im Rahmen der makroskopischen Elektrodynamik in allen Einzelheiten befriedigend behandeln lassen, während bei Röntgenstrahlen (Wellenlängen aus dem Bereich von  $10^{-12}$  cm bis  $10^{-7}$  cm) die atomistische Struktur der Materie berücksichtigt werden muss (Beugung an Kristallgittern etc.). Es ist daher angemessen als untere Schranke für makroskopische Distanzen im Kontinuumsmodell die Länge

$$L_0 = 10^{-6} \text{ cm} = 100 \text{ \AA} \quad (2.20)$$

anzunehmen. Ein Materievolumen der Größe  $L_0^3 = 10^{-18} \text{ cm}^3$  enthält rund  $10^6$  Kerne und Elektronen. Bei räumlicher Mittelung über Bereiche dieser Größenordnung fallen alle mikroskopischen räumlichen Schwankungen der Felder weg, es bleiben nur die geglätteten räumlichen Variationen über makroskopische Distanzen übrig. Diese räumliche Mittelung eliminiert aber zugleich auch die von der atomistischen Struktur der Materie herrührenden mikroskopischen zeitlichen Schwankungen der Felder, da die zeitlichen Änderungen der mikroskopischen Felder bei einem sich selbst überlassenen Stück Materie nicht über makroskopische Abstände korreliert sind. Nur bei besonderer Präparation des Mediums, bei welcher eine über makroskopische Distanzen korrelierte mikroskopische Bewegung aufgezwungen wird – beispielsweise durch eine von äußeren Quellen abgestrahlte, auf das Materiestück einfallende elektromagnetische Welle –, „überleben“ die dazugehörigen (u. U. zeitlich rasch veränderlichen) Fourierkomponenten die räumliche Mittelung. Für eine elektromagnetische Welle aus dem sichtbaren

Spektralbereich gilt  $\lambda \sim 10^{-4}$  cm, und die zugehörige zeitliche Periode beträgt somit  $T = \lambda/c \sim 3 \cdot 10^{-15}$  s. Diese Überlegungen zeigen, warum es nicht sinnvoll wäre, eine zusätzliche zeitliche Mittelung über ein Intervall, welches groß ist gegen die Perioden der Elektronen- und Kernbewegungen ( $T \sim 10^{-17}$  s ...  $10^{-13}$  s), durchzuführen: Bei einer solchen zeitlichen Mittelung würden auch zeitliche Variationen wegfallen, wie sie bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen aus dem sichtbaren und dem Infrarot-Bereich auftreten ( $\lambda \sim 4 \cdot 10^{-5}$  cm ...  $10^{-2}$  cm, d. h.  $T \sim 10^{-15}$  s ...  $3 \cdot 10^{-13}$  s).

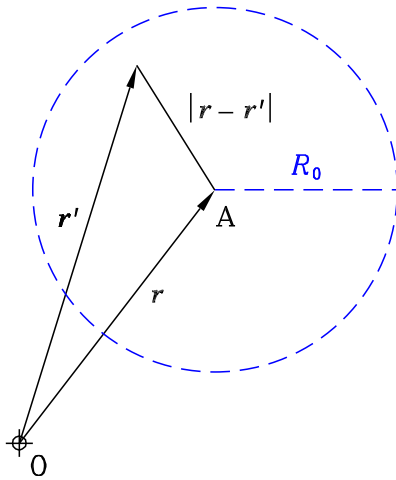


Abbildung 2.2: Zur räumlichen Mittelung

Ist  $f(\mathbf{r}, t)$  irgendeine mikroskopische Feldfunktion (etwa  $e_x(\mathbf{r}, t)$  oder  $\rho^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t)$ ), so bezeichnen wir die zugehörige makroskopische Feldfunktion, d. h. die entsprechende räumlich gemittelte Größe, mit  $F(\mathbf{r}, t) = \langle f(\mathbf{r}, t) \rangle$ . Die mathematisch einfachste Definition von  $F(\mathbf{r}, t)$  wäre die Definition als *arithmetisches Mittel* der Werte von  $f$  über ein Kugelvolumen  $\mathcal{K}(\mathbf{r}; R_0)$  vom Radius  $R_0 \sim L_0$  mit dem Mittelpunkt im Aufpunkt  $\mathbf{r}$  bei festgehaltenem  $t$  (s. Abb. 2.2):

$$F(\mathbf{r}, t) = \langle f(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{\mathcal{K}(\mathbf{r}; R_0)} d^3 r' f(\mathbf{r}', t) \quad \text{mit} \quad V_0 = \frac{4\pi R_0^3}{3}. \quad (2.21)$$

Mithilfe der in Abb. 2.3 dargestellten gemäß

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \Phi(r') = 1 \quad (2.22)$$

normierten Mittelungsfunktion (Gewichtsfunktion)

$$\Phi(r') = \begin{cases} \frac{1}{V_0} & \text{für } r' < R_0 \\ 0 & \text{für } r' > R_0 \end{cases} \quad (2.23)$$

lässt sich die Beziehung (2.21) formal in der Form

$$F(\mathbf{r}, t) = \langle f(\mathbf{r}, t) \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \Phi(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) f(\mathbf{r}', t) \quad (2.24)$$

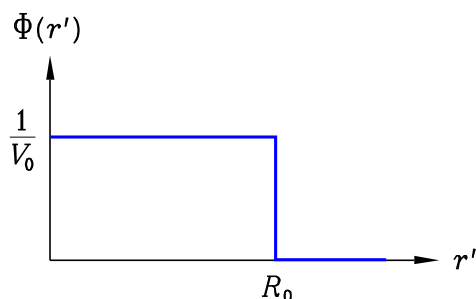


Abbildung 2.3: Verlauf der Mittelungsfunktion für die Bildung des arithmetischen Mittels

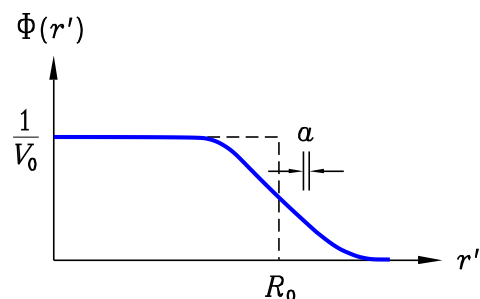


Abbildung 2.4: Schematische Darstellung des Verlaufes einer geeigneten Mittelungsfunktion ( $a$  atomare Abstände)

schreiben. Das arithmetische Mittel besitzt jedoch einen Mangel: Wegen der Unstetigkeit der Mittelungsfunktion  $\Phi(r')$  für  $r' = R_0$  besitzen die Funktionen  $F$  hinsichtlich ihrer Ortsabhängigkeit nicht die erforderlichen Glattheitseigenschaften. Verschiebt man (bei festgehaltenem  $t$ ) den Aufpunkt um ein mikroskopisch kleines Stück, so kann es zufolge des Austretens eines Atoms (Moleküls) oder einer Gruppe von Atomen (Molekülen) aus dem Mittelungsvolumen oder zufolge des Eintretens eines Atoms (Moleküls) oder einer Gruppe von Atomen (Molekülen) in das Mittelungsvolumen zu einer merklichen Änderung von  $F$  kommen. Mittelwerte  $F$ , die über mikroskopische Distanzen nicht „zittern“ und daher echte makroskopische Größen darstellen, kann man nur erhalten, wenn man eine Mittelungsfunktion  $\Phi(r')$  benützt, die sich für *alle*  $r'$  über atomare Abstände nur wenig ändert (s. Abb. 2.4). Man definiert deshalb die Mittelung durch Gl. (2.24) mit einer gemäß Gl. (2.22) normierten Mittelungsfunktion, welche folgende qualitative Eigenschaften besitzen muss:  $\Phi(r')$  ist nur in einem kugelförmigen Bereich der Ausdehnung  $R_0 \sim L_0$  um die Stelle  $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$  wesentlich von null verschieden und zeigt im gesamten Verlauf über atomare Distanzen nur geringfügige Variationen. Bei Erfüllung dieser Bedingungen kommt es auf die spezielle Wahl der Funktion  $\Phi$  nicht an (d. h. die Ergebnisse der Mittelung hängen dann nicht merklich von der speziellen Wahl von  $\Phi$  ab).

## 2.2 Herleitung der makroskopischen aus den mikroskopischen Feldgleichungen

Aus der Beziehung (2.24) folgt, dass räumliche Mittelung und räumliche Ableitung bzw. räumliche Mittelung und zeitliche Ableitung vertauschbar sind:

$$\frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} = \left\langle \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} \right\rangle, \quad i = 1, 2, 3; \quad \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\rangle. \quad (2.25)$$

Die Vertauschbarkeit von räumlicher Mittelung und zeitlicher Ableitung ist offensichtlich. Für den Beweis der Vertauschbarkeit von räumlicher Mittelung und räumlicher Ableitung wechseln wir von der Integrationsvariablen  $\mathbf{r}'$  zur Integrationsvariablen  $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ :

$$F(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \Phi(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) f(\mathbf{r}', t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' \Phi(|\mathbf{r}''|) f(\mathbf{r}'' + \mathbf{r}, t),$$

$$\frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' \Phi(|\mathbf{r}''|) \frac{\partial f(\mathbf{r}'' + \mathbf{r}, t)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' \Phi(|\mathbf{r}''|) \left( \frac{\partial f(\mathbf{r}', t)}{\partial x'_i} \right)_{\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + \mathbf{r}}.$$

Gehen wir hier wieder zur Integrationsvariablen  $\mathbf{r}'$  über, so erhalten wir

$$\frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \Phi(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) \frac{\partial f(\mathbf{r}', t)}{\partial x'_i} = \left\langle \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Unter Beachtung der Beziehungen (2.25) erhalten wir aus den mikroskopischen Feldgleichungen (2.1) bis (2.4) für die *makroskopischen Feldstärken*<sup>7</sup>  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \rangle$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \rangle$  die Feldgleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi [\langle \rho^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) \rangle + \rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t)], \quad (2.26)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.27)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.28)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} [\langle \mathbf{j}^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) \rangle + \mathbf{j}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t)] + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.29)$$

Dabei konnten wir aufgrund der getroffenen Annahmen über die äußeren Quellen

$$\langle \rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t), \quad \langle \mathbf{j}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{j}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) \quad (2.30)$$

setzen.

Die Feldgleichungen (2.27), (2.28) stimmen mit den phänomenologischen makroskopischen Feldgleichungen (2.9), (2.10) überein. Zu zeigen bleibt noch, dass

$$\langle \rho^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho(\mathbf{r}, t) + \rho_P(\mathbf{r}, t) + \dots = \rho(\mathbf{r}, t) - \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \dots, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j}^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_P(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_M(\mathbf{r}, t) + \dots \\ &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) + \dots \end{aligned} \quad (2.32)$$

<sup>7</sup>Da  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  die zur mikroskopischen magnetischen *Feldstärke*  $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$  gehörige makroskopische Feldgröße darstellt, wäre es widersinnig,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  nicht als makroskopische magnetische *Feldstärke* zu bezeichnen. Genauso widersinnig wäre es, bereits die mikroskopische Feldgröße  $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$  als magnetische *Induktion* zu bezeichnen, da  $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$  in der mikroskopischen Elektrodynamik eine vollkommen analoge Rolle wie die elektrische *Feldstärke*  $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$  spielt.

gilt, wobei  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{M}$  die auf den Seiten 113, 114 angegebene Bedeutung haben müssen, und die Punkte für vernachlässigbare Beiträge stehen.

Wie schon auf Seite 112 festgestellt, beginnen wir auf der Ebene der Atomphysik, d. h. wir fassen Elektronen und Kerne als „elementare Bestandteile“ der mikroskopischen Struktur auf. Im Rahmen des zugrunde gelegten klassischen mikroskopischen Modells behandeln wir Elektronen und Kerne als punktförmige klassische Teilchen, weshalb wir für sie den Sammelbegriff *Punktladungen* verwenden. In der Materie gibt es *ungebundene Punktladungen*<sup>8</sup> (i. Allg. nur Elektronen, in einem Plasma u. U. auch vereinzelt Kerne) und *gebundene Punktladungen* (Elektronen und Kerne), das sind solche, welche Bestandteil eines *stabilen Komplexes*, d. h. eines Atoms, Moleküls, Atomions oder Molekülions, sind.

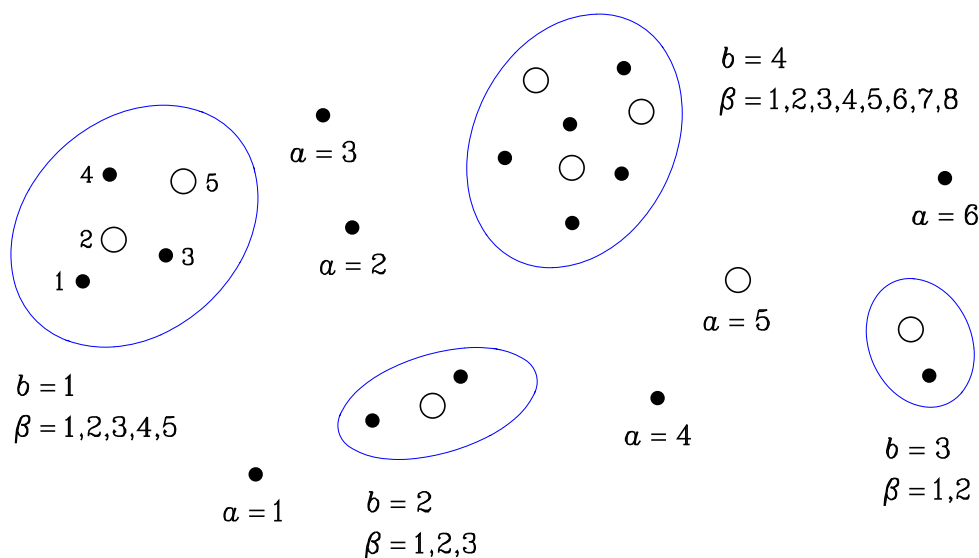


Abbildung 2.5: Ungebundene Punktladungen (Index  $a$ ) und in Komplexen gebundene Punktladungen (Doppelindex  $b\beta$ ) der Materie

Wir zerlegen die mikroskopischen Queldichten (2.5), (2.6) in die Anteile der ungebundenen und der gebundenen Punktladungen. Für erstere verwenden wir den Index  $a$ , letztere indizieren wir durch einen Doppelindex  $b\beta$ , wobei  $b$  die stabilen Komplexe nummeriert (s. Abb. 2.5):

$N_u$  Anzahl der ungebundenen Punktladungen

$N_b$  Anzahl der gebundenen Punktladungen des Komplexes  $b$

$n_K$  Anzahl der Komplexe

$N$  Gesamtzahl der Punktladungen: 
$$N = N_u + \sum_{b=1}^{n_K} N_b;$$

<sup>8</sup>Oft als „frei“ bezeichnet, was aber nicht mit kräftefrei verwechselt werden darf.



$$\rho^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) = \sum_{a=1}^{N_u} q_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) + \sum_{b=1}^{n_K} \rho_b(\mathbf{r}, t), \quad (2.33)$$

$$\mathbf{j}^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) = \sum_{a=1}^{N_u} q_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) + \sum_{b=1}^{n_K} \mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t) \quad (2.34)$$

mit

$$\rho_b(\mathbf{r}, t) := \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{b\beta}(t)), \quad (2.35)$$

$$\mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t) := \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} \mathbf{v}_{b\beta}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{b\beta}(t)). \quad (2.36)$$

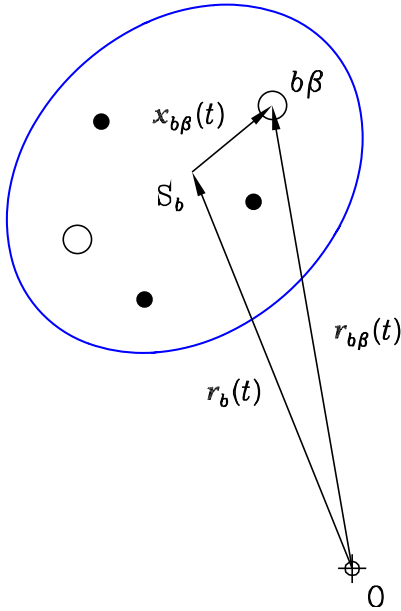


Abbildung 2.6: Koordinaten der Punktladung  $b\beta$  des Komplexes  $b$  relativ zu dessen Schwerpunkt  $S_b$

Für die räumliche Mittelung von  $\rho_b(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t)$  schreiben wir (s. Abb. 2.6)

$$\mathbf{r}_{b\beta}(t) = \mathbf{r}_b(t) + \mathbf{x}_{b\beta}(t), \quad (2.37)$$

wobei  $\mathbf{r}_b(t)$  den Ortsvektor des Schwerpunktes des Komplexes  $b$  und  $\mathbf{x}_{b\beta}(t)$  die Lage der gebundenen Punktladung  $b\beta$  relativ zum Schwerpunkt des Komplexes  $b$  bedeutet. Ableitung von Gl. (2.37) nach der Zeit  $t$  gibt dann

$$\mathbf{v}_{b\beta}(t) = \mathbf{v}_b(t) + \mathbf{w}_{b\beta}(t) \quad (2.38)$$

mit

$$\mathbf{v}_{b\beta}(t) = \frac{d\mathbf{r}_{b\beta}(t)}{dt}, \quad \mathbf{v}_b(t) = \frac{d\mathbf{r}_b(t)}{dt}, \quad \mathbf{w}_{b\beta}(t) = \frac{d\mathbf{x}_{b\beta}(t)}{dt}. \quad (2.39)$$

Dabei ist  $\mathbf{v}_b(t)$  die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Komplexes  $b$  im betrachteten Inertialsystem, und  $\mathbf{w}_{b\beta}(t)$  bedeutet in nichtrelativistischer Näherung<sup>9</sup> die Geschwindigkeit der gebundenen Punktladung  $b\beta$  im Schwerpunktsystem des Komplexes  $b$ .

Die niedrigsten *Multipolmomente des Komplexes  $b$*  sind dann gegeben durch:

- *Elektrische Gesamtladung* (elektrisches Monopolmoment):

$$q_b := \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta}. \quad (2.40)$$

(Nur für Ionen von null verschieden.)

- *Elektrisches Dipolmoment* bezüglich des Schwerpunktes:

$$\mathbf{p}_b(t) := \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} \mathbf{x}_{b\beta}(t). \quad (2.41)$$

(Vom Bezugspunkt nur dann unabhängig, wenn  $q_b = 0$  gilt.)

- *Magnetisches Dipolmoment* bezüglich des Schwerpunktes:

$$\mathbf{m}_b(t) := \frac{1}{2c} \sum_{\beta=1}^{N_b} [\mathbf{x}_{b\beta}(t) \times q_{b\beta} \mathbf{w}_{b\beta}(t)]. \quad (2.42)$$

(Nur in nichtrelativistischer Näherung korrekt, vom Bezugspunkt abhängig.)

Höhere Multipolmomente der Komplexe benötigen wir nicht. – Wir berechnen nun  $\langle \rho_b(\mathbf{r}, t) \rangle$  und  $\langle \rho^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) \rangle$ . Zunächst einmal gilt

$$\begin{aligned} \langle \rho_b(\mathbf{r}, t) \rangle &= \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{b\beta}(t)) \rangle = \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \Phi(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{b\beta}(t)) \\ &= \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{b\beta}(t)|). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Die Mittelungsfunktion ändert sich über atomare Abstände (Abstände der Größenordnung  $a$ ; s. Abb. 2.4) voraussetzungsgemäß nur wenig. Da  $|\mathbf{x}_{b\beta}(t)|$  von der Größenordnung  $a$  ist, unterscheidet sich daher  $\Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{b\beta}(t)|) = \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t) - \mathbf{x}_{b\beta}(t)|)$  nur wenig von  $\Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)|)$ . Man kann deshalb die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{b\beta}(t)|) &= \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t) - \mathbf{x}_{b\beta}(t)|) \\ &= \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)|) - \mathbf{x}_{b\beta}(t) \cdot \mathbf{grad} \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)|) + \dots \\ &= \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \rangle - \mathbf{x}_{b\beta}(t) \cdot \mathbf{grad} \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \rangle + \dots \end{aligned} \quad (2.44)$$

<sup>9</sup>Bezüglich relativistischer Korrekturen zur folgenden Ableitung von  $\langle \mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t) \rangle$  siehe De Groot, S. R.: the maxwell equations (non-relativistic and relativistic derivations from electron theory). North Holland, Amsterdam 1969.

nach dem linearen Term abbrechen (Vernachlässigung des Beitrages der Ordnung  $a^2$ ) und erhält

$$\begin{aligned}\langle \rho_b(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle q_b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \rangle - \langle \mathbf{p}_b(t) \cdot \mathbf{grad} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \rangle + \dots \\ &= \langle q_b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \rangle - \text{div} \langle \mathbf{p}_b(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \rangle + \dots ,\end{aligned}\quad (2.45)$$

wobei die Punkte vernachlässigbare Terme bedeuten. Für  $\langle \rho^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) \rangle$  ergibt sich somit

$$\langle \rho^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho(\mathbf{r}, t) - \text{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (2.46)$$

mit

$$\rho(\mathbf{r}, t) := \left\langle \sum_{a=1}^{N_u} q_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) + \sum_{b=1}^{n_K} q_b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle, \quad (2.47)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) := \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \mathbf{p}_b(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle. \quad (2.48)$$

Nach analoger aber wesentlich komplizierterer Rechnung erhält man für  $\langle \mathbf{j}^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) \rangle$ :

$$\langle \mathbf{j}^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + c \mathbf{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (2.49)$$

mit

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) := \left\langle \sum_{a=1}^{N_u} q_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) + \sum_{b=1}^{n_K} q_b \mathbf{v}_b(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle, \quad (2.50)$$

$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  siehe Gl. (2.48),

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) := \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \left[ \mathbf{m}_b(t) + \left( \mathbf{p}_b(t) \times \frac{\mathbf{v}_b(t)}{c} \right) \right] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle. \quad (2.51)$$

Die weggelassenen Beiträge, die von höheren Multipolmomenten der Komplexe herrühren, sind i. Allg. vernachlässigbar. Die aus Elektronen und Kernen aufgebauten stabilen Komplexe (Atome, Moleküle, Atomionen, Molekülionen) können also für die Berechnung der makroskopischen elektromagnetischen Felder in der Materie durch fiktive *elektrische Punktladungen* mit den elektrischen Ladungen  $q_b$  der Komplexe sowie fiktive *elektrische Punktdipole* mit den elektrischen Dipolmomenten  $\mathbf{p}_b(t)$  der Komplexe und *magnetische Punktdipole* mit den magnetischen Dipolmomenten  $\mathbf{m}_b(t)$  der Komplexe in den Schwerpunkten  $S_b$  der Komplexe  $b$  ersetzt werden (siehe die Abbildungen 2.7 und 2.8). Eine detailliertere Kenntnis der atomaren bzw. molekularen Struktur der Komplexe ist für die makroskopische Betrachtungsweise *nicht* erforderlich.

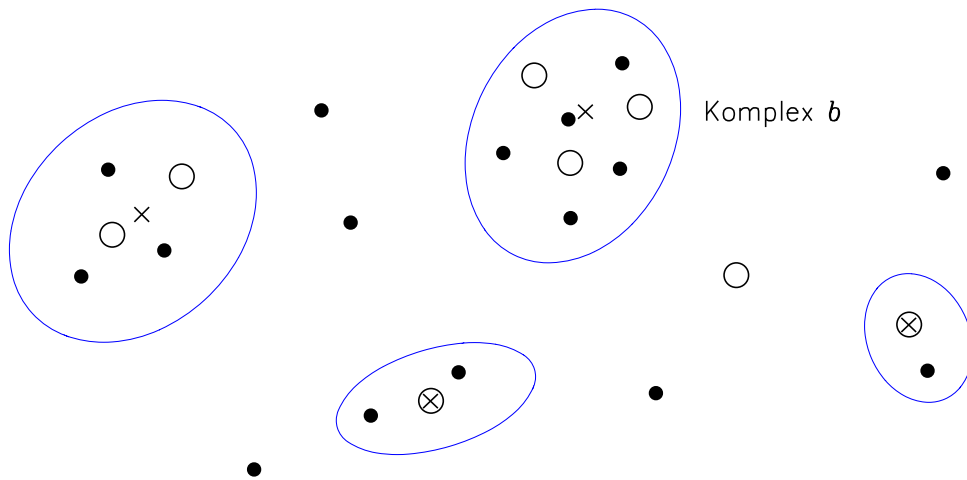


Abbildung 2.7: Ungebundene Punktladungen und Komplexe (Atome, Moleküle, Ionen)

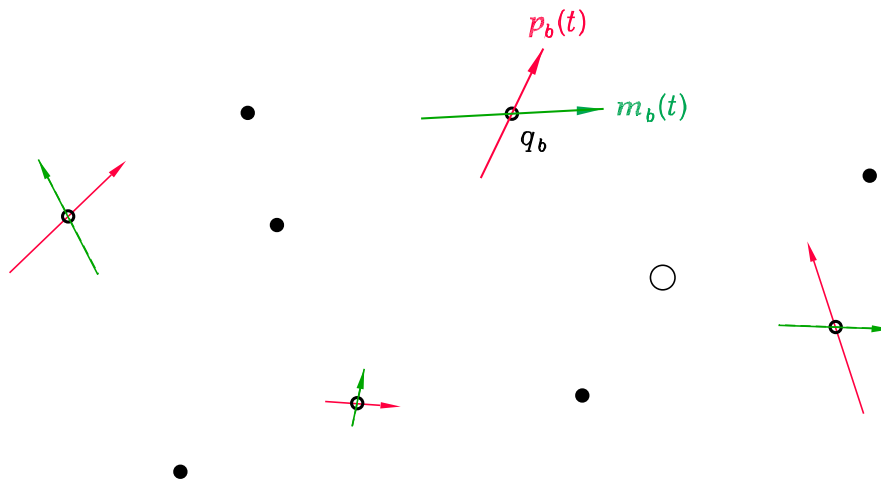


Abbildung 2.8: Ungebundene Punktladungen und fiktive Punktladungen sowie fiktive elektrische und magnetische Punktdipole, welche die Komplexe ersetzen

Beweis von Gl. (2.49) bis (2.51):

Für den Beweis dieser Beziehungen gehen wir von Gl. (2.34) und (2.36) aus und benutzen die Taylorentwicklung (2.44) sowie Gl. (2.38).

$$\langle \mathbf{j}^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) \rangle = \left\langle \sum_{a=1}^{N_u} q_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \right\rangle + \sum_{b=1}^{n_K} \langle \mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

$$\langle \mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t) \rangle = \left\langle \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} \mathbf{v}_{b\beta}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{b\beta}(t)) \right\rangle = \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} \mathbf{v}_{b\beta}(t) \underbrace{\Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{b\beta}(t)|)}_{\text{s. Gl. (2.44)}},$$

$$\begin{aligned}
 \langle j_{b,k}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \left\langle \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} \underbrace{v_{b\beta,k}(t)}_{v_{b,k}(t) + w_{b\beta,k}(t)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle \\
 &\quad - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} \underbrace{v_{b\beta,k}(t)}_{v_{b,k}(t) + w_{b\beta,k}(t)} x_{b\beta,l}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle + \dots, \quad k = 1, 2, 3; \\
 \langle j_k^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \underbrace{\left\langle \sum_{a=1}^{N_u} q_a v_{a,k}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) + \sum_{b=1}^{n_K} q_b v_{b,k}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle}_{j_k(\mathbf{r}, t) \text{ Gl. (2.50)}} \\
 &\quad + \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} w_{b\beta,k}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle \\
 &\quad \quad \quad \frac{dp_{b,k}(t)}{dt} \\
 &\quad - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \underbrace{\sum_{b=1}^{n_K} \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} x_{b\beta,l}(t) v_{b,k}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t))}_{p_{b,l}(t)} \right\rangle \\
 &\quad - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} x_{b\beta,l}(t) w_{b\beta,k}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle + \dots, \quad k = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Durch Ableiten von

$$P_k(\mathbf{r}, t) = \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} p_{b,k}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle$$

nach der Zeit ergibt sich

$$\left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \frac{dp_{b,k}(t)}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle = \frac{\partial P_k(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} p_{b,k}(t) v_{b,l}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle.$$

Setzt man dies in Gl. (2.52) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
 \langle j_k^{(\text{Mat})}(\mathbf{r}, t) \rangle &= j_k(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial P_k(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\
 &\quad + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} [p_{b,k}(t) v_{b,l}(t) - p_{b,l}(t) v_{b,k}(t)] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle \\
 &\quad - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} x_{b\beta,l}(t) w_{b\beta,k}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle + \dots .
 \end{aligned}$$

Wir vollenden nun den Beweis der Beziehungen (2.49) bis (2.51), indem wir zeigen, dass

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \left[ p_{b,k}(t) v_{b,l}(t) - p_{b,l}(t) v_{b,k}(t) \right] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle \\ = c \operatorname{rot}_k \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \left( \mathbf{p}_b(t) \times \frac{\mathbf{v}_b(t)}{c} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle \end{aligned}$$

und

$$- \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} x_{b\beta,l}(t) w_{b\beta,k}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle = c \operatorname{rot}_k \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \mathbf{m}_b(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle + \dots$$

gilt. Diese Schritte werden in den folgenden Ergänzungen E1 und E2 behandelt.

Ergänzung E1:

$$\begin{aligned} c \operatorname{rot}_k \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \left( \mathbf{p}_b(t) \times \frac{\mathbf{v}_b(t)}{c} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle &= \sum_{l,m=1}^3 \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \underbrace{\left[ \mathbf{p}_b(t) \times \mathbf{v}_b(t) \right]_m}_{\sum_{r,s=1}^3 \varepsilon_{mrs} p_{b,r}(t) v_{b,s}(t)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle \\ &= \sum_{l,r,s=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \underbrace{\sum_{m=1}^3 \varepsilon_{mkl} \varepsilon_{mrs}}_{\delta_{kr} \delta_{ls} - \delta_{ks} \delta_{lr}} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} p_{b,r}(t) v_{b,s}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \left[ p_{b,k}(t) v_{b,l}(t) - p_{b,l}(t) v_{b,k}(t) \right] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle; \end{aligned}$$

Ergänzung E2:

$$\begin{aligned} c \operatorname{rot}_k \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \mathbf{m}_b(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle &= c \sum_{l,m=1}^3 \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \underbrace{m_{b,m}(t)}_{\frac{1}{2c} \sum_{r,s=1}^3 \varepsilon_{mrs} \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} x_{b\beta,r}(t) w_{b\beta,s}(t)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l,r,s=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \underbrace{\sum_{m=1}^3 \varepsilon_{mkl} \varepsilon_{mrs}}_{\delta_{kr} \delta_{ls} - \delta_{ks} \delta_{lr}} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} x_{b\beta,r}(t) w_{b\beta,s}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} x_{b\beta,k}(t) \underbrace{w_{b\beta,l}(t)}_{\frac{dx_{b\beta,l}(t)}{dt}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} x_{b\beta,l}(t) w_{b\beta,k}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Zu zeigen bleibt, dass die erste Zeile im Ausdruck (2.53) bis auf vernachlässigbare Terme (Terme

der Ordnung  $a^2$ ) gleich ist der zweiten Zeile. Dass dies zutrifft, kann man aus

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} x_{b\beta,k}(t) x_{b\beta,l}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle \\
 & \quad \sim a^2 \\
 & = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} x_{b\beta,k}(t) w_{b\beta,l} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} x_{b\beta,l}(t) w_{b\beta,k} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} \left\langle \sum_{b=1}^{n_K} \sum_{\beta=1}^{N_b} q_{b\beta} x_{b\beta,k}(t) x_{b\beta,l}(t) v_{b,m}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \right\rangle \\
 & \quad \sim a^2
 \end{aligned}$$

ablesen.

Wir haben also für  $\langle \rho^{(\text{Mat})} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{j}^{(\text{Mat})} \rangle$  tatsächlich Ausdrücke der Form (2.31) bzw. (2.32) erhalten, wobei  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{M}$ , wie man aus den erhaltenen Formeln sieht, tatsächlich die aus der phänomenologischen makroskopischen Elektrodynamik geläufige Bedeutung besitzen.

Die *freie elektrische Ladungsdichte*  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , die durch Gl. (2.47) gegeben ist, ist normalerweise null. Bei einem Ionenkristall (z. B. NaCl) gibt es keine ungebundenen Elektronen, und die Beiträge der positiven und negativen Gitterionen kompensieren sich im makroskopischen Mittel. Ebenso kompensieren sich die Beiträge der positiven und negativen Ionen in einem Elektrolyten und die Beiträge der Leitungselektronen und der positiven Gitterionen in einem festen metallischen Leiter im makroskopischen Mittel usw. Nur wenn man durch Bombardieren von Materie mit Ladungen aus einem Beschleuniger Überschussladungen in die Materie einbringt, kommt es vorübergehend lokal zu einer von null verschiedenen Raumladungsdichte  $\rho$  (s. dazu Seite 130).

Die *Leitungsstromdichte* (freie elektrische Stromdichte)  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  ist durch Gl. (2.50) gegeben. Bei einem Ionenkristall gibt es nur Beiträge der an Gleichgewichtslagen gebundenen Ionen zufolge deren Schwerpunktsbewegung. Ist das betrachtete Materiestück (wie vorausgesetzt) im zugrunde gelegten Inertialsystem in Ruhe, so kann man aber diese Beiträge vernachlässigen, da die Ionengeschwindigkeiten  $\mathbf{v}_b(t)$  „fluktuieren“, sodass sich die Beiträge im makroskopischen Mittel „auslöschen“. Bei einem Elektrolyten, an den eine Spannung angelegt ist, kommt es dagegen zu einer gemeinsamen Driftbewegung der positiven Ionen einerseits und der negativen Ionen andererseits und zu entsprechenden makroskopischen Leitungsströmen. Bei einem festen metallischen Leiter, an den eine Spannung angelegt ist, kommt es zu einer Driftbewegung der Leitungselektronen und einem entsprechenden makroskopischen Leitungsstrom. Die Beiträge der Gitterionen löschen sich im makroskopischen Mittel als „fluktuierend“ weg.

Das *elektrische Polarisationsfeld* ist durch Gl. (2.48) gegeben. Zu  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  tragen alle geladenen und ungeladenen Komplexe, gleichgültig ob „frei“ beweglich (z. B. Ionen in

Elektrolyten) oder an Gitterplätze gebunden, mit ihren elektrischen Dipolmomenten bei. Die elektrischen Dipolmomente  $\mathbf{p}_b(t)$  können dabei zur Gänze durch das vorhandene elektromagnetische Feld *induziert* sein oder auch einen *permanenten* Anteil enthalten (z. B. H<sub>2</sub>O-Molekül). Wie die Formel zeigt, stellt  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  tatsächlich das mittlere elektrische Dipolmoment pro Volumseinheit in der Materie dar.

Analoge Aussagen gelten für das *magnetische Polarisationsfeld*, das durch Gl. (2.51) gegeben ist. Die magnetischen Dipolmomente  $\mathbf{m}_b(t)$  der Komplexe können ebenfalls zur Gänze durch das vorhandene elektromagnetische Feld *induziert* sein oder einen *permanenten* Anteil enthalten. In die magnetischen Dipolmomente  $\mathbf{m}_b(t)$  sind auch die von den Spins der Elektronen und der Kerne herrührenden magnetischen Dipolmomente einzubeziehen. (Dies ist für den Ferromagnetismus wesentlich.) Neben den magnetischen Dipolmomenten der Komplexe (gleichgültig ob geladen oder ungeladen, ob „frei“ beweglich oder an Gitterplätze gebunden) gibt es im Prinzip noch Beiträge, welche mit der Bewegung elektrischer Dipole verbunden sind. Dabei trägt ein Komplex  $b$  zu  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  mit  $\langle (\mathbf{p}_b(t) \times \frac{\mathbf{v}_b(t)}{c}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) \rangle$  bei. Dies ist ein relativistischer Effekt: Sind  $\mathbf{p}_b(t)$ ,  $\mathbf{m}_b(t)$  das elektrische bzw. magnetische Dipolmoment des Komplexes in dessen Schwerpunktsystem, so ist das magnetische Moment des Komplexes im betrachteten Inertialsystem, in welchem sich der Komplex mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_b(t)$  bewegt, durch  $\mathbf{m}'_b(t) = \mathbf{m}_b(t) + (\mathbf{p}_b(t) \times \frac{\mathbf{v}_b(t)}{c})$  gegeben. Die Zusatzbeiträge von an Gitterplätzen gebundenen Komplexen heben sich als „fluktuierend“ im Mittel weg, die Beiträge von „frei“ beweglichen Komplexen sind für ruhende Materie klein, da die Geschwindigkeitsbeträge  $|\mathbf{v}_b(t)|$  klein gegen  $c$  sind. Wie die Formel zeigt, stellt  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  tatsächlich das mittlere magnetische Dipolmoment pro Volumseinheit in der Materie dar.

## 2.3 Materialgleichungen

Die Ableitung von Materialgleichungen, d. h. von Funktionalen  $\mathbf{P}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$ ,  $\mathbf{M}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$  und  $\mathbf{j}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$ , stellt ein schwieriges klassisches bzw. quantentheoretisches Problem dar. Es existiert eine ungeheure Vielfalt elektrischer und magnetischer Phänomene in Materie, insbesondere in kristallinen Festkörpern. Das Studium dieser Phänomene und die Ableitung von Materialgleichungen für bestimmte Klassen von Materialien (z. B. metallische Leiter, Ferromagnetika, Supraleiter etc.) ist Aufgabe der Materialforschung, der Theorie der kondensierten Materie und der Statistischen Physik.

Für die Ableitung von Materialgleichungen ist nicht nur ein detailliertes mikroskopisches Modell für das untersuchte Material Voraussetzung, sondern es ist auch entscheidend, ob die (von im Endlichen oder im Unendlichen befindlichen äußeren Quellen herrührenden) äußeren Felder  $\mathbf{E}^{(\text{ex})}$ ,  $\mathbf{B}^{(\text{ex})}$  und damit die Gesamtfelder in der Materie  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  schwach oder sehr stark, zeitlich konstant bzw. langsam veränderlich oder zeitlich rasch veränderlich sind.

Wir besprechen nur die einfachsten Formen von phänomenologischen Materialgleichungen.



chungen und beschränken uns deshalb auf homogene, isotrope<sup>10</sup>, nicht ferroelektrische, nicht ferromagnetische, nicht supraleitende Substanzen und nicht zu starke Felder  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  (lineare Näherung). Da es sich um Phänomenologie handelt, kann dieser Unterabschnitt seiner Natur nach nur ein primär Erzählender sein.

Für den Fall *zeitunabhängiger makroskopischer Quellen und Felder*<sup>11</sup> (Elektrostatik und Magnetostatik der Medien) gelten dann in guter Näherung die Materialgleichungen<sup>12</sup>

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (2.54)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi_m \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (2.55)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (2.56)$$

Die Materialkonstante  $\chi_e$  heißt *statische elektrische Suszeptibilität*. Es gilt stets  $\chi_e > 0$ . Die Materialkonstante  $\chi_m$  wird als *statische magnetische Suszeptibilität* bezeichnet.<sup>13</sup> Je nachdem, ob die Substanz para- oder diamagnetisch ist, gilt  $\chi_m > 0$  oder  $\chi_m < 0$ . Die Materialkonstante  $\sigma$  heißt *Gleichstromleitfähigkeit*. Es gilt stets  $\sigma > 0$ .<sup>14</sup> Die Materialkonstanten  $\chi_e$ ,  $\chi_m$  und  $\sigma$  sind *temperaturabhängig*,  $\chi_e$  und  $\chi_m$  sind dimensionslos,  $\sigma$  hat die Dimension  $s^{-1}$ .

Die Annahme linearer Beziehungen zwischen  $\mathbf{P}$  bzw.  $\mathbf{M}$  und den Feldstärken  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  für nicht zu starke Felder  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  ist wegen der hohen inneratomaren und innermolekularen Feldstärken plausibel („lineare Antwort“ des Mediums). Wegen des verschiedenen Verhaltens von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  bei Zeitumkehrtransformationen (siehe Seite 71) sind im *zeitunabhängigen* Fall Beziehungen der Form  $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} + \kappa_e \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{B} + \kappa_m \mathbf{E}$  nicht möglich.<sup>15</sup> Was den Leitungsstrom betrifft, so kann der Einfluss von  $\mathbf{B}$  i. Allg. als kleiner Effekt vernachlässigt werden (Halleffekt). Die lineare Beziehung zwischen  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{E}$ , das *ohmsche Gesetz*, kann für einen kristallinen Festkörper folgendermaßen verstanden werden: Liegt makroskopisch ein stationärer (zeitunabhängiger) Strom vor, so bedeutet dies, dass die „frei“ beweglichen Ladungsträger durch Stöße mit den Gitterionen dauernd Energie verlieren, sodass es im Mittel zu keiner Beschleunigung kommt. (Die an das Gitter abgegebene Energie macht sich als joulesche Wärme bemerkbar.) Das ohmsche Gesetz besagt, dass zufolge dieses „Reibungswiderstandes“ die Geschwindigkeit der Ladungsträger proportional zur Kraft ist. Bei Elektrolyten gelten ähnliche Überlegungen.

<sup>10</sup>Kristalline Festkörper sind i. Allg. aus statistisch orientierten Mikrokristallen aufgebaut und deshalb isotrop. Im Falle von Einkristallen liegt Isotropie nur bei kubischer Struktur vor.

<sup>11</sup>Die mikroskopischen Quellen und Felder sind stets zeitlich rasch veränderlich.

<sup>12</sup>gaußsches Maßsystem

<sup>13</sup>Aus historischen Gründen ist meist  $\tilde{\chi}_m$  tabelliert, wobei  $\mathbf{M} = \tilde{\chi}_m \mathbf{H}$  gilt.

<sup>14</sup>Für gute Isolatoren ist die Gleichstromleitfähigkeit so klein, dass man für viele Untersuchungen  $\sigma = 0$  setzen kann.

<sup>15</sup>Siehe dazu § 58 von Landau, L. D., und E. M. Lifschitz: Elektrodynamik der Kontinua. Bd. VIII des Lehrbuches der Theoretischen Physik. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 1990.

Setzt man (2.54) und (2.55) in die Beziehungen (2.13), (2.14) ein, so kann man

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (2.57)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (2.58)$$

schreiben. Dabei ist

$$\varepsilon := 1 + 4\pi\chi_e \quad (2.59)$$

die *statische Dielektrizitätskonstante*. Wegen  $\chi_e > 0$  gilt  $\varepsilon > 1$ . Die Werte von  $\varepsilon$  sind für Gase nur geringfügig größer als eins, für Flüssigkeiten und Festkörper kann  $\varepsilon$  jedoch wesentlich größere Werte annehmen (Pyrex-Glas 1710:  $\varepsilon = 6,00$ ; H<sub>2</sub>O-flüssig bei 20° C:  $\varepsilon = 80,1$ ). Ferner ist

$$\mu := \frac{1}{1 - 4\pi\chi_m} \quad (2.60)$$

die *statische magnetische Permeabilität*.<sup>16</sup> Für Paramagnetika ist  $\chi_m > 0$ , also  $\mu > 1$ , für Diamagnetika ist  $\chi_m < 0$ , also  $\mu < 1$ . Für die meisten Materialien<sup>17</sup> gilt  $|\chi_m| \lesssim 10^{-3}$  (Diamagnetika:  $|\chi_m| \lesssim 10^{-6}$ ; Paramagnetika:  $\chi_m \lesssim 10^{-3}$ ), also kann man für die meisten Untersuchungen  $\mu = 1$  setzen. Die größten Unterschiede zwischen verschiedenen Substanzen treten bei der Gleichstromleitfähigkeit  $\sigma$  auf:  $\sigma_{\text{Kupfer}}/\sigma_{\text{Porzellan}} \approx 10^{20}$ .

Für *zeitlich nicht zu rasch veränderliche Felder* kann man in guter Näherung als Materialgleichungen

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.61)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \chi_m \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.62)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.63)$$

bzw. Gl. (2.63) und

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.64)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2.65)$$

mit den *statischen Materialkonstanten*  $\chi_e, \chi_m, \sigma$  bzw.  $\varepsilon, \mu, \sigma$  verwenden, wofern die Felder hinreichend schwach sind. Im *zeitabhängigen* Fall ergibt die lineare Näherung zwar  $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} + \kappa_e \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{B} + \kappa_m \mathbf{E}$ , doch sind die Effekte von  $\mathbf{B}$  auf  $\mathbf{P}$  und von  $\mathbf{E}$  auf  $\mathbf{M}$  sehr klein.<sup>18</sup>

Wir haben schon auf Seite 127 gesehen, dass die freie Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r}, t)$  normalerweise null ist. Wir können nun explizit zeigen, dass es in einem Materievolumen  $\mathcal{V}$  mit

<sup>16</sup> $\mu = 1 + 4\pi\bar{\chi}_m$

<sup>17</sup>Ferromagnetika haben wir aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen.

<sup>18</sup>Siehe dazu § 58 und § 83 von Landau, L. D., und E. M. Lifschitz: Elektrodynamik der Kontinua. Bd. VIII des Lehrbuches der Theoretischen Physik. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 1990.

elektrisch leitender homogener Materie keine permanente von null verschiedene freie Raumladungsdichte geben kann. Zu diesem Zweck schreiben wir die Feldgleichung (2.15) für Aufpunkte  $\mathbf{r}$  im Inneren eines solchen Materievolumens an, wobei wir annehmen, dass für derartige Aufpunkte  $\rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) = 0$  gilt:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t). \quad (2.66)$$

Einsetzen der Materialgleichung (2.64) liefert dann

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho(\mathbf{r}, t). \quad (2.67)$$

Setzt man andererseits in die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.68)$$

die Materialgleichung (2.63) ein, so erhält man

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.69)$$

Aus den Gleichungen (2.67), (2.69) folgt für  $\rho(\mathbf{r}, t)$  die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (2.70)$$

mit der Lösung

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) e^{-t/\tau_R} \quad \text{mit} \quad \tau_R := \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}. \quad (2.71)$$

$\tau_R$  wird als *Relaxationszeit* bezeichnet. Die Relaxationszeit ist für gute Leiter extrem kurz (Cu:  $10^{-19}$  s), kann aber in den besten Isolatoren Werte bis  $10^6$  s (rund zehn Tage) erreichen. Um eine anfängliche von null verschiedene freie Raumladungsverteilung zu präparieren, muss man Ladungen auf eine Weise „injizieren“, welche Gl. (2.63) verletzt, etwa indem man das Materiestück mit einem Puls hochenergetischer Elektronen aus einem Beschleuniger so „bombardiert“, dass diese im Inneren des Materiestücks „zur Ruhe kommen“. Gemäß Gl. (2.71) „abgebaute“ Raumladungen finden sich auf der Oberfläche  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  wieder (Ladungserhaltung). Derartige Oberflächenladungsverteilungen gehen in die *Grenzbedingungen* für die Feldstärken auf der Oberfläche ein (siehe Abschnitt 2.5). Für gute Leiter kann man stets  $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$  setzen<sup>19</sup>, da die Relaxationszeiten selbst gegen die zeitlichen Perioden elektromagnetischer Wellen mit Frequenzen aus dem sichtbaren Bereich klein sind. Bei Isolatoren ist dafür Voraussetzung, dass das Materiestück entweder gar nicht oder vor sehr langer Zeit (wie oben beschrieben) „bombardiert“ wurde.

Für *zeitlich sehr rasch veränderliche Felder* sind die Materialgleichungen (2.61) bis (2.63)

<sup>19</sup>Wofern man nicht den Relaxationsvorgang selbst untersuchen will.

bzw. (2.63) bis (2.65) nicht mehr brauchbar. Es gibt dann das Phänomen der *Dispersion*<sup>20</sup> der elektrischen Suszeptibilität, und die Magnetisierung sowie die magnetische Suszeptibilität verlieren – wie man zeigen kann<sup>21</sup> – ihren Sinn, sodass man

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2.72)$$

bzw.  $\mu = 1$  zu setzen hat.

Für zeitlich sehr rasch veränderliche Felder tritt die *Trägheit der Materie* in Erscheinung, ferner kann es zu Absorptionsvorgängen kommen (Resonanzabsorption durch Atome, Moleküle und Ionen). Die Ladungen der Materie können in ihren Bewegungen mit den zeitlichen Änderungen des „angelegten“ elektromagnetischen Feldes nicht mehr „Schritt halten“. Bei den optischen Frequenzen ( $\omega \sim 10^{15}$  Hertz) reagieren überhaupt nur mehr die *Elektronen* merklich auf zeitliche Feldänderungen. Bei den höchsten in der makroskopischen Elektrodynamik zulässigen Frequenzen ( $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \lesssim \frac{2\pi c}{L_0} \sim 2 \cdot 10^{17}$  Hertz; s. Seite 116) reagieren schließlich auch die Elektronen nicht mehr auf zeitliche Feldänderungen, was bedeutet, dass es keinen „Leitungsstrom“ und keinen „Polarisationsstrom“ mehr gibt.<sup>22</sup> (Siehe dazu auch Abb. 2.11 von Seite 136.) Die Begriffe Leitungsstrom und Polarisationsstrom wurden dabei unter Anführungszeichen gesetzt, weil es sich für zeitlich sehr rasch veränderliche Felder um eine Unterscheidung handelt, die als etwas Gekünsteltes anzusehen ist. Betrachten wir jenen Frequenzbereich, in dem es nur mehr auf die Elektronen ankommt: Es ist klar, dass sich in zeitlich sehr rasch veränderlichen Feldern die ungebundenen Elektronen („freien“ Ladungsträger) qualitativ nicht anders bewegen als die in Atomen, Molekülen oder Ionen gebundenen Elektronen. Beide Arten von Elektronen führen eine oszillatorische Bewegung aus. Im *Oszillatormodell* der Dispersion und der Resonanzabsorption werden die gebundenen Elektronen als „strahlungsgedämpfte“ Oszillatoren mit bestimmten Eigenfrequenzen (Resonanzfrequenzen) angesehen.<sup>23</sup> Fourierkomponenten des elektromagnetischen Feldes mit Frequenzen aus der Umgebung<sup>24</sup> einer Eigenfrequenz (Resonanzfrequenz)<sup>25</sup> der Substanz werden durch *Absorption* geschwächt („extingiert“). Dispersion ist stets mit Absorption verknüpft. Die ungebundenen Elektronen können im Rahmen dieser Modellvorstellungen formal als Oszillatoren mit „Eigenfrequenz“  $\omega_0 = 0$  einbezogen werden. Fourierkomponenten des elektromagnetischen Feldes mit Frequenzen aus der Umgebung der „Eigenfrequenz“

---

<sup>20</sup>Der Name rührt daher, dass das Medium dann Partialwellen eines elektromagnetischen Pulses *dispergiert*, d. h. auseinander streut, da Partialwellen mit verschiedener Frequenz verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzen.

<sup>21</sup>Siehe dazu § 60 von Landau, L. D., und E. M. Lifschitz: Elektrodynamik der Kontinua. Bd. VIII des Lehrbuches der Theoretischen Physik. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 1990.

<sup>22</sup>Wegen  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$  ist außerdem  $\mathbf{j}_M = \mathbf{0}$ .

<sup>23</sup>Siehe dazu Abschnitt 7.5 von Jackson, J. D.: Klassische Elektrodynamik. Walter de Gruyter, Berlin 2006.

<sup>24</sup>Wegen der Dämpfung der oszillatorischen Bewegung der Elektronen durch die Strahlungsrückwirkungskraft („Strahlungsdämpfungskraft“) gibt es Resonanzbereiche mit endlicher Breite.

<sup>25</sup>Quantenmechanisch ergeben sich die Resonanz- bzw. Absorptionsfrequenzen aus den Energieniveauschemata der Atome, Moleküle und Ionen der Substanz.

$\omega_0 = 0$  werden durch Umwandlung von Feldenergie in joulesche Wärme geschwächt („extingiert“).

Im Sinne dieser Überlegungen schreibt man für *zeitlich sehr rasch veränderliche Felder*, insbesondere für die Untersuchung der Phänomene der Optik, die *Feldgleichungen* in der folgenden Form an ( $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$  gesetzt):

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi[-\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t)], \quad (2.73)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.74)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.75)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \left[ \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.76)$$

bzw.

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t), \quad (2.77)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.78)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.79)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.80)$$

Der „Leitungsstrom“ wird dann durch

$$\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

„mitberücksichtigt“. Dies wird durch eine entsprechend definierte frequenzabhängige komplexe elektrische Suszeptibilitätsfunktion bzw. Dielektrizitätsfunktion gewährleistet (Einbeziehung der „ $\omega_0 = 0$ -Resonanz“ bei Leitern; s. dazu Seite 137).<sup>26</sup>

Während die Dispersion in „nichtpolaren“ Substanzen erst im Infrarotbereich oder im optischen Bereich auftritt ( $\omega \gtrsim 10^{13}$  Hertz), tritt sie bei „polaren“ Substanzen (Substanzen mit permanenten elektrischen Dipolen) schon bei relativ niedrigen Frequenzen in Erscheinung ( $\omega \gtrsim 10^4$  Hertz bei Eis von  $-1^\circ\text{C}$ ,  $\omega \gtrsim 10^{10}$  Hertz bei  $\text{H}_2\text{O}$ -flüssig von  $20^\circ\text{C}$ ).

<sup>26</sup>Der hier eingenommene, physikalisch plausibelste Standpunkt wird u. a. von Jackson und Landau-Lifschitz vertreten. Gleichwertig dazu ist die Beibehaltung von  $\mathbf{j}$  in der Feldgleichung für  $\operatorname{rot} \mathbf{B}$  und die Einführung einer frequenzabhängigen Leitfähigkeitsfunktion und einer frequenzunabhängigen Dielektrizitätskonstante. Manche Autoren tun allerdings des Guten zu viel und führen frequenzabhängiges  $\sigma$  und  $\varepsilon$  ein. Siehe dazu Abschnitt 7.5 von Jackson, J. D.: Klassische Elektrodynamik. Walter de Gruyter, Berlin 2006.

Die Trägheit der Materie wirkt sich bei zeitlich rasch veränderlichen Feldern so aus, dass die elektrische Polarisation  $\mathbf{P}$  am Aufpunkt  $\mathbf{r}$  zum Zeitpunkt  $t$  durch die am betreffenden Aufpunkt zu Zeiten  $t' < t$  herrschenden Feldstärken  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  bestimmt ist (so genannte *zeitliche* Dispersion).<sup>27</sup> Für hinreichend schwache „angelegte Felder“ hat man dann unter Vernachlässigung eines kleinen Effektes von  $\mathbf{B}$  anstelle von Gl. (2.61) (eigentlich anstelle von Gl. (2.61) und (2.63)) eine lineare Beziehung der Art

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \alpha(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') = \int_0^{+\infty} d\tau \alpha(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t-\tau). \quad (2.81)$$

Dabei ist  $\alpha$  eine reellwertige Funktion, welche die Dispersions- und Absorptionseigenschaften der Substanz charakterisiert und als *Relaxationsfunktion* bezeichnet wird.

Im Falle von sehr starken „angelegten“ Feldern, wie man sie mittels Laserpulsen erzeugen kann ( $|\mathbf{E}^{(\text{ex})}|$  bis  $10^{13}$  V/m gegenüber inneratomaren Feldern von rund  $10^{11}$  V/m), muss man die Materialgleichung (2.61) bzw. die Materialgleichung (2.81) durch einen in  $\mathbf{E}$  quadratischen Term ergänzen (nichtlineare Optik). Fällt eine elektromagnetische Welle mit so hohen Feldstärken, welche die Frequenzen  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  enthält, auf ein Medium ein, so bilden sich im Medium Wellen mit Frequenzen  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ,  $\omega_1 + \omega_2$  und  $|\omega_1 - \omega_2|$  aus.

Führt man eine *komplexe Fouriertransformation* der Feldgrößen  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{D}$  bzgl. der Zeitvariablen durch, so hat man

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}} d\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dt \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} \quad (2.82)$$

und analoge Beziehungen für  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{D}$ . Während  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  und  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  reellwertig sind, sind  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ ,  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega)$  und  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega)$  *komplexwertige* Funktionen mit  $\omega \in \mathbb{R}$ . Mit der Materialgleichung (2.81) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dt \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dt \int_0^{+\infty} d\tau \alpha(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t-\tau) e^{i\omega t} \\ &= \int_0^{+\infty} d\tau \alpha(\tau) e^{i\omega\tau} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dt \mathbf{E}(\mathbf{r}, t-\tau) e^{i\omega(t-\tau)}}_{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') e^{i\omega t'} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)} . \end{aligned}$$

Für die komplexen Fourieramplituden gilt also die Materialgleichung

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \chi_e(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.83)$$

<sup>27</sup>In Plasmen und in manchen Metallen gibt es daneben noch eine *räumliche* Dispersion. In derartigen Medien können sich auch *longitudinale* elektromagnetische Wellen ausbreiten.

mit der frequenzabhängigen komplexwertigen *elektrischen Suszeptibilitätsfunktion*

$$\chi_e(\omega) := \int_0^{+\infty} d\tau \alpha(\tau) e^{i\omega\tau}. \quad (2.84)$$

Dabei beschreibt die frequenzabhängige Phase von  $\chi_e(\omega)$  das zeitliche „Nachhinken“ von  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  gegenüber  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . Gleichwertig zu Gl. (2.83), (2.84) ist die Beziehung

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.85)$$

mit der frequenzabhängigen komplexwertigen *Dielektrizitätsfunktion*

$$\varepsilon(\omega) := 1 + 4\pi\chi_e(\omega) = 1 + 4\pi \int_0^{+\infty} d\tau \alpha(\tau) e^{i\omega\tau}. \quad (2.86)$$

Aus Gl. (2.86) folgt

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon(-\omega) \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) & \text{gerade Funktion von } \omega; \\ \operatorname{Im} \varepsilon(\omega) & \text{ungerade Funktion von } \omega. \end{cases} \quad (2.87)$$

Die Dielektrizitätsfunktion  $\varepsilon(\omega)$  beschreibt die Dispersions- und Absorptionseigenschaften der Materie.

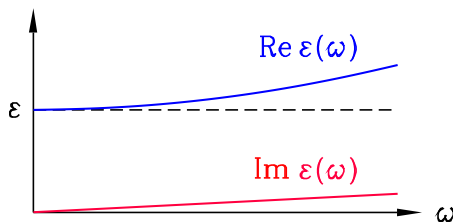


Abbildung 2.9: Niederfrequenzverhalten der Dielektrizitätsfunktion für Nichtleiter

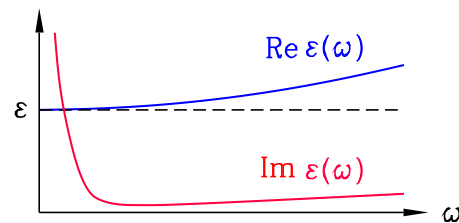


Abbildung 2.10: Niederfrequenzverhalten der Dielektrizitätsfunktion für Leiter

Wir haben die makroskopischen Feldgleichungen für zeitlich sehr rasch veränderliche Felder in der Form (2.73) bis (2.76) bzw. in der Form (2.77) bis (2.80) angeschrieben, haben also den „Leitungsstrom“ in den „Polarisationsstrom“ einbezogen. Dies muss sich im Niederfrequenzverhalten der entsprechenden Dielektrizitätsfunktion  $\varepsilon(\omega)$  manifestieren, und zwar in  $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega)$ , da – wie wir in Abschnitt 2.4 sehen werden – der *Imaginärteil* der Dielektrizitätsfunktion für die *Extinktion* durch Absorption oder Dissipation von Energie verantwortlich ist.

*Niederfrequenzverhalten für Nichtleiter* (s. Abb. 2.9):

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega) = \varepsilon + a\omega^2 + \dots, \quad \operatorname{Im} \varepsilon(\omega) = b\omega + \dots \quad (2.88)$$

Dabei ist  $\epsilon$  die statische Dielektrizitätskonstante, und  $a, b$  sind positive Konstanten.

(Für Leiter gelten derartige Beziehungen nur dann, wenn man die Feldgleichungen in der Form mit einem eigenen Leitungsstromterm  $\mathbf{j}$  beibehält.)

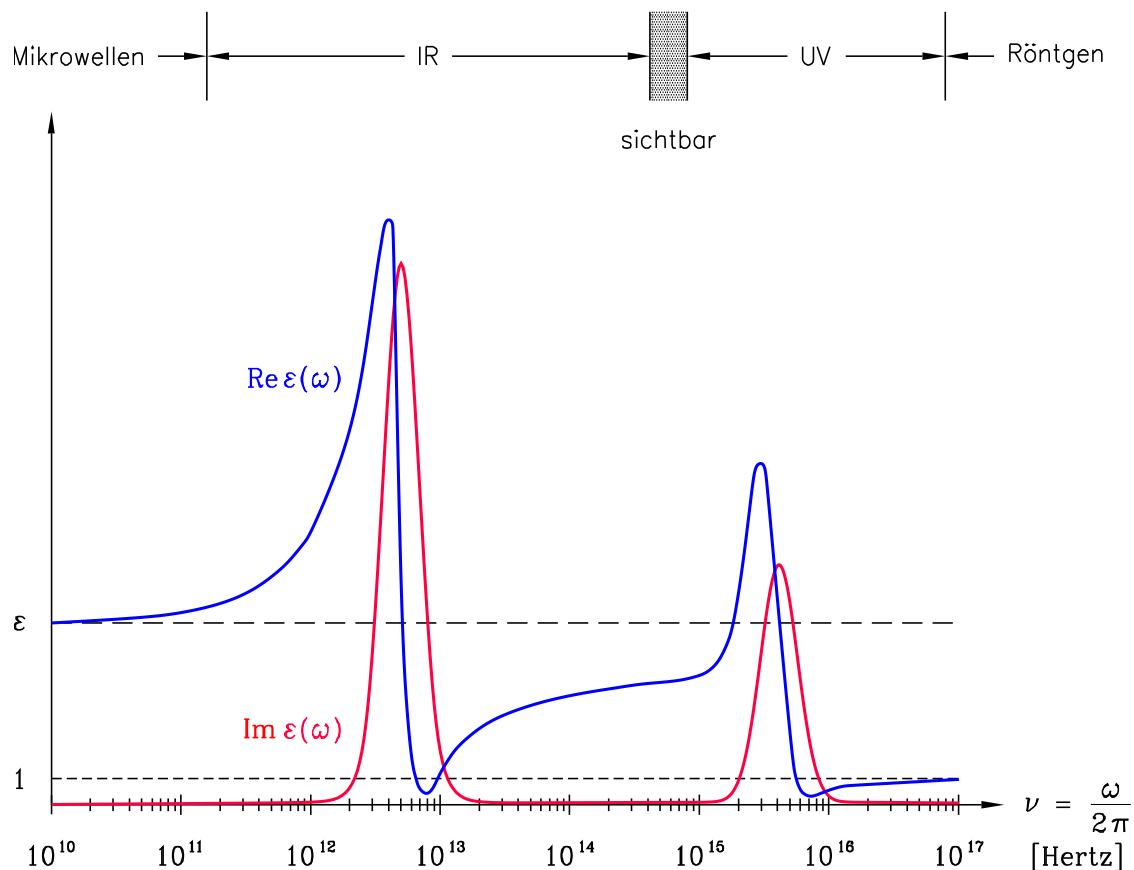


Abbildung 2.11: Dielektrizitätsfunktion für NaCl

Niederfrequenzverhalten für Leiter (s. Abb. 2.10):

$$\operatorname{Re} \epsilon(\omega) = \epsilon + a\omega^2 + \dots, \quad \operatorname{Im} \epsilon(\omega) = \frac{4\pi\sigma}{\omega} + b\omega + \dots \quad (2.89)$$

Dabei ist  $\epsilon$  die statische Dielektrizitätskonstante,  $\sigma$  ist die Gleichstromleitfähigkeit und  $a, b$  sind positive Konstanten. Die auf diese Weise in den Imaginärteil der Dielektrizitätsfunktion „eingebaute“ Singularität für  $\omega = 0$  („ $\omega_0 = 0$ -Resonanz“) liefert in  $\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) / \partial t$  den erforderlichen Term  $\sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . Um dies zu zeigen, spalten wir von  $\epsilon(\omega)$  bzw.  $\chi_e(\omega)$  die  $1/\omega$ -Singularität ab:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \implies \chi_e(\omega) = \chi_{e,0}(\omega) + \frac{i}{\omega} \sigma.$$

Der jeweilige mit dem Index 0 gekennzeichnete Term beschreibt die elektrische Polarisierbarkeit sowie die Dispersions- und Absorptionseigenschaften der Substanz.



Mit der zu (2.82) analogen komplexen Fourierdarstellung von  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  und der Materialgleichung (2.83) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \int_{\mathbb{R}} d\omega (-i\omega) \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} = \int_{\mathbb{R}} d\omega (-i\omega) \chi_e(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\omega (-i\omega) \chi_{e,0}(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} + \sigma \int_{\mathbb{R}} d\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

wobei der erste Term die Polarisationsstromdichte und der zweite Term (s. Gl. (2.82)) die Leitungsstromdichte  $\sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  darstellt.

Man kann zeigen<sup>28</sup>, dass für beliebige Substanzen

$$\text{Im } \varepsilon(\omega) > 0 \quad \text{für } \omega > 0 \quad (2.90)$$

gilt. Frequenzbereiche mit

$$\text{Im } \varepsilon(\omega) \ll \text{Re } \varepsilon(\omega) \quad (2.91)$$

nennt man *Transparenzbereiche* der betreffenden Substanz. Die Abbildung 2.11 zeigt den Verlauf der Funktionen  $\text{Re } \varepsilon(\omega)$ ,  $\text{Im } \varepsilon(\omega)$  für festes NaCl. Aus dieser Abbildung kann man unter anderem ablesen, dass der sichtbare Bereich ein Transparenzbereich dieser Substanz ist.

## 2.4 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Medium

Die mit der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Materie verbundenen Erscheinungen sind äußerst vielfältig. Dies trifft auch dann zu, wenn man sich auf homogene, isotrope, nicht ferromagnetische, nicht ferroelektrische, nicht supraleitende Substanzen beschränkt.

Für nicht zu starke elektromagnetische Felder gelten lineare Materialgleichungen. Da die Feldgleichungen ebenfalls linear sind, kann man wie im Falle des Vakuums allgemeine Wellenfelder durch lineare Überlagerung von monochromatischen Wellen mit verschiedenen Frequenzen aufbauen. Gegenüber dem Vakuum treten aber völlig neue Gesichtspunkte auf:

- Enthält ein Strahlungspuls Partialwellen mit Frequenzen aus einem Bereich, in dem die *Dispersion* nicht vernachlässigt werden kann, d. h. in dem die Frequenzabhängigkeit von  $\text{Re } \varepsilon(\omega)$  berücksichtigt werden muss, so „laufen“ auch Partialwellen gleicher Ausbreitungsrichtung „auseinander“, da sie verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzen: Der Strahlungspuls *zerfließt* (wird dispergiert).
- Enthält der Strahlungspuls Partialwellen mit Frequenzen aus einem Bereich, in

<sup>28</sup>Siehe dazu § 61 von Landau, L. D., und E. M. Lifschitz: Elektrodynamik der Kontinua. Bd. VIII des Lehrbuches der Theoretischen Physik. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 1990.

dem die Absorption nicht vernachlässigt werden kann, d. h. in dem  $\text{Im } \epsilon(\omega)$  nicht sehr klein ist gegen  $\text{Re } \epsilon(\omega)$ , so wird der Strahlungspuls zusätzlich *gedämpft* und *verzerrt* (Dämpfung zufolge Dissipation von Feldenergie, Verzerrung durch die Frequenzabhängigkeit der Absorption).

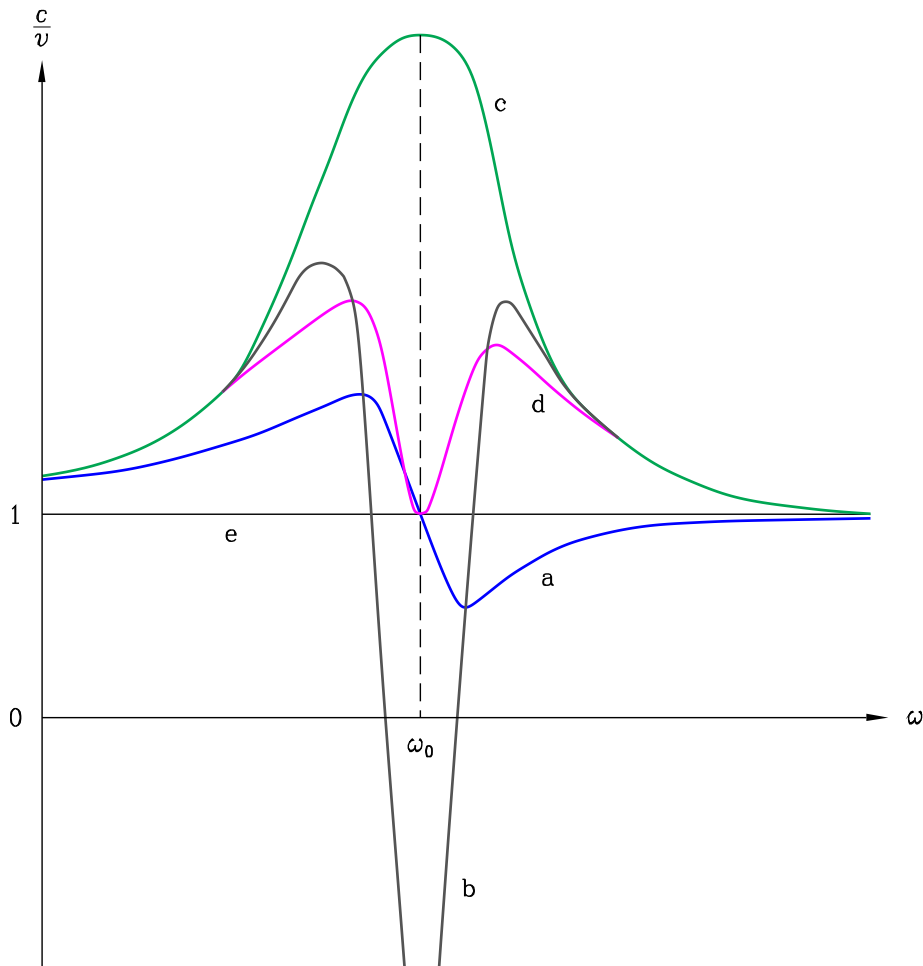


Abbildung 2.12: Verlauf von  $c$  dividiert durch Geschwindigkeit  $v$  im Bereich einer Absorptionsresonanzfrequenz  $\omega_0$

- Kurve a ...  $v$  = Phasengeschwindigkeit
- Kurve b ...  $v$  = Gruppengeschwindigkeit
- Kurve c ...  $v$  = Energietransportgeschwindigkeit
- Kurve d ...  $v$  = Signalgeschwindigkeit
- Kurve e ...  $v$  = Frontgeschwindigkeit

Die Untersuchung der Ausbreitung elektromagnetischer Strahlungspulse in dispergierenden und dissipativen Medien ist sehr kompliziert. Allein die Frage, wie man die Geschwindigkeit eines zerfließenden, gedämpften und verzerrten Signals definie-

ren soll, stellt ein schwieriges Problem dar. Es zeigt sich, dass man zwischen Phasen-, Gruppen-, Front-, Energietransport- und Signalgeschwindigkeit unterscheiden muss (s. Abb. 2.12).<sup>29</sup> Phasen- und Gruppengeschwindigkeit können in bestimmten Frequenzbereichen größer als  $c$  werden, die Gruppengeschwindigkeit verliert aber gerade in diesen Frequenzbereichen ihre sonstige physikalische Bedeutung, und die Phasengeschwindigkeit darf größer als  $c$  sein, da mit einer monochromatischen Welle weder eine Nachricht übermittelt, noch eine Wirkung ausgelöst werden kann. Die Frontgeschwindigkeit, d. i. die Geschwindigkeit, mit der die vorderste Front der ersten schwachen „Vorläufer“ eines endlichen Strahlungspulses läuft, ist stets gleich  $c$ . Die Geschwindigkeit der Signal- bzw. Wirkungsübertragung ist stets kleiner oder gleich  $c$ , und die Energietransportgeschwindigkeit ist stets kleiner als  $c$ . Im Bereich außerhalb der unmittelbaren Umgebung einer Absorptionsresonanzfrequenz<sup>30</sup> fallen Gruppengeschwindigkeit, Signalgeschwindigkeit und Energietransportgeschwindigkeit zusammen.

Wir nehmen im Folgenden  $\rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) = 0$ ,  $\mathbf{j}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$  an, d. h. die (zur Erzeugung elektromagnetischer Wellen nötigen) äußeren Quellen sollen sich im Unendlichen befinden. Ferner setzen wir  $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$ . Wenn wir in der Dielektrizitätsfunktion  $\varepsilon(\omega)$  für Leiter die „ $\omega_0 = 0$ -Resonanz“ berücksichtigen, können wir die *Feldgleichungen*

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.92)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.93)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.94)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.95)$$

und die *Materialgleichung*

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.96)$$

nicht nur für zeitlich rasch veränderliche Felder, sondern auch für zeitlich langsam veränderliche Felder verwenden. In letzterem Fall haben wir für  $\varepsilon(\omega)$  den Ausdruck

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad (2.97)$$

zu verwenden.

Beachte: Man erhält dann für  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  dieselben Beziehungen, wie wenn man von den Feldgleichungen (2.15) bis (2.18) (mit  $\rho^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) = 0$ ,  $\mathbf{j}^{(\text{ex})}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$ ,  $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$ ) und den Materialgleichungen  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  und  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  ausgeht.

<sup>29</sup>Mit den Definitionen und der Berechnung dieser Größen und den damit zusammenhängenden Fragen haben sich Sommerfeld und Brillouin auseinander gesetzt. Siehe dazu Brillouin, L.: Wave Propagation and Group Velocity. Academic Press, New York 1960. Die Abbildung 2.12 stammt aus diesem Buch. Siehe zu diesen Fragen auch Abschnitt 7.11 von Jackson, J. D.: Klassische Elektrodynamik. Walter de Gruyter, Berlin 2006.

<sup>30</sup>Bei NaCl gibt es zwei derartige Stellen; s. Abb. 2.11.

Wegen der Linearität der Feldgleichungen (2.92) bis (2.95) und der Materialgleichung (2.96) können wir die *komplexe Schreibweise* verwenden und Lösungen mit verschiedenen Frequenzen linear superponieren. Wir machen deshalb einen *Ansatz für monochromatische Wellen* in komplexer Schreibweise:

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.98)$$

$$\mathbf{B}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.99)$$

$$\mathbf{D}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{d} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (2.100)$$

Dabei sind  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{k}$  zunächst noch unabhängige konstante (d. h. nicht von  $\mathbf{r}$ ,  $t$  abhängige) *komplexe Vektoren*, und es wird auch noch kein Zusammenhang zwischen  $\mathbf{k}$  und  $\omega$  angenommen.

Aus der Definition der komplexen Fourieramplituden (s. Gl. (2.82)) und der Materialgleichung (2.96) folgt die Bedingung

$$\mathbf{d} = \varepsilon(\omega) \mathbf{a}. \quad (2.101)$$

Einsetzen des Ansatzes in Gl. (2.92) bis (2.95) unter Berücksichtigung von Gl. (2.101) gibt als weitere Bedingungen<sup>31</sup>

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (2.102) \quad \mathbf{k} \times \mathbf{a} = \frac{\omega}{c} \mathbf{b}, \quad (2.104)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (2.103) \quad \mathbf{k} \times \mathbf{b} = -\frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \mathbf{a}. \quad (2.105)$$

Setzen wir

$$\mathbf{k} = k \mathbf{n} \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad (2.106)$$

wobei  $\mathbf{n}$  ebenfalls ein komplexer Vektor sein kann, so kann man leicht zeigen (s. Aufgabe E13), dass die Gleichungen (2.102) bis (2.105) dann und nur dann keinen Widerspruch besitzen, wenn die komplexe *Dispersionsbeziehung*

$$k = k(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)} \frac{\omega}{c} \quad (2.107)$$

gilt. (Die Wurzel stellt im Komplexen eine zweideutige Funktion dar. Weiter unten wird gezeigt, dass aus physikalischen Gründen der *Hauptwert* zu nehmen ist.) Mit

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega) = k(\omega) \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1 \quad (2.108)$$

folgt dann aus den Gleichungen (2.102) bis (2.105)

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{b} = \mathbf{n} \times \sqrt{\varepsilon(\omega)} \mathbf{a}. \quad (2.109)$$

<sup>31</sup>Innere und äußere Produkte komplexer Vektoren sind *formal* nach denselben Rechenregeln zu bilden wie für reelle Vektoren, z. B.  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = k_x a_x + k_y a_y + k_z a_z$ . Desgleichen steht  $\mathbf{a}^2$  für  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ .

Wir sind hier nur an monochromatischen *fortschreitenden ebenen Wellen* interessiert. Wir nehmen deshalb an, dass  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  ein *reeller Einheitsvektor* ist, d. h. es soll  $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{n}^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$  gelten. Der Vektor  $\mathbf{n}$  hat dann die Bedeutung des *Ausbreitungsvektors* der fortschreitenden ebenen Welle.

Im Hinblick auf spätere Untersuchungen (Totalreflexion an der Grenzfläche zweier Medien) ist es aber wichtig festzuhalten, dass der Ansatz (2.98) bis (2.100) die Feldgleichungen und die Materialgleichung auch löst, wenn  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  ein *komplexer Einheitsvektor* ist, d. h. wenn  $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{C}$  und  $\mathbf{n}^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$  gilt, wofern nur die Beziehungen (2.101), (2.107), (2.108) und (2.109) erfüllt sind.<sup>32</sup> Der komplexe Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  kann dann natürlich nicht als Ausbreitungsvektor interpretiert werden, die Welle ist keine ebene Welle mehr, sondern eine so genannte *inhomogene Welle*, und die formalen „Transversalitätsbeziehungen“  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0$  drücken keinen anschaulichen Sachverhalt aus. Die Untersuchung der Frage, wie eine inhomogene Welle zu interpretieren ist, muss von Fall zu Fall unter Beachtung der speziellen Form von  $\mathbf{n}$  durchgeführt werden.

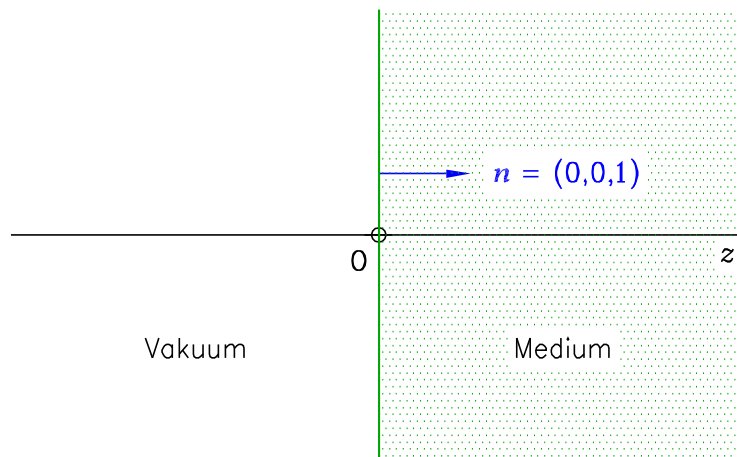


Abbildung 2.13: Materieerfüllter Halbraum

Im Folgenden soll nun  $\mathbf{n}$  ein reeller Einheitsvektor sein, wir diskutieren also jene speziellen Partikulärlösungen, welche monochromatische *fortschreitende ebene Wellen* sind. Um die physikalische Bedeutung der komplexen Kreiswellenzahl  $k(\omega)$  Gl. (2.107) zu sehen und herauszufinden, wie die Wurzel aus der komplexen Größe  $\epsilon(\omega)$  zu ziehen ist, betrachten wir vorübergehend den Fall eines mit Materie erfüllten *Halbraumes* bei  $z > 0$  (s. Abb. 2.13), in welchem sich eine von der Grenzfläche weglaufende ebene Welle mit der Kreisfrequenz  $\omega$  in  $z$ -Richtung ausbreitet ( $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ ).<sup>33</sup> Wir schreiben nur das

<sup>32</sup>Beachte: Die Forderung an  $\mathbf{n}$  lautet  $\mathbf{n}^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ , nicht  $|n_x|^2 + |n_y|^2 + |n_z|^2 = 1$ .

<sup>33</sup>Eine solche Welle bildet sich im Halbraum  $z > 0$  aus, wenn aus dem Vakuum eine von äußeren Quellen bei  $z = -\infty$  stammende monochromatische ebene Welle mit der Kreisfrequenz  $\omega$  senkrecht auf die Grenzfläche einfällt. Dabei wird die einfallende Welle teilweise in den Halbraum  $z < 0$  reflektiert und teilweise in den Halbraum  $z > 0$  transmittiert. Hier werden nur die Eigenschaften der transmittierten Welle untersucht.

$\mathbf{E}$ -Feld an, das  $\mathbf{B}$ -Feld erhält man mit Gl. (2.109) und (2.99). Mit

$$k'(\omega) := \operatorname{Re} k(\omega), \quad k''(\omega) := \operatorname{Im} k(\omega) \quad (2.110)$$

folgt dann

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a} e^{i(k'(\omega)z - \omega t)} e^{-k''(\omega)z}, \quad z > 0. \quad (2.111)$$

Es ist also für die im Komplexen zweideutige Funktion  $\sqrt{\varepsilon(\omega)}$  jener Wert zu nehmen, für den  $k''(\omega) > 0$  ist. Wegen

$$\varepsilon'(\omega) := \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) > 0, \quad \varepsilon''(\omega) := \operatorname{Im} \varepsilon(\omega) > 0 \quad \text{für} \quad \omega > 0 \quad (2.112)$$

ist dies für  $\omega > 0$  der Hauptwert (s. Abb. 2.14). Wie man analog zeigen kann, ist auch für  $\omega < 0$  der Hauptwert zu wählen.

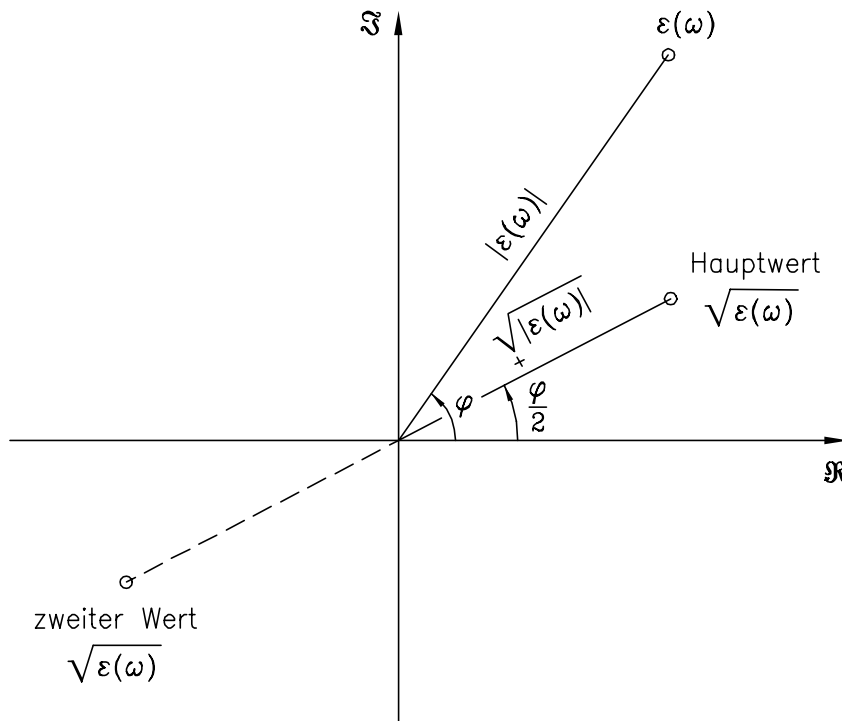


Abbildung 2.14: Wurzel aus der komplexen Dielektrizitätsfunktion für positive Frequenz

Die Berechnung von  $k'(\omega)$ ,  $k''(\omega)$  liefert (s. Aufgabe E14)

$$k'(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon'(\omega) + \sqrt{\varepsilon'^2(\omega) + \varepsilon''^2(\omega)}}{2}} \frac{\omega}{c}, \quad (2.113)$$

$$k''(\omega) = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\sqrt{2[\varepsilon'(\omega) + \sqrt{\varepsilon'^2(\omega) + \varepsilon''^2(\omega)}]}} \frac{\omega}{c}. \quad (2.114)$$

Die Gleichung (2.111) beschreibt (zusammen mit dem entsprechenden Ausdruck für  $\mathbf{B}_c(\mathbf{r}, t)$ ) eine gedämpfte monochromatische fortschreitende ebene Welle. Wie man aus den Beziehungen (2.109) sieht, handelt es sich um eine *Transversalwelle*. Diese Transversalwelle breitet sich mit der *Phasengeschwindigkeit*

$$v_{\text{ph}}(\omega) = \frac{\omega}{k'(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{\frac{\epsilon'(\omega) + \sqrt{\epsilon'^2(\omega) + \epsilon''^2(\omega)}}{2}}} \quad (2.115)$$

$$\approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon'(\omega)}} \quad \text{für } \epsilon''(\omega) \ll \epsilon'(\omega)$$

in positive  $z$ -Richtung aus. Ihre Amplitude klingt durch Absorption bzw. durch Dissipation von elektromagnetischer Feldenergie in  $z$ -Richtung auf der Distanz

$$d(\omega) = \frac{1}{k''(\omega)} = \frac{\sqrt{2[\epsilon'(\omega) + \sqrt{\epsilon'^2(\omega) + \epsilon''^2(\omega)}]}}{\epsilon''(\omega)} \frac{c}{\omega} \quad (2.116)$$

$$\approx \frac{2\sqrt{\epsilon'(\omega)}}{\epsilon''(\omega)} \frac{c}{\omega} \quad \text{für } \epsilon''(\omega) \ll \epsilon'(\omega)$$

exponentiell auf den  $e$ -ten Teil ab. Diese Distanz wird als *Eindringtiefe* bezeichnet.

In Aufgabe E15 sind Phasengeschwindigkeit und Eindringtiefe für zwei spezielle Fälle zu berechnen.

Man sieht, dass  $k''(\omega)$  dann und nur dann null, also die Eindringtiefe  $d(\omega)$  dann und nur dann unendlich ist, wenn  $\epsilon''(\omega)$  null ist. (Man sagt deshalb, dass  $\epsilon''(\omega)$  für die Absorption „verantwortlich“ ist, obwohl die Eindringtiefe quantitativ durch  $\epsilon''(\omega)$  und  $\epsilon'(\omega)$  bestimmt ist.) Da  $\epsilon''(\omega)$  nur für einen Nichtleiter und  $\omega = 0$  exakt null sein kann, *erleiden elektromagnetische Wellen beliebiger Frequenz in beliebigen Medien stets eine gewisse Extinktion*. Im Falle  $\epsilon''(\omega) \ll \epsilon'(\omega)$  ist die Abschwächung aber so geringfügig, dass man von ihr absehen kann, wofern die von der Welle im Medium durchlaufene Strecke nicht zu lang ist (z. B. Transmission durch eine Platte) bzw. wenn man im Experiment die Welle nur über eine bestimmte Strecke „verfolgt“.

Die *Dispersion* eines Strahlungspulses, welcher aus Teilwellen mit verschiedenen Frequenzen aber gleicher Ausbreitungsrichtung zusammengesetzt ist, ist nach Gl. (2.115) im Allgemeinen durch  $\epsilon'(\omega)$  und  $\epsilon''(\omega)$  bestimmt. Nur in dem Fall, dass der Strahlungspuls ausschließlich Frequenzen aus Transparenzbereichen des Mediums enthält, ist die Dispersion durch  $\epsilon'(\omega)$  allein bestimmt.

### 2.4.1 Fortschreitende ebene Wellen und Wellenpakete in „transparenten Medien“

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf den Fall vernachlässigbarer Absorption bzw. Dissipation. Wir nehmen also an, das Medium sei ein *Nichtleiter* und alle in einem

Strahlungspuls enthaltenen Frequenzen gehören *Transparenzbereichen* der betrachteten Substanz, d. h. Bereichen mit  $\varepsilon''(\omega) \ll \varepsilon'(\omega)$ , an. Für die entsprechenden Frequenzen gilt dann

$$\varepsilon'(\omega) \approx \varepsilon(\omega), \quad \varepsilon''(\omega) \approx 0. \quad (2.117)$$

Etwas missverständlich spricht man von einem „transparenten Medium“.

Für das Folgende nehmen wir wieder an, dass das Medium den ganzen Raum erfüllt. Mit (2.117) erhalten wir

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a} e^{i(\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \times \sqrt{\varepsilon(\omega)} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) \quad (2.118)$$

mit

$$\mathbf{k}(\omega) = k(\omega) \mathbf{n} = \sqrt{\varepsilon(\omega)} \frac{\omega}{c} \mathbf{n}, \quad (2.119)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.120)$$

Führen wir wie im Fall des Vakuums zwei zueinander und zu  $\mathbf{n}$  orthogonale Polarisationsvektoren  $\boldsymbol{\epsilon}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , ein (s. die Abbildung 1.26 von Seite 91), so können wir den komplexen Amplitudenvektor  $\mathbf{a}$  wieder in der Form (1.319) schreiben. In der reellen Schreibweise erhalten wir dann für die **monochromatische fortschreitende ebene Welle mit gegebener Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$  und gegebener Kreisfrequenz  $\omega$**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1,2} E_{0\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_\alpha \cos[\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_\alpha], \quad (2.121)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \times \sqrt{\varepsilon(\omega)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.122)$$

Für den Kreiswellenzahlvektor  $\mathbf{k}(\omega)$  gilt dabei die Beziehung (2.119), Phasengeschwindigkeit und Wellenlänge sind durch

$$v_{\text{ph}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\omega} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} \quad (2.123)$$

gegeben. Da  $\varepsilon(\omega)$  in Transparenzbereichen sowohl größer als auch kleiner als eins sein kann (s. z. B. die Abbildung 2.11 auf Seite 136), kann die Phasengeschwindigkeit kleiner oder größer als  $c$  sein. Die Vektoren  $\mathbf{n}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$  bilden wie im Fall des Vakuums ein orthogonales Dreibein (Rechtssystem), doch besitzen elektrische und magnetische Feldstärke verschiedene Beträge.

Was den *Polarisationszustand* einer monochromatischen ebenen Welle betrifft, gelten die für den Fall des Vakuums gemachten Aussagen (s. Seite 95) unverändert. Der Ausdruck für die *Intensität* einer solchen Welle ändert sich aber, da im Medium  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$



verschiedene Beträge besitzen. Wie in Abschnitt 2.6 gezeigt wird, gilt für die elektromagnetische Energiestromdichte im Medium die Formel

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)].$$

Da wir  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  gesetzt haben, folgt daraus für die monochromatische ebene Welle

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}, \quad (2.124)$$

und man erhält für die durch Gl. (1.301) definierte Intensität anstelle von Gl. (1.302)

$$I = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \overline{\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t)} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon(\omega)} (E_{01}^2 + E_{02}^2). \quad (2.125)$$

Wir bilden nun Überlagerungen von monochromatischen ebenen Wellen mit verschiedenen Frequenzen, wobei diese Frequenzen aber alle aus Transparenzbereichen der betreffenden Substanz stammen sollen. Für hinreichend niedrige Frequenzen ist bei allen Nichtleitern die Dispersion vernachlässigbar<sup>34</sup>, und man kann  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon$  setzen, wobei  $\varepsilon$  die statische Dielektrizitätskonstante bedeutet.

Kann die Dispersion *nicht* vernachlässigt werden, so stellen die monochromatischen ebenen Wellen bereits die *allgemeinsten* periodischen ebenen Wellen dar. Nichtmonochromatische periodische ebene Wellen gibt es nur bei vernachlässigbarer Dispersion (s. Aufgabe E16). Bei vernachlässigbarer Dispersion lautet die *allgemeinste periodische fortschreitende ebene Welle mit Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1,2} \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} \sum_{l=1}^{\infty} E_{0\alpha}^{(l)} \cos[l\omega(\sqrt{\varepsilon} \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{c} - t) + \delta_{\alpha}^{(l)}], \quad (2.126)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \times \sqrt{\varepsilon} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.127)$$

Die Amplituden  $E_{0\alpha}^{(l)}$  dürfen nur für solche  $l$ -Werte von null verschieden sein, für welche die Kreisfrequenzen  $l\omega$  zum Bereich mit vernachlässigbarer Dispersion gehören. Zeitliche Periode und Wellenlänge einer solchen Welle sind durch die Beziehungen

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\omega} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} < \lambda_{\text{vak}} \quad (2.128)$$

gegeben.

Die allgemeinste **aperiodische fortschreitende ebene Welle mit Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$**  lautet

<sup>34</sup>Für NaCl trifft dies – wie man aus Abb. 2.11 sieht – für  $\omega \lesssim 10^{11}$  Hertz zu.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1,2} \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} \int_0^{+\infty} d\omega E_{0\alpha}(\omega) \cos[\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_{\alpha}(\omega)], \quad (2.129)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \times \sum_{\alpha=1,2} \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} \int_0^{+\infty} d\omega \sqrt{\varepsilon(\omega)} E_{0\alpha}(\omega) \cos[\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_{\alpha}(\omega)], \quad (2.130)$$

mit  $\mathbf{k}(\omega)$  gemäß Gl. (2.119). Die Amplitudenfunktionen  $E_{0\alpha}(\omega)$  dürfen nur für Kreisfrequenzen  $\omega$  aus Transparenzbereichen der Substanz von null verschieden sein. Sind die Amplitudenfunktionen  $E_{0\alpha}(\omega)$  nur für hinreichend niedrige Kreisfrequenzen  $\omega$  von null verschieden, sodass man die Dispersion vernachlässigen kann, so hat man es mit einem nichtzerfließenden Signal zu tun, welches sich mit der Geschwindigkeit  $v = c/\sqrt{\varepsilon} < c$  ausbreitet und in der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1,2} \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{v} - t), \quad (2.131)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \times \sqrt{\varepsilon} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

geschrieben werden kann. Dabei stellen  $f_1, f_2$  aber *nicht* beliebige Funktionen dar. Die Fouriertransformierten von  $f_1, f_2$  dürfen nur für Frequenzen aus dem Bereich vernachlässigbarer Dispersion von null verschieden sein.

In Abschnitt 2.6 werden wir zeigen, dass die elektromagnetische Energiedichte im Medium bei vernachlässigbarer Dispersion durch

$$u_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8\pi} [\varepsilon \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)] \quad (2.132)$$

gegeben ist. Bei vernachlässigbarer Dispersion gilt daher für eine periodische oder aperiodische ebene Welle wie im Vakuum<sup>35</sup>, dass elektrische und magnetische Energiedichte gleich groß sind.<sup>36</sup>

Bei Vorhandensein von Dispersion haben die Partialwellen verschiedene Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}} = v_{\text{ph}}(\omega) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}, \quad (2.133)$$

laufen also „auseinander“ (werden vom Medium dispergiert), und das aperiodische Signal zerfließt.

Zur Beschreibung von realistischen Ausbreitungsvorgängen muss man Überlagerungen von ebenen Wellen *verschiedener* Ausbreitungsrichtungen  $\mathbf{n}$ , sogenannte **Wellenpakete**, bilden:

<sup>35</sup>Wir haben  $\mu = 1$  gesetzt.

<sup>36</sup>Muss die Dispersion berücksichtigt werden, so sind die energetischen Betrachtungen wesentlich komplizierter (s. Abschnitt 2.6).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \mathbf{E}_{0\alpha}(\mathbf{k}) \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(k)t + \delta_\alpha(\mathbf{k})], \quad (2.134)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \times \sqrt{\varepsilon(\omega(k))} \mathbf{E}_{0\alpha}(\mathbf{k}) \right) \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(k)t + \delta_\alpha(\mathbf{k})], \quad (2.135)$$

mit  $\mathbf{E}_{0\alpha}(\mathbf{k}) \perp \mathbf{k}$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Die Funktion  $\omega(k)$  ist implizit durch

$$k = k(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)} \frac{\omega}{c} \quad \longleftrightarrow \quad \omega = \omega(k) \quad (2.136)$$

definiert. Ferner dürfen die Amplitudenfunktionen  $\mathbf{E}_{0\alpha}(\mathbf{k})$  nur für solche  $\mathbf{k}$ -Vektoren von null verschieden sein, für die  $\omega(k)$  einem Transparenzbereich der Substanz angehört. Bei Vorliegen von Dispersion zerfließt ein solches Wellenpaket nicht nur dadurch, dass es Partialwellen enthält, welche in verschiedene *Richtungen* „laufen“, sondern auch dadurch, dass aufgrund der Frequenzabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit Partialwellen gleicher Ausbreitungsrichtung „auseinander laufen“.

## 2.5 Grenzbedingungen für die makroskopischen Felder

Ist  $\mathcal{F}$  die Grenzfläche zwischen zwei Medien, so ändern sich die Materialeigenschaften beim Durchtritt durch  $\mathcal{F}$  unstetig. Unter der Wirkung eines angelegten elektromagnetischen Feldes kann es als Folge der unterschiedlichen Materialeigenschaften zur Ausbildung einer zunächst noch unbekanntes („induzierten“) *Flächenladungs-* und *Flächenstromverteilung* auf  $\mathcal{F}$  kommen. Auf  $\mathcal{F}$  können außerdem äußere Quellen vorgegeben sein. Wir nehmen im Folgenden an, dass keine äußeren Flächenquellen existieren. (Sind äußere Flächenquellen vorhanden, muss man sie lediglich in den entsprechenden Grenzbedingungen additiv hinzunehmen.) Die Flächenquellen gehen in die *Grenzbedingungen* für die makroskopischen Felder längs  $\mathcal{F}$  ein. Feld- und Materialgleichungen in den beiden Medien gestatten dann zusammen mit den Grenzbedingungen die Bestimmung der Feldstärken  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}$  in den beiden Medien sowie die Berechnung der auf  $\mathcal{F}$  „induzierten“ Flächenquellen.

Wir verwenden folgende Bezeichnungen (s. die Abbildungen 2.15 bis 2.17):

- $\mathbf{n}_{\mathcal{F}}(\mathbf{r})$  Flächennormalvektor (Einheitsvektor) im Flächenpunkt  $\mathbf{r}$   
(Konvention: positive Orientierung vom Medium 2 zum Medium 1)
- $\mathcal{T}_{\mathbf{r}}$  Tangentialebene von  $\mathcal{F}$  im Flächenpunkt  $\mathbf{r}$
- $df$  infinitesimales Flächenstück auf  $\mathcal{F}$  um den Flächenpunkt  $\mathbf{r}$
- $dl$  infinitesimales Kurvenstück auf  $\mathcal{F}$  durch den Flächenpunkt  $\mathbf{r}$
- $\mathbf{n}$  in  $\mathcal{T}_{\mathbf{r}}$  liegender Normalvektor (Einheitsvektor) des auf  $\mathcal{F}$  liegenden Kurvenstückes  $dl$  im Flächenpunkt  $\mathbf{r}$

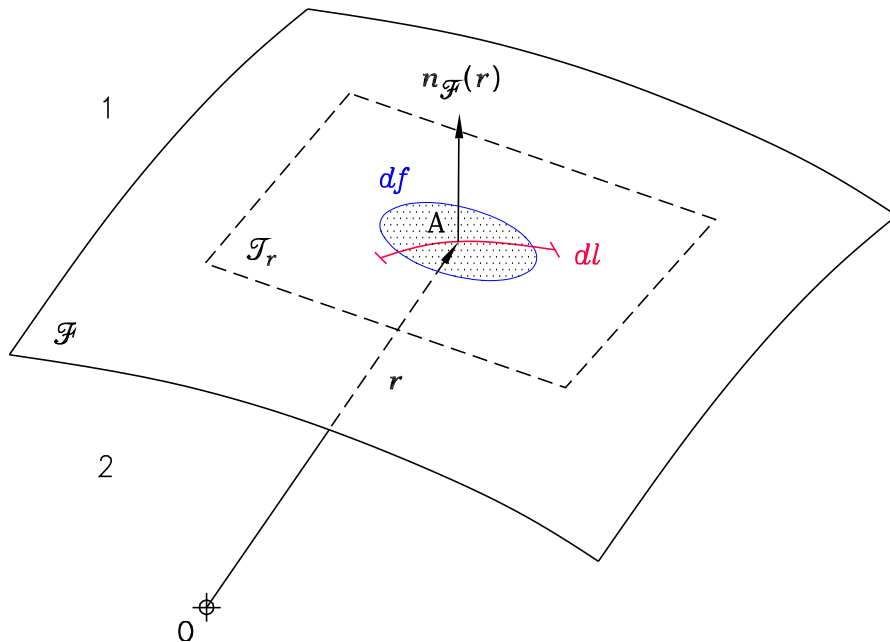


Abbildung 2.15: Grenzfläche zwischen zwei Medien

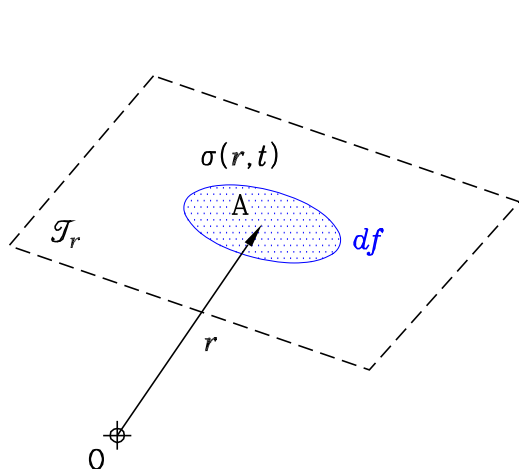


Abbildung 2.16: Zur Definition der Flächenladungsdichte

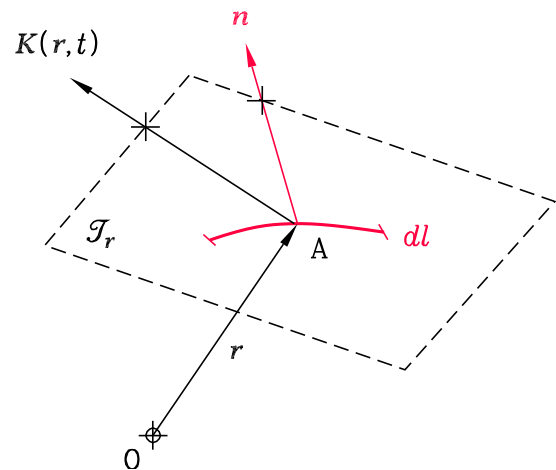


Abbildung 2.17: Zur Definition der Flächenstromdichte

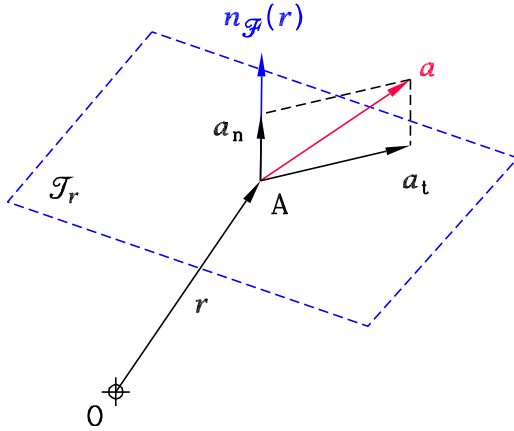


Abbildung 2.18: Normal- und Tangentialkomponente eines Vektorfeldes in einem Punkt  $\mathbf{r}$  der Grenzfläche

Für das Folgende benötigen wir einige Begriffe, die wir nun definieren.

Die *Flächenladungsdichte*  $\sigma$  stellt ein auf der Grenzfläche  $\mathcal{F}$  definiertes Skalarfeld dar<sup>37</sup>, wobei  $\sigma(\mathbf{r}, t) df$  die Gesamtladung auf  $df$  in  $\mathbf{r} \in \mathcal{F}$  zum Zeitpunkt  $t$  bedeutet (siehe Abb. 2.16).

Die *Flächenstromdichte*  $\mathbf{K}$  stellt ein auf der Grenzfläche  $\mathcal{F}$  definiertes Vektorfeld dar, wobei  $\mathbf{K}(\mathbf{r}, t)$  nur Komponenten in  $\mathcal{T}_r$  besitzt<sup>38</sup>, und  $\mathbf{K}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dl$  die Gesamtladung bedeutet, welche das auf  $\mathcal{F}$  liegende, durch den Flächenpunkt  $\mathbf{r}$  hindurchgehende, zum Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  senkrechte Kurvenstück  $dl$  zum Zeitpunkt  $t$  in der Zeiteinheit *netto* durchsetzt (siehe Abb. 2.17).

Wir betrachten nun ein Vektorfeld  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ , welches im gesamten Raum definiert ist. Sind die Komponenten dieses Vektorfeldes beim Durchtritt durch die Grenzfläche  $\mathcal{F}$  stetig, so kann man die vektorielle *Tangential-* und *Normalkomponente* des Vektorfeldes  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  in einem Flächenpunkt  $\mathbf{r}$  durch

$$\mathbf{a}_n(\mathbf{r}, t) := [\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{F}}(\mathbf{r})] \mathbf{n}_{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) = a_n(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}_{\mathcal{F}}(\mathbf{r}), \quad (2.137)$$

$$\mathbf{a}_t(\mathbf{r}, t) := \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{a}_n(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \mathcal{F} \quad (2.138)$$

definieren (s. Abb. 2.18). Sind Komponenten von  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  beim Durchtritt durch die Grenzfläche  $\mathcal{F}$  unstetig oder will man erst untersuchen, ob Stetigkeit oder Unstetigkeit vorliegt, so muss man anmerken, ob man den Wert der Normal- und Tangentialkomponente im Grenzfall des Heranrückens des Aufpunktes an den Punkt  $\mathbf{r}$  der Grenzfläche vom Medium 1 her oder vom Medium 2 her meint. Man schreibt dann  $\mathbf{a}_{1,n}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{a}_{1,t}(\mathbf{r}, t)$  bzw.  $\mathbf{a}_{2,n}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{a}_{2,t}(\mathbf{r}, t)$ .

<sup>37</sup>Die Funktion  $\sigma(\mathbf{r}, t)$  ist also von vornherein nur für Punkte  $\mathbf{r} \in \mathcal{F}$  definiert. (Um die Möglichkeit der Verwechslung mit der ebenfalls mit  $\sigma$  bezeichneten Leitfähigkeit auszuschließen, schreiben wir bei der Flächenladungsdichte immer die Argumente dazu.)

<sup>38</sup>Die Vektorfunktion  $\mathbf{K}(\mathbf{r}, t)$  ist also von vornherein nur für Punkte  $\mathbf{r} \in \mathcal{F}$  definiert und besitzt im Flächenpunkt  $\mathbf{r}$  definitionsgemäß nur Komponenten in der Tangentialebene von  $\mathcal{F}$ .

Für die Zwecke dieses Abschnittes ist es vorteilhaft, die Feldgleichungen in jener Form zu verwenden, bei welcher der „Leitungsstrom“ explizit ausgewiesen, also nicht in  $\partial\mathbf{P}/\partial t$  „hineingesteckt“ ist. Sind im Endlichen keine äußeren Quellen vorhanden, so lauten dann die *Feldgleichungen*<sup>39</sup>:

$$\operatorname{div}\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.139)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.140)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.141)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.142)$$

Diese Feldgleichungen gelten nicht nur im Inneren der Medien 1 und 2, sondern auch auf der Grenzfläche  $\mathcal{F}$ , wofern man eventuell auf  $\mathcal{F}$  vorhandene Flächenladungen und Flächenströme in  $\rho(\mathbf{r}, t)$  bzw. in  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  als längs  $\mathcal{F}$   $\delta$ -förmig singuläre Beiträge berücksichtigt. Wir wählen diese Vorgangsweise, da es dann einfacher ist, die Grenzbedingungen abzuleiten. Hat man die Grenzbedingungen gefunden, so kann man diese  $\delta$ -förmig singulären Terme in  $\rho(\mathbf{r}, t)$  bzw.  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  wieder weglassen. Man löst dann das System der Feld- und Materialgleichungen *im Inneren* des Mediums 1 bzw. des Mediums 2 und verknüpft die erhaltenen Lösungen mithilfe der Grenzbedingungen längs  $\mathcal{F}$ . *Feld- und Materialgleichungen legen zusammen mit den Grenzbedingungen die Gesamtlösung eindeutig fest.* Da wir bei der Ableitung der Grenzbedingungen nicht von Materialgleichungen Gebrauch machen, gelten die Grenzbedingungen für die Grenzflächen beliebiger Medien, d. h. sie sind im konkreten Fall höchstens noch zu spezialisieren; beispielsweise kann ein Leitungsstrom auf  $\mathcal{F}$  nur fließen, wenn eines der Medien ein so genannter *idealer Leiter* ist.<sup>40</sup> Wie man zeigen kann, besitzen die *Grenzbedingungen* für Grenzflächen beliebiger Geometrie die Form

$$D_{1,n}(\mathbf{r}, t) - D_{2,n}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\sigma(\mathbf{r}, t), \quad (2.143)$$

$$B_{1,n}(\mathbf{r}, t) - B_{2,n}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.144)$$

$$\mathbf{n}_{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) \times [\mathbf{E}_{1,t}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}_{2,t}(\mathbf{r}, t)] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{F}, \forall t. \quad (2.145)$$

$$\mathbf{n}_{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) \times [\mathbf{H}_{1,t}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}_{2,t}(\mathbf{r}, t)] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{K}(\mathbf{r}, t), \quad (2.146)$$

<sup>39</sup>Da wir die Grenzbedingungen für den allgemeinsten Fall ableiten wollen, setzen wir vorläufig noch nicht  $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$  und  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ .

<sup>40</sup>Formal wird der ideale Leiter durch die Leitfähigkeit  $\sigma = +\infty$  beschrieben. Gilt für die betrachteten Frequenzen  $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg 1$ , so kann man einen Leiter als idealen Leiter behandeln.

Einen Ausdruck für den Sprung der Tangentialkomponenten selbst erhält man, indem man in den Beziehungen (2.145), (2.146) das äußere Produkt mit dem Flächennormalvektor  $\mathbf{n}_{\mathcal{F}}(\mathbf{r})$  bildet:

$$\mathbf{E}_{1,t}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}_{2,t}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{F}, \forall t. \quad (2.147)$$

$$\mathbf{H}_{1,t}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}_{2,t}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{n}_{\mathcal{F}}(\mathbf{r}), \quad (2.148)$$

Die Grenzbedingungen lassen sich in einer zu den Feldgleichungen (2.139) bis (2.142) formal analogen Form anschreiben, wenn man die (nur für Punkte der Grenzfläche definierten) Größen

$$\text{Div } \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{n}_{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) \cdot [\mathbf{a}_1(\mathbf{r}, t) - \mathbf{a}_2(\mathbf{r}, t)], \quad \mathbf{r} \in \mathcal{F} \quad (2.149)$$

$$\text{Rot } \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{n}_{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) \times [\mathbf{a}_1(\mathbf{r}, t) - \mathbf{a}_2(\mathbf{r}, t)] \quad (2.150)$$

benützt, welche als *Flächendivergenz* bzw. als *Flächenrotor* des Vektorfeldes  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  auf  $\mathcal{F}$  bezeichnet werden.

Für unsere Zwecke sehen wir diese Beziehungen als *Definitionsgleichungen* von  $\text{Div } \mathbf{a}$  und  $\text{Rot } \mathbf{a}$  an. In Wirklichkeit handelt es sich dabei lediglich um *Formeln für die Berechnung* dieser Größen, während die *eigentlichen Definitionen* Grenzübergänge beinhalten, wie dies auch bei  $\text{div } \mathbf{a}$  und  $\text{rot } \mathbf{a}$  der Fall ist. Flächendivergenz und Flächenrotor kommt für flächenhaft verteilte Quell- und Zirkulationsdichten eine physikalisch gleiche Bedeutung zu wie (Volums-)Divergenz und (Volums-)Rotor für räumlich (über Volumsbereiche) verteilte Quellen und Wirbel.

Die Grenzbedingungen für die makroskopischen Feldstärken schreiben sich dann in der Form:

$$\text{Div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \sigma(\mathbf{r}, t), \quad (2.151)$$

$$\text{Div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.152)$$

$$\text{Rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{F}, \forall t. \quad (2.153)$$

$$\text{Rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}(\mathbf{r}, t), \quad (2.154)$$

Die angeschriebenen Grenzbedingungen gelten für *beliebige* Grenzflächen, wir werden sie der Einfachheit halber aber nur für *ebene* Grenzflächen beweisen. Für eine ebene Grenzfläche ist bei Wahl des Koordinatensystems gemäß Abb. 2.19 der Flächennormalvektor in allen Flächenpunkten gleich und durch  $\mathbf{n}_{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}_{\mathcal{F}} = \mathbf{e}_z$  gegeben. Flächenpunkte besitzen Ortsvektoren der Form  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ , und für Normal- und Tangentialkomponente eines Vektorfeldes  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  in einem Flächenpunkt gilt

$$\mathbf{a}_n(x, y, t) = a_z(x, y, 0, t) \mathbf{e}_z = a_n(x, y, t) \mathbf{e}_z, \quad (2.155)$$

$$\mathbf{a}_t(x, y, t) = a_x(x, y, 0, t) \mathbf{e}_x + a_y(x, y, 0, t) \mathbf{e}_y. \quad (2.156)$$

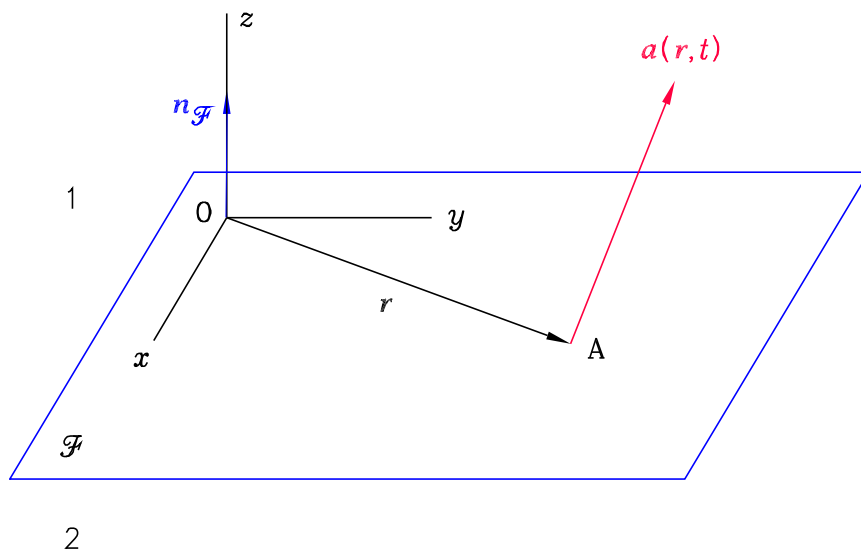


Abbildung 2.19: Wahl des Koordinatensystems für eine ebene Grenzfläche  $\mathcal{F}$

Befinden sich auf dieser Grenzfläche flächenhaft verteilte Ladungen, wobei  $\sigma(x, y, t)$  die entsprechende Flächenladungsdichte ist, so kann man die Flächenladungen in der Volumsladungsdichte  $\rho(\mathbf{r}, t)$  als längs der Grenzfläche  $\delta$ -förmig singulären Beitrag berücksichtigen, indem man

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \underline{\rho_0(\mathbf{r}, t)} + \underline{\sigma(x, y, t) \delta(z)} \quad (2.157)$$

schreibt. Dabei soll  $\rho_0(\mathbf{r}, t)$  eine für  $z = 0$  beschränkte „echte“ Volumsladungsdichte sein.<sup>41</sup> Hier und in der Folge unterstreichen wir für  $z = 0$  beschränkte Terme einfach und für  $z = 0$  singuläre Terme zweifach.

Berechnet man mit dem Ausdruck (2.157) die Gesamtladung für das in Abb. 2.20 gezeichnete Zylindervolumen  $\Delta V = \Delta f \Delta h$ , so erhält man wie erforderlich

$$\begin{aligned} q(\Delta V; t) &= \int_{\Delta V} d^3r \rho(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta V} d^3r \rho_0(\mathbf{r}, t) + \iint_{\Delta f} dx dy \sigma(x, y, t) \int_{-\frac{\Delta h}{2}}^{+\frac{\Delta h}{2}} dz \delta(z) \\ &= \int_{\Delta V} d^3r \rho_0(\mathbf{r}, t) + q(\Delta f; t). \end{aligned}$$

Analog hat man

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t)} + \underline{\mathbf{K}(x, y, t) \delta(z)} \quad (2.158)$$

mit

<sup>41</sup>Normalerweise hat man  $\rho_0(\mathbf{r}, t) = 0$ .



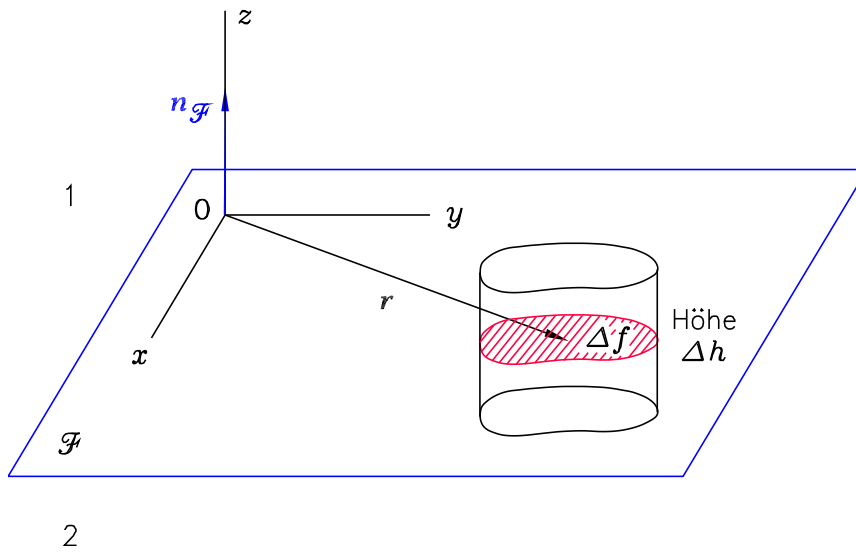


Abbildung 2.20: Zur formalen Beschreibung einer Flächenladungsdichte als Raumladungsdichte

$$\mathbf{K}(x, y, t) = \mathbf{K}_t(x, y, t) = K_x(x, y, t) \mathbf{e}_x + K_y(x, y, t) \mathbf{e}_y. \quad (2.159)$$

Eine „div-Feldgleichung“ mit flächenhaft verteilten Quellen auf der Fläche  $z = 0$  besitzt die mathematische Form

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = f(x, y, z, t) \\ &= \underline{g(x, y, z, t)} + \underline{h(x, y, t) \delta(z)}, \end{aligned} \quad (2.160)$$

wobei  $g(x, y, z, t)$  voraussetzungsgemäß für  $z = 0$  beschränkt ist. Die einfach unterstrichenen Ableitungen auf der „linken“ Gleichungsseite müssen für  $z = 0$  beschränkt sein (Fortschreiten in  $x$ - bzw. in  $y$ -Richtung innerhalb des Mediums 1 oder innerhalb des Mediums 2), es muss daher  $\partial a_z / \partial z$  für  $z = 0$   $\delta$ -förmig singular sein, wofern  $h(x, y, t)$  im Punkt  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$  für den betrachteten Zeitpunkt  $t$  von null verschieden ist. Daraus folgt ein Sprung der  $z$ -Komponente (Normalkomponente) von  $\mathbf{a}$  auf  $\mathcal{F}$ , welcher durch  $h(x, y, t)$  gegeben ist: Integration von Gl. (2.160) über  $z$  von  $-\varepsilon$  bis  $+\varepsilon$  und Durchführung des Grenzüberganges  $\varepsilon \rightarrow 0+$  liefert nämlich

$$\underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} \right)}_0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz \frac{\partial a_z}{\partial z}}_{a_z(x, y, \varepsilon, t) - a_z(x, y, -\varepsilon, t)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz g(x, y, z, t)}_0 + h(x, y, t) \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz \delta(z)}_1,$$

also

$$\text{Div } \mathbf{a} = a_{1,z}(x, y, 0, t) - a_{2,z}(x, y, 0, t) = h(x, y, t), \quad \forall x, y, t. \quad (2.161)$$

Anwendung auf die Elektrodynamik (siehe Gl. (2.151) und Gl. (2.152)):

$\mathbf{a}$	$f$	$g$	$h$
$\mathbf{D}$	$4\pi\rho$	$4\pi\rho_0$	$4\pi\sigma$
$\mathbf{B}$	$0$	$0$	$0$

$$\text{Div } \mathbf{D} = D_{1,z}(x, y, 0, t) - D_{2,z}(x, y, 0, t) = 4\pi\sigma(x, y, t), \quad \forall x, y, t. \quad (2.162)$$

$$\text{Div } \mathbf{B} = B_{1,z}(x, y, 0, t) - B_{2,z}(x, y, 0, t) = 0, \quad (2.163)$$

Damit sind die Grenzbedingungen (2.143), (2.144) für ebene Grenzflächen bewiesen.

Analog: Eine „rot-Feldgleichung“ mit flächenhaft verteilten Wirbeln (Quellen der Zirkulation) auf der Fläche  $z = 0$  besitzt die mathematische Form

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{a} &= \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \\ &= \mathbf{k}(x, y, z, t) = \underline{\mathbf{l}(x, y, z, t)} + \underline{\mathbf{m}(x, y, t) \delta(z)} \\ &= \underline{\mathbf{l}(x, y, z, t)} + \underline{m_x(x, y, t) \delta(z) \mathbf{e}_x} + \underline{m_y(x, y, t) \delta(z) \mathbf{e}_y}, \end{aligned} \quad (2.164)$$

wobei  $\mathbf{l}(x, y, z, t)$  voraussetzungsgemäß für  $z = 0$  beschränkt ist. Integration von (2.164) über  $z$  von  $-\varepsilon$  bis  $+\varepsilon$  und Durchführung des Grenzüberganges  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  liefert

$$-a_{1,y}(x, y, 0, t) + a_{2,y}(x, y, 0, t) = m_x(x, y, t), \quad \forall x, y, t. \quad (2.165)$$

$$a_{1,x}(x, y, 0, t) - a_{2,x}(x, y, 0, t) = m_y(x, y, t), \quad (2.166)$$

Diese Beziehungen kann man in der Form

$$\mathbf{e}_z \times [\mathbf{a}_{1,t}(x, y, t) - \mathbf{a}_{2,t}(x, y, t)] = \mathbf{m}(x, y, t), \quad \forall x, y, t \quad (2.167)$$

zusammenfassen, denn mit (Argumente weggelassen)

$$\mathbf{a}_{1,t} = a_{1,x} \mathbf{e}_x + a_{1,y} \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{a}_{2,t} = a_{2,x} \mathbf{e}_x + a_{2,y} \mathbf{e}_y$$

folgt

$$\mathbf{e}_z \times [\mathbf{a}_{1,t} - \mathbf{a}_{2,t}] = (a_{1,x} - a_{2,x}) \underbrace{(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x)}_{\mathbf{e}_y} + (a_{1,y} - a_{2,y}) \underbrace{(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y)}_{-\mathbf{e}_x} = m_x \mathbf{e}_x + m_y \mathbf{e}_y.$$

Anwendung auf die Elektrodynamik:

$\mathbf{a}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{l}$	$\mathbf{m}$
$\mathbf{E}$	$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{H}$	$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\frac{4\pi}{c} \mathbf{K}$

$$\text{Rot } \mathbf{E} = \mathbf{e}_z \times [\mathbf{E}_{1,t}(x, y, t) - \mathbf{E}_{2,t}(x, y, t)] = \mathbf{0}, \quad (2.168)$$

$$\text{Rot } \mathbf{H} = \mathbf{e}_z \times [\mathbf{H}_{1,t}(x, y, t) - \mathbf{H}_{2,t}(x, y, t)] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}(x, y, t), \quad \forall x, y, t. \quad (2.169)$$

Damit sind auch die Grenzbedingungen (2.145), (2.146) für ebene Grenzflächen bewiesen.

## 2.6 Elektromagnetische Energiedichte und Energiestromdichte im Medium

Im Vakuum gilt  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$  und somit

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}).$$

Um einen Ausdruck für die Energiestromdichte im Medium zu erhalten, betrachten wir eine Grenzfläche  $\mathcal{F}$  zwischen Vakuum und Medium (s. Abb. 2.21). Fließt auf der Oberfläche des Mediums kein Flächenstrom ( $\mathbf{K} \equiv \mathbf{0}$ )<sup>42</sup>, so wird in der Grenzfläche keine Energie dissipiert (entsteht in der Grenzfläche keine joulesche Wärme), und es muss aus Gründen der Energieerhaltung die Normalkomponente von  $\mathbf{S}$  auf  $\mathcal{F}$  stetig sein. Wegen

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \underbrace{(\mathbf{a}_n \times \mathbf{b}_n)}_{\mathbf{0}} + \underbrace{(\mathbf{a}_n \times \mathbf{b}_t)}_{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_t} + \underbrace{(\mathbf{a}_t \times \mathbf{b}_n)}_{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_n} + \underbrace{(\mathbf{a}_t \times \mathbf{b}_t)}_{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_n}$$

gilt nun einerseits (Index 1 Vakuum)

$$\mathbf{S}_{1,n}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_{1,t}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_{1,t}(\mathbf{r}, t)], \quad \mathbf{r} \in \mathcal{F} \quad (2.170)$$

und andererseits muss aufgrund der Grenzbedingungen (2.147), (2.148) (Index 2 Medium)

$$\mathbf{E}_{1,t}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{2,t}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{H}_{1,t}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_{2,t}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \mathcal{F}, \quad \forall t \quad (2.171)$$

gelten. Daraus folgt für die *Normalkomponente* der elektromagnetischen Energiestromdichte auf der dem Medium „zugewendeten Seite“ der Grenzfläche  $\mathcal{F}$

$$\mathbf{S}_{2,n}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_{2,t}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_{2,t}(\mathbf{r}, t)], \quad \mathbf{r} \in \mathcal{F}. \quad (2.172)$$

<sup>42</sup>Dies ist sicher der Fall, falls das Medium kein idealer Leiter ist.

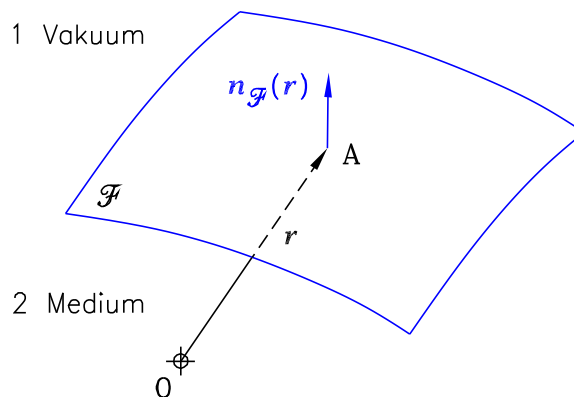


Abbildung 2.21: Grenzfläche Vakuum–Medium

Was die *Tangentialkomponente* der Energiestromdichte auf der dem Medium „zugewendeten Seite“ der Grenzfläche  $\mathcal{F}$  und die gesuchte Energiestromdichte im Medium betrifft, so kann man aus der Energieerhaltung für die Grenzfläche zwar nichts *schließen*, es liegt aber nahe, für die **elektromagnetische Energiestromdichte im Medium**

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] \quad (2.173)$$

anzunehmen. Es folgt dann nämlich einerseits Gl. (2.172), und darüber hinaus geht der Ausdruck für  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$  wieder in den Ausdruck für das Vakuum über. Wie man zeigen kann<sup>43</sup> gibt Gl. (2.173) tatsächlich den richtigen Ausdruck für die Energiestromdichte im Medium, und zwar auch für ideale Leiter mit  $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$ . Im letzteren Fall kommt es zwar in der Grenzfläche zur Dissipation von Energie, sodass  $\mathbf{S}_n = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t)$  auf  $\mathcal{F}$  einen endlichen Sprung besitzen muss, doch wird der erforderliche Sprung von  $\mathbf{S}_n$  gerade durch den Sprung von  $\mathbf{H}_t$  „geliefert“, welcher sich aus der Grenzbedingung (2.148) ergibt.

Mit dem Ausdruck (2.173) für die elektromagnetische Energiestromdichte im Medium erhalten wir für die in der Zeiteinheit aus einem festen Volumsbereich  $\mathcal{V}$  ausströmende elektromagnetische Feldenergie

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S} &= \int_{\mathcal{V}} d^3r \operatorname{div} \mathbf{S} = \int_{\mathcal{V}} d^3r \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\ &= \int_{\mathcal{V}} d^3r \frac{c}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (2.174)$$

<sup>43</sup>Siehe dazu § 29 und § 61 von Landau, L. D., und E. M. Lifschitz: Elektrodynamik der Kontinua. Bd. VIII des Lehrbuches der Theoretischen Physik. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 1990.

Einsetzen der Feldgleichungen (2.141), (2.142) liefert

$$\oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S} = - \int_{\mathcal{V}} d^3r \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \int_{\mathcal{V}} d^3r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.175)$$

Dies stellt zweifellos eine *Energiebilanz* dar. Von den Termen auf der „rechten“ Gleichungsseite lässt sich allerdings für allgemeine Materie (d. h. ohne spezielle Annahmen über die Form der Materialgleichungen) nur der letzte unmittelbar physikalisch interpretieren: Er beschreibt die im Volumsbereich  $\mathcal{V}$  zum betreffenden Zeitpunkt in der Zeiteinheit im Zusammenhang mit der elektrischen Stromleitung auftretende *joulesche Wärme*, und die Größe  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  wird entsprechend als joulesche Wärmeleistungsdichte bezeichnet. Der „Rest“ kann noch weitere Dissipationsterme und mehrere Arten von Energiedichten und Energiestromdichten enthalten. In Materie gibt es eine Anzahl dissipativer Prozesse, bei denen Wärme entsteht. Neben der jouleschen Wärme, die wir schon „abgesondert“ haben, können noch Umpolarisierungs- und Ummagnetisierungsverluste auftreten. In inhomogener Materie kommt es dadurch zur Wärmeleitung sowie zu Spannungen und Deformationen. Ferner gibt es in inhomogener Materie noch durch das elektromagnetische Feld unmittelbar bedingte mechanische Spannungen und Deformationen (Elektro- und Magnetostriktion). Es gibt also i. Allg. durch  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  auch einen Wärmestrom und einen Materiestrom. Alle diese Beiträge sind in

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (2.176)$$

„versteckt“. Um sie zu identifizieren, muss man vom Energieerhaltungssatz der *mikroskopischen Elektrodynamik* ausgehen und daraus durch geeignete Mittelungsprozesse einen makroskopischen Energieerhaltungssatz ableiten.<sup>44</sup> Eine willkürfreie Trennung in „Feldanteile“ und „Materieanteile“ ist dabei nicht möglich, da die makroskopischen Feldstärken zumindest indirekt überall eingehen. Eine makroskopische elektromagnetische Feldenergiedichte lässt sich als thermodynamisch sinnvolle Größe überhaupt nicht allgemein definieren.<sup>45</sup>

Einfache Verhältnisse, für die man den Ausdruck (2.176) unmittelbar physikalisch interpretieren kann, liegen vor, wenn die *Materialgleichungen*

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.177)$$

<sup>44</sup>Da die mikroskopischen Ausdrücke für die elektromagnetische Energiedichte und Energiestromdichte in den mikroskopischen Feldstärken nicht linear sind, lässt sich die Mittelung nicht so einfach durchführen wie bei der Ableitung der makroskopischen Feldgleichungen in den Abschnitten 2.1, 2.2. Siehe dazu De Groot, S. R.: the maxwell equations (non-relativistic and relativistic derivations from electron theory). North Holland, Amsterdam 1969.

<sup>45</sup>Siehe § 61 von Landau, L. D., und E. M. Lifschitz: Elektrodynamik der Kontinua. Bd. VIII des Lehrbuches der Theoretischen Physik. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 1990.

gelten, und wenn das Medium auf *konstanter Temperatur* gehalten wird (Abfuhr der jouleschen Wärme).<sup>46</sup> Man hat dann

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2),$$

und die Beziehung (2.175) lässt sich Term für Term physikalisch interpretieren.

### Energieerhaltungssatz

Unter der Voraussetzung, dass die Materialgleichungen (2.177) gelten, und das Medium auf konstanter Temperatur gehalten wird, besteht für ein festes Materievolumen  $\mathcal{V}$  die folgende Energiebilanz: Die im Volumsbereich  $\mathcal{V}$  vorhandene elektromagnetische Feldenergie nimmt in der Zeiteinheit um *den* Energiebetrag ab, der netto in der Zeiteinheit in Form von elektromagnetischer Feldenergie durch die Oberfläche  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  ausströmt bzw. in der Zeiteinheit in Form von joulescher Wärme im Volumsbereich  $\mathcal{V}$  dissipiert wird.

Mathematisch angeschrieben:

$$-\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d^3r u_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t) = \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) + \int_{\mathcal{V}} d^3r q(\mathbf{r}, t). \quad (2.178)$$

Dabei ist

$$u_{\text{elm}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8\pi} [\varepsilon \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \mu \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t)] \quad (2.179)$$

die *elektromagnetische Energiedichte* im Medium,

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] \quad (2.180)$$

die *elektromagnetische Energiestromdichte* im Medium und

$$q(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{j}^2(\mathbf{r}, t)}{\sigma} = \sigma \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \quad (2.181)$$

die *joulesche Wärmeleistungsdichte*.

<sup>46</sup>Beachte, dass  $\varepsilon$ ,  $\mu$  und  $\sigma$  temperaturabhängig sind. Änderung der Temperatur würde eine Änderung dieser Materialgrößen mit der Zeit bedeuten.

## 2.7 Reflexion und Brechung bzw. Totalreflexion an einer ebenen Grenzfläche

Wir betrachten eine ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien. Für beide Medien sei für die auftretenden Feldstärken die lineare Materialgleichung (2.85) anwendbar, ferner soll man für beide Medien  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  bzw.  $\mu = 1$  setzen können. Im Medium 1 befinde sich „im Unendlichen“ eine „Lichtquelle“ (Strahlungsquelle), von der eine vorgegebene monochromatische ebene Welle auf die Grenzfläche ein falle. Beide Medien seien für die betreffende Frequenz *transparent*.

Die *einfallende ebene Welle* besitzt dann (in komplexer Schreibweise) die Form

$$\mathbf{E}_c^{(e)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a} \exp[i(\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (2.182)$$

$$\mathbf{D}_c^{(e)}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_1(\omega) \mathbf{E}_c^{(e)}(\mathbf{r}, t), \quad (2.183)$$

$$\mathbf{B}_c^{(e)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \times \sqrt{\epsilon_1(\omega)} \mathbf{E}_c^{(e)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_c^{(e)}(\mathbf{r}, t), \quad (2.184)$$

$$\mathbf{k}(\omega) = \sqrt{\epsilon_1(\omega)} \frac{\omega}{c} \mathbf{n}, \quad (2.185)$$

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=1,2} \boldsymbol{\epsilon}_\alpha a_\alpha = \sum_{\alpha=1,2} \boldsymbol{\epsilon}_\alpha E_{0\alpha} e^{i\delta_\alpha}. \quad (2.186)$$

Dabei ist  $\epsilon_1(\omega) = \text{Re } \epsilon_1(\omega)$  der Wert der Dielektrizitätsfunktion des Mediums 1 für die betreffende Frequenz, und  $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \mathbf{n}$  ist ein orthonormiertes Dreibein (Rechtssystem).

Die Größen  $\omega, \mathbf{n}$  und  $\mathbf{a}$  werden als *vorgegeben* angesehen. (Sie sind durch die „Lichtquelle“ bestimmt.) Es müssen in beiden Medien die Feld- und Materialgleichungen und auf der Grenzfläche die Grenzbedingungen (2.143) bis (2.146) (mit  $\sigma(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{K}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$ ) erfüllt werden. Wir machen für die makroskopischen Felder in den beiden Medien einen *Ansatz*, mit dem Ziel, alle diese Bedingungen zu erfüllen.

Da die Fouriertransformation eine lineare Transformation ist, und da Feldgleichungen, Materialgleichungen und Grenzbedingungen in den Feldstärken linear sind, müssen die Gesamtfelder in beiden Medien zeitlich harmonisch mit der Kreisfrequenz  $\omega$  der einfallenden Welle sein: Es muss *Gleichheit der Frequenzen* aller Teilwellen in beiden Medien bestehen. Da wir es im Folgenden stets nur mit dieser einen *festen Kreisfrequenz*  $\omega$  zu tun haben, schreiben wir zur Vereinfachung der Formeln statt  $\epsilon_1(\omega), \epsilon_2(\omega)$  einfach  $\epsilon_1, \epsilon_2$ . Mit  $\epsilon_1, \epsilon_2$  sind also in der Folge *nicht* die statischen Dielektrizitätskonstanten der Medien gemeint, sondern die Werte der Dielektrizitätsfunktionen für die Kreisfrequenz  $\omega$ , welche sich von den statischen Werten erheblich unterscheiden können. (Siehe z. B. die Abbildung 2.11 auf Seite 136.)

Ansatz für das Medium 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{c1}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_c^{(e)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_c^{(r)}(\mathbf{r}, t) \\ &= \mathbf{a} \exp\left[i\left(\sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \omega t\right)\right] + \mathbf{a}' \exp\left[i\left(\sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r} - \omega t\right)\right], \end{aligned} \quad (2.187)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{c1}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_1 \mathbf{E}_{c1}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_1 \mathbf{E}_c^{(e)}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_1 \mathbf{E}_c^{(r)}(\mathbf{r}, t) \\ &= \mathbf{D}_c^{(e)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{D}_c^{(r)}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (2.188)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{c1}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{n} \times \sqrt{\varepsilon_1} \mathbf{E}_c^{(e)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{n}' \times \sqrt{\varepsilon_1} \mathbf{E}_c^{(r)}(\mathbf{r}, t) \\ &= \mathbf{B}_c^{(e)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}_c^{(r)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_{c1}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.189)$$

Die Größen  $\omega$ ,  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{a}$  sind *vorgegeben*, die Beziehung  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$  ist aufgrund von Gl. (2.186) erfüllt. Die Größen  $\mathbf{n}'$ ,  $\mathbf{a}'$  sind komplexe Vektoren, welche die Bedingungen

$$\mathbf{n}'^2 = 1, \quad \mathbf{a}' \cdot \mathbf{n}' = 0 \quad (2.190)$$

erfüllen müssen, darüber hinaus aber noch unbestimmt sind (freie Parameter des Ansatzes).

Ansatz für das Medium 2:

$$\mathbf{E}_{c2}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}'' \exp\left[i\left(\sqrt{\varepsilon_2} \frac{\omega}{c} \mathbf{n}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t\right)\right], \quad (2.191)$$

$$\mathbf{D}_{c2}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_2 \mathbf{E}_{c2}(\mathbf{r}, t), \quad (2.192)$$

$$\mathbf{B}_{c2}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n}'' \times \sqrt{\varepsilon_2} \mathbf{E}_{c2}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_{c2}(\mathbf{r}, t). \quad (2.193)$$

Die Größen  $\mathbf{n}''$ ,  $\mathbf{a}''$  sind komplexe Vektoren, welche die Bedingungen

$$\mathbf{n}''^2 = 1, \quad \mathbf{a}'' \cdot \mathbf{n}'' = 0 \quad (2.194)$$

erfüllen müssen, darüber hinaus aber ebenfalls noch unbestimmt sind.

Von den Vektoren  $\mathbf{n}'$  und  $\mathbf{n}''$  wird zunächst noch nicht angenommen, dass sie *reelle* Komponenten besitzen müssen, von den entsprechenden Teilwellen wird also nicht von *vornherein* angenommen, dass es sich um ebene Wellen handeln muss. Es wird sich zeigen, dass die reflektierte Welle stets eine gewöhnliche *ebene Welle* ist ( $\mathbf{n}'$  reeller Einheitsvektor, welcher die Ausbreitungsrichtung angibt), während die Welle im Medium 2 auch eine *inhomogene Welle* sein kann ( $\mathbf{n}''$  komplexer Einheitsvektor). Letzterer Fall liegt bei *Totalreflexion* vor, während im Falle der *Lichtbrechung* auch die Welle im Medium 2 eine gewöhnliche *ebene Welle* ist ( $\mathbf{n}''$  reeller Einheitsvektor, welcher die Ausbreitungsrichtung angibt). Wir werden uns mit diesen beiden Fällen ausführlich befassen.



Aus den Untersuchungen von Abschnitt 2.4 wissen wir:  $\mathbf{E}_c^{(e)}, \mathbf{D}_c^{(e)}, \mathbf{B}_c^{(e)}$  erfüllen die Feld- und Materialgleichungen im Medium 1, dasselbe gilt für  $\mathbf{E}_c^{(r)}, \mathbf{D}_c^{(r)}, \mathbf{B}_c^{(r)}$ , wofern nur die Größen  $\mathbf{n}', \mathbf{a}'$  die Nebenbedingungen (2.190) erfüllen. Wegen der Linearität der Feld- und Materialgleichungen erfüllt damit auch  $\mathbf{E}_{c1}, \mathbf{D}_{c1}, \mathbf{B}_{c1}$  die Feld- und Materialgleichungen im Medium 1. Ebenso erfüllen  $\mathbf{E}_{c2}, \mathbf{D}_{c2}, \mathbf{B}_{c2}$  die Feld- und Materialgleichungen im Medium 2, wofern nur  $\mathbf{n}'', \mathbf{a}''$  die Nebenbedingungen (2.194) erfüllen.

Zu zeigen bleibt, dass der Ansatz auch die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen in der Grenzfläche gestattet, d. h. dass sich bei Einsetzen in die Stetigkeitsbedingungen erstens *kein Widerspruch* ergibt und zweitens Beziehungen resultieren, welche die *eindeutige Bestimmung* von  $\mathbf{n}', \mathbf{a}', \mathbf{n}'', \mathbf{a}''$  bei vorgegebenem  $\omega, \mathbf{n}, \mathbf{a}$  gestatten.

### 2.7.1 Reflexions- und Brechungsgesetz

Wir wählen das Koordinatensystem so (s. Abb. 2.22), dass die  $xy$ -Ebene mit der Grenzfläche  $\mathcal{F}$  zusammenfällt,  $\mathbf{n}_{\mathcal{F}} = \mathbf{e}_z$  gilt, und die  $zx$ -Ebene mit der Einfallsebene (Ebene von  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{n}_{\mathcal{F}}$ ) zusammenfällt. Die  $x$ -Achse wird so orientiert, dass  $n_x > 0$  gilt. Der *Einfallswinkel*  $\alpha$  ist dann gemäß  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$  eingeschränkt. Drückt man den Ausbreitungsvektor der einfallenden Welle durch den Einfallswinkel aus, so hat man

$$\mathbf{n} = (\sin \alpha, 0, -\cos \alpha). \quad (2.195)$$

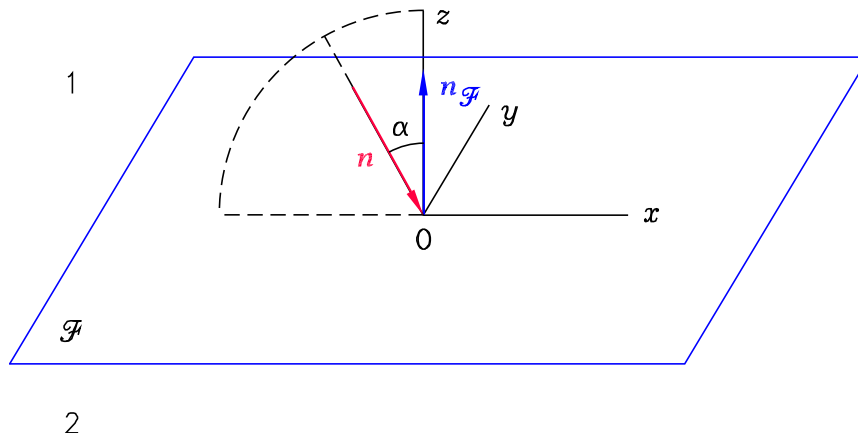


Abbildung 2.22: Wahl des Koordinatensystems

Die Stetigkeitsbedingungen lauten dann:

$$\begin{aligned} D_{c1,z} &= D_{c2,z}, & B_{c1,z} &= B_{c2,z}, \\ E_{c1,x} &= E_{c2,x}, & B_{c1,x} &= B_{c2,x}, & \forall x, y, t; z = 0. \\ E_{c1,y} &= E_{c2,y}, & B_{c1,y} &= B_{c2,y}, \end{aligned} \quad (2.196)$$

Wegen des gemeinsamen Faktors  $e^{-i\omega t}$  in allen Feldkomponenten sind die Stetigkeitsbedingungen (2.196) für alle Zeiten erfüllt, falls sie für  $t = 0$  erfüllt sind, d. h. falls gilt:

$$\begin{aligned} D_{c1,z} &= D_{c2,z}, & B_{c1,z} &= B_{c2,z}, \\ E_{c1,x} &= E_{c2,x}, & B_{c1,x} &= B_{c2,x}, & \forall x, y; z = 0, t = 0. \\ E_{c1,y} &= E_{c2,y}, & B_{c1,y} &= B_{c2,y}, \end{aligned} \quad (2.197)$$

Jede dieser sechs Bedingungen hat mathematisch die Form

$$\begin{aligned} A \exp\left[i\sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} n_x x\right] + B \exp\left[i\sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} (n'_x x + n'_y y)\right] \\ = C \exp\left[i\sqrt{\varepsilon_2} \frac{\omega}{c} (n''_x x + n''_y y)\right], \end{aligned} \quad \forall x, y \quad (2.198)$$

mit  $A, B, C \in \mathbb{C}$ . *Notwendig* (nicht hinreichend) für die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen (2.197) ist daher

$$\begin{aligned} i) \quad n'_y = n''_y = \underbrace{0}_{n_y}, \quad ii) \quad n'_x = n_x, \quad iii) \quad n''_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} n_x. \end{aligned} \quad (2.199)$$

Mit den Bedingungen *i*) und *ii*) folgt aus  $\mathbf{n}^2 = 1$ ,  $\mathbf{n}'^2 = 1$  (siehe Gl. (2.190))

$$1 = n_x^2 + \underbrace{n_y^2}_0 + n_z^2 = \underbrace{n_x'^2}_{n_x^2} + \underbrace{n_y'^2}_0 + n_z'^2 \Rightarrow n_z' = (\pm) n_z \text{ (reell).}$$

Aus physikalischen Gründen ist das untere Vorzeichen zu wählen, und somit folgt, dass

$$\mathbf{n}' = (n'_x, n'_y, n'_z) = (n_x, 0, -n_z) \quad (2.200)$$

gelten muss.

Dies ist das Reflexionsgesetz. Die reflektierte Welle ist eine gewöhnliche ebene Welle mit der Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}' = (n_x, 0, -n_z)$ . Führt man gemäß Abb. 2.23 neben dem Einfallswinkel  $\alpha$  den *Reflexionswinkel*  $\alpha'$  ein, so kann man das Reflexionsgesetz (2.200) folgendermaßen ausdrücken:

<b>Reflexionsgesetz</b>
<p>Die reflektierte Welle ist eine ebene Welle. Ihre Ausbreitungsrichtung <math>\mathbf{n}'</math> liegt in der Einfallsebene (Ebene von <math>\mathbf{n}</math> und <math>\mathbf{n}_\mathcal{F}</math>), der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel:</p> $\alpha' = \alpha. \quad (2.201)$

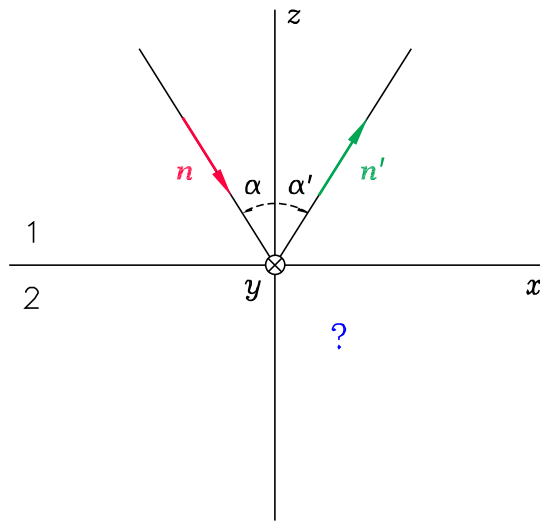


Abbildung 2.23: Zum Reflexionsgesetz ( $\alpha'$  Reflexionswinkel)

Bisher haben wir nur *notwendige* Bedingungen für die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen ausgewertet. Die daraus folgenden Aussagen haben insofern vorläufigen Charakter, als noch zu zeigen bleibt, dass durch den Ansatz ein *hinreichender* Satz von Bedingungen widerspruchsfrei erfüllt werden kann. Es wird sich zeigen, dass dies zutrifft.

Für die weitere Rechnung empfiehlt es sich, für  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}'$  die Ausdrücke

$$\mathbf{n} = (\sin \alpha, 0, -\cos \alpha), \quad (2.202)$$

$$\mathbf{n}' = (\sin \alpha', 0, \cos \alpha') = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \quad (2.203)$$

zu verwenden.

Nun zum Vektor  $\mathbf{n}'' = (n''_x, n''_y, n''_z)$ . Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

**Fall (a):**  $\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} n_x = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \alpha \leq 1$

Dieser Fall liegt vor, wenn entweder  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  gilt oder wenn  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  gilt<sup>47</sup>, der Einfallswinkel  $\alpha$  aber nicht größer als der so genannte *Grenzwinkel der Totalreflexion*<sup>48</sup>

$$\alpha_T := \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (2.204)$$

ist. Man hat dann nämlich

<sup>47</sup>Wir nehmen an, dass  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$  ist, da der Fall  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  trivial ist. Es gilt in diesem Fall nämlich im *ganzen* Raum  $\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_c^{(e)}$ ,  $\mathbf{D}_c = \mathbf{D}_c^{(e)}$ ,  $\mathbf{B}_c = \mathbf{B}_c^{(e)}$ , als wäre nur *ein* Medium vorhanden.

<sup>48</sup>Warum dieser Winkel so genannt wird, wird später klar werden.

$$\varepsilon_2 > \varepsilon_1: \quad \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} n_x}_{< 1} < 1;$$

$$\varepsilon_2 < \varepsilon_1, \alpha \leq \alpha_T: \quad \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} n_x}_{> 1} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \alpha_T = 1.$$

Wegen  $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} n_x \leq 1$  folgt dann aus iii)  $n_x'' \leq 1$  und aus i) und Gl. (2.194)

$$1 = \underbrace{n_x''^2}_{\leq 1} + \underbrace{n_y''^2}_0 + \underbrace{n_z''^2}_{\geq 0} \Rightarrow n_z'' \text{ reell,}$$

$$n_z'' = (\pm) \sqrt{1 - n_x''^2} = (\pm) \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_x^2}.$$

$\mathbf{n}''$  ist also im Fall (a) ein *reeller Einheitsvektor*, die Welle im Medium 2 ist eine *ebene Welle* mit der *Ausbreitungsrichtung*  $\mathbf{n}''$ . Aus physikalischen Gründen ist in der Beziehung für  $n_z''$  das negative Vorzeichen zu wählen. Die Beziehung

Fall (a):  $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} n_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \alpha \leq 1:$

$$\mathbf{n}'' = (n_x'', n_y'', n_z'') = \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} n_x, 0, -\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_x^2} \right) \quad (2.205)$$

wird als *Brechungsgesetz* (im engeren Sinne) bezeichnet. Führt man gemäß Abb. 2.24 bzw. Abb. 2.25 den *Brechungswinkel*  $\alpha''$  ein, so folgt

$$\mathbf{n}'' = (\sin \alpha'', 0, -\cos \alpha''), \quad (2.206)$$

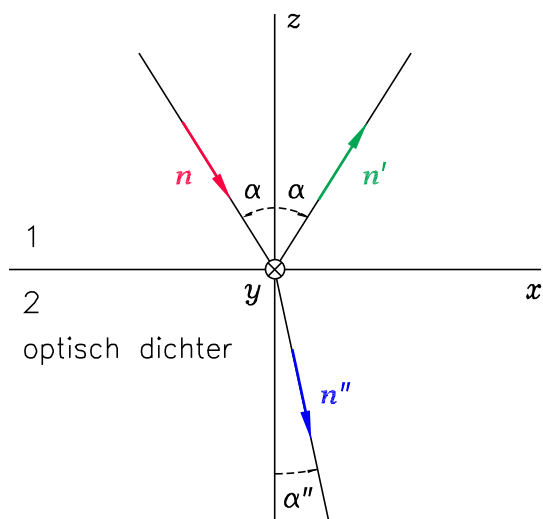


Abbildung 2.24: Brechung zum Lot

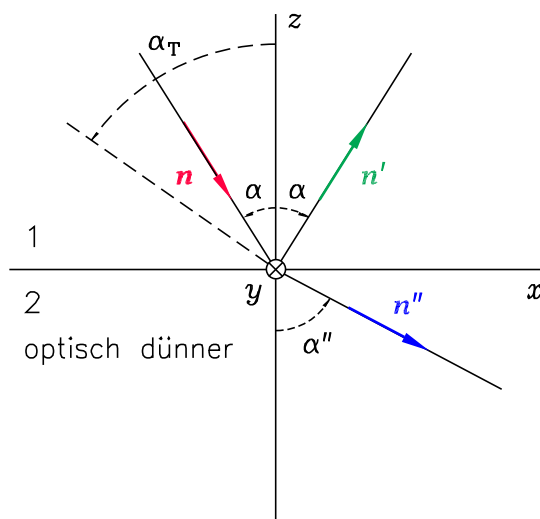


Abbildung 2.25: Brechung vom Lot

wobei für Sinus und Kosinus des Brechungswinkels die Beziehungen

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} =: n_{12}, \quad (2.207)$$

$$\cos \alpha'' = +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha''} \quad (2.208)$$

gelten. Die Größe  $n_{12} = n_{12}(\omega)$  heißt *Brechungsindex* für den Übergang  $1 \rightarrow 2$ . Für den Übergang Vakuum  $\rightarrow$  Medium gilt

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''} = \sqrt{\varepsilon(\omega)} =: n(\omega), \quad (2.209)$$

wobei  $n(\omega)$  als Brechungsindex des betreffenden Mediums bezeichnet wird. Es gilt

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (2.210)$$

Ist  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ , also  $n_{12} < 1$ , so sagt man das Medium 2 sei *optisch dünner* als das Medium 1 bzw. das Medium 1 sei *optisch dichter* als das Medium 2.

In Worten können wir das Brechungsgesetz folgendermaßen ausdrücken:

**Brechungsgesetz**

Ist das Medium 2 optisch dichter [optisch dünner und der Einfallswinkel  $\alpha$  nicht größer als der Grenzwinkel  $\alpha_T$  von Gl. (2.204)], so tritt *Lichtbrechung* ein. Die Welle im Medium 2 ist dann eine gewöhnliche ebene Welle und wird als *gebrochene Welle* bezeichnet. Ihre Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}''$  liegt in der Einfallsebene (Ebene von  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{n}_{\mathcal{F}}$ ), die Brechung erfolgt „zum Lot“ (s. Abb. 2.24) [„vom Lot“ (s. Abb. 2.25)], d. h. der Brechungswinkel  $\alpha''$  ist kleiner [größer] als der Einfallswinkel  $\alpha$ . Dabei ist  $\alpha''$  durch Gl. (2.207) gegeben.

**Fall (b):**  $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} n_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \alpha > 1$

Dieser Fall liegt vor, wenn das Medium 2 optisch dünner ist als das Medium 1, d. h. wenn  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$  bzw.  $n_{12} < 1$  gilt, und der Einfallswinkel  $\alpha$  größer ist als der Grenzwinkel  $\alpha_T$  von Gl. (2.204):

$$\varepsilon_2 < \varepsilon_1, \alpha > \alpha_T: \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \alpha > \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \alpha_T = 1.$$

Wegen  $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} n_x > 1$  folgt dann aus *iii)*  $n_x'' > 1$  und aus *i)* und Gl. (2.194)

$$1 = \underbrace{n_x''^2}_{> 1} + \underbrace{n_y''^2}_0 + \underbrace{n_z''^2}_{< 0} \quad \Rightarrow \quad n_z'' \text{ imaginär,}$$

$$n_z'' = (\pm) i \sqrt{n_x''^2 - 1} = (\pm) i \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_x^2 - 1}.$$

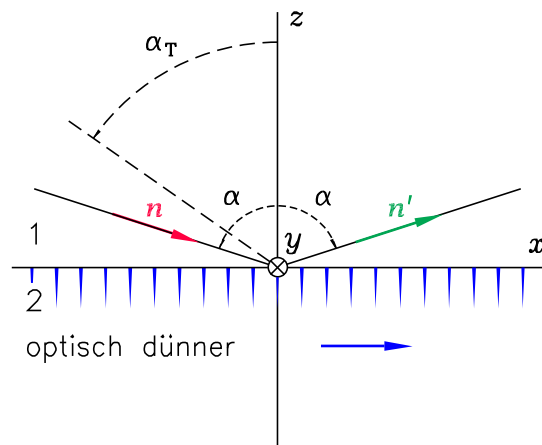


Abbildung 2.26: „Lichthaut“ im Medium 2 bei Totalreflexion

$\mathbf{n}''$  ist also im Fall (b) ein *komplexer Einheitsvektor*, und die Welle im Medium 2 ist eine *inhomogene Welle* („Lichthaut“; s. Seite 180). Die Vorzeichenwahl im Ausdruck für  $n''_z$  ergibt sich aus der physikalischen Interpretation von  $\mathbf{E}_{c2}(\mathbf{r}, t)$ . Nach Gl. (2.191) gilt

$$\mathbf{E}_{c2}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}'' \exp\left[i\left(\sqrt{\varepsilon_2} \frac{\omega}{c} \mathbf{n}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t\right)\right], \quad z < 0.$$

Mit

$$\mathbf{n}'' \cdot \mathbf{r} = n''_x x + n''_z z = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} n_x x \ (\pm) \ i \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_x^2 - 1} z \quad \text{und} \quad z = -|z|$$

folgt daraus

$$\mathbf{E}_{c2}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}'' \exp\left[(\pm) \sqrt{\varepsilon_1 n_x^2 - \varepsilon_2} \frac{\omega}{c} |z|\right] \exp\left[i\left(\sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} n_x x - \omega t\right)\right].$$

Das obere Vorzeichen ist also aus physikalischen Gründen auszuschließen.

#### Totalreflexion

Ist das Medium 2 optisch dünner und der Einfallswinkel  $\alpha$  größer als der Grenzwinkel  $\alpha_T$  von Gl. (2.204), so tritt *Totalreflexion* ein.<sup>a</sup> Die Welle im Medium 2 ist dann eine in  $x$ -Richtung fortschreitende, mit wachsendem  $|z|$  exponentiell abklingende *inhomogene Welle* („Lichthaut“; siehe Abb. 2.26).

<sup>a</sup>Wir werden später sehen (s. Abschnitt 2.7.2), dass im Zeitmittel keine Energie ins Medium 2 einströmt.

Die Beziehung

$$\text{Fall (b): } \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} n_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \alpha > 1:$$

$$\mathbf{n}'' = (n''_x, n''_y, n''_z) = \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} n_x, 0, -i \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} n_x^2 - 1} \right) \quad (2.211)$$

wird im weiteren Sinne ebenfalls als „Brechungsgesetz“ bezeichnet. Der Grund ist folgender: Da die Winkelfunktionen analytische Funktionen im Komplexen sind (z. B. gilt  $\sin^2 \xi + \cos^2 \xi = 1$  auch für  $\xi \in \mathbb{C}$ ), kann man die Beziehungen (2.206), (2.207) für die Durchführung aller Rechnungen formal auch im Fall (b) anwenden, in welchem  $n''_z$  imaginär ist. Man rechnet dann mit *komplexem*  $\alpha''$ . Wegen  $\sin^2 \alpha'' + \cos^2 \alpha'' = 1$  ist dann in (2.206) die Nebenbedingung  $\mathbf{n}''^2 = 1$  auch im Fall (b) „fix eingebaut“. Indem man die Komponenten von  $\mathbf{a}''$  ebenfalls durch  $\sin \alpha''$ ,  $\cos \alpha''$  ausdrückt (siehe Abschnitt 2.7.2, Gl. (2.224)), kann man auch die Nebenbedingung  $\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{n}'' = 0$  „fix einbauen“ usf. Solange man für  $\cos \alpha''$  nicht einsetzt, muss man sich dann überhaupt nicht um die Fallunterscheidung (a)  $\leftrightarrow$  (b) kümmern. Erst wenn man für  $\cos \alpha''$  einsetzt, muss man die Fallunterscheidung durchführen. Während im Fall (a) Gl. (2.208) zu verwenden ist, ist im Fall (b)

$$\cos \alpha'' = +i \sqrt{\sin^2 \alpha'' - 1} \quad (2.212)$$

einzusetzen.

#### Zusammenfassung zu den notwendigen Bedingungen

Die notwendigen Bedingungen (2.199) für die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen (2.197) sind genau dann erfüllt, wenn

$$\mathbf{n}' = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha), \quad \mathbf{n}'' = (\sin \alpha'', 0, -\cos \alpha'')$$

mit

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

und

$$\cos \alpha'' = +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha''} \quad \text{im Fall (a): } \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \alpha \leq 1$$

bzw.

$$\cos \alpha'' = +i \sqrt{\sin^2 \alpha'' - 1} \quad \text{im Fall (b): } \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \alpha > 1$$

gilt. Diese notwendigen Bedingungen legen  $\mathbf{n}'$ ,  $\mathbf{n}''$  bereits vollkommen fest, verfügbar (und zu bestimmen) bleiben lediglich  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{a}''$ , wobei auch noch die Nebenbedingungen  $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{n}' = 0$ ,  $\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{n}'' = 0$  erfüllt werden müssen.

Die Erfüllung der oben angeschriebenen notwendigen Bedingungen gewährleistet, dass die Stetigkeitsbedingungen (2.197) für *alle* Punkte der Grenzfläche erfüllt sind,

wofern sie im Ursprung erfüllt sind, da sich dann alle  $x$ - bzw.  $y$ -abhängigen  $e$ -Potenzen aus den Gleichungen (2.197) herauskürzen lassen. Das bedeutet: Nehmen wir an, dass die oben angeschriebenen notwendigen Bedingungen erfüllt sind, und setzen wir die so festgelegten Größen  $\mathbf{n}'$ ,  $\mathbf{n}''$  in die Beziehungen (2.197) mit  $x = y = 0$ , d. h. in

$$\varepsilon_1(a_z + a'_z) = \varepsilon_2 a''_z, \quad (2.213)$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}[(\mathbf{n} \times \mathbf{a})_z + (\mathbf{n}' \times \mathbf{a}')_z] = \sqrt{\varepsilon_2}(\mathbf{n}'' \times \mathbf{a}'')_z, \quad (2.214)$$

$$a_x + a'_x = a''_x, \quad (2.215)$$

$$a_y + a'_y = a''_y, \quad (2.216)$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}[(\mathbf{n} \times \mathbf{a})_x + (\mathbf{n}' \times \mathbf{a}')_x] = \sqrt{\varepsilon_2}(\mathbf{n}'' \times \mathbf{a}'')_x, \quad (2.217)$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}[(\mathbf{n} \times \mathbf{a})_y + (\mathbf{n}' \times \mathbf{a}')_y] = \sqrt{\varepsilon_2}(\mathbf{n}'' \times \mathbf{a}'')_y \quad (2.218)$$

ein, so darf sich kein Widerspruch ergeben, und wir müssen Beziehungen erhalten, welche zusammen mit den Nebenbedingungen  $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{n}' = 0$ ,  $\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{n}'' = 0$  die Größen  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{a}''$  bei gegebenen  $\omega$ ,  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{a}$  eindeutig festlegen. Wir haben also *acht* komplexe Gleichungen für *sechs* komplexe Unbekannte.

Analysiert man die bisherigen Argumente, so sieht man: Maßgebend für das Reflexions- und Brechungsgesetz ist *weder die spezielle Natur des Wellenfeldes* (in der Maxwelltheorie durch vier Vektorfelder, nämlich  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}$  beschrieben), *noch die spezielle Art der Stetigkeitsbedingungen* (in der Maxwelltheorie Stetigkeit der Normalkomponenten von  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{B}$  und der Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$ ), maßgebend ist einzig und allein die Existenz monochromatischer ebener Wellen, die Gültigkeit des Superpositionsprinzips (lineare Theorie), und das Bestehen *irgendeiner* Art von Stetigkeitsbedingungen. Dasselbe gilt für die Aussage der Gleichheit der Frequenzen. Dies ist der tiefere Grund dafür, dass man die genannten Aussagen auch ohne Kenntnis der maxwellschen Lichttheorie auf der Basis elementarer Wellenvorstellungen (huygensches Prinzip) „ableiten“ kann.

## 2.7.2 Polarisations- und Intensitätsverhältnisse

*Wir kommen nun zu Aussagen, für welche die spezielle Art des Wellenfeldes und der Stetigkeitsbedingungen entscheidend ist.* Dabei behandeln wir zuerst Fall (a) (Reflexion und Brechung; siehe Seite 163ff).

Im **Fall (a)** wählen wir die Polarisationsvektoren  $\boldsymbol{\epsilon}_1$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_2$  bzw.  $\boldsymbol{\epsilon}'_1$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}'_2$  bzw.  $\boldsymbol{\epsilon}''_1$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}''_2$  folgendermaßen (s. Abb. 2.27):

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = \boldsymbol{\epsilon}_\perp = \mathbf{e}_y = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = \boldsymbol{\epsilon}_\parallel = (\cos \alpha, 0, \sin \alpha); \quad (2.219)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}'_1 = \boldsymbol{\epsilon}'_\perp = \mathbf{e}_y = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{\epsilon}'_2 = \boldsymbol{\epsilon}'_\parallel = (-\cos \alpha, 0, \sin \alpha); \quad (2.220)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}''_1 = \boldsymbol{\epsilon}''_\perp = \mathbf{e}_y = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{\epsilon}''_2 = \boldsymbol{\epsilon}''_\parallel = (\cos \alpha'', 0, \sin \alpha''). \quad (2.221)$$



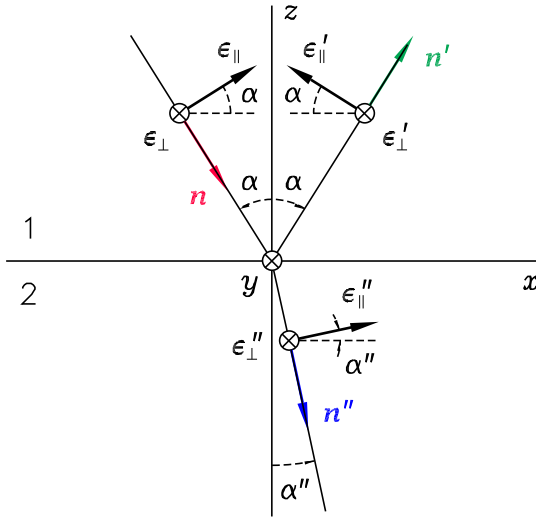


Abbildung 2.27: Wahl der Polarisationsvektoren

Schreiben wir die komplexen Amplitudenvektoren in der Form

$$\mathbf{a} = a_{\perp} \boldsymbol{\epsilon}_{\perp} + a_{\parallel} \boldsymbol{\epsilon}_{\parallel} = (a_{\parallel} \cos \alpha, a_{\perp}, a_{\parallel} \sin \alpha), \quad (2.222)$$

$$\mathbf{a}' = a'_{\perp} \boldsymbol{\epsilon}'_{\perp} + a'_{\parallel} \boldsymbol{\epsilon}'_{\parallel} = (-a'_{\parallel} \cos \alpha, a'_{\perp}, a'_{\parallel} \sin \alpha), \quad (2.223)$$

$$\mathbf{a}'' = a''_{\perp} \boldsymbol{\epsilon}''_{\perp} + a''_{\parallel} \boldsymbol{\epsilon}''_{\parallel} = (a''_{\parallel} \cos \alpha'', a''_{\perp}, a''_{\parallel} \sin \alpha'') \quad (2.224)$$

an, so sind damit die Nebenbedingungen  $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{n}' = 0$ ,  $\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{n}'' = 0$  erfüllt, und es bleiben die *sechs* komplexen Gleichungen (2.213) bis (2.218) für *vier* komplexe Unbekannte, nämlich  $a'_{\perp}$ ,  $a'_{\parallel}$ ,  $a''_{\perp}$ ,  $a''_{\parallel}$ . Nach kurzer Zwischenrechnung findet man

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{n}' \times \mathbf{a}') = ((a_{\perp} - a'_{\perp}) \cos \alpha, -(a_{\parallel} + a'_{\parallel}), (a_{\perp} + a'_{\perp}) \sin \alpha), \quad (2.225)$$

$$\mathbf{n}'' \times \mathbf{a}'' = (a''_{\perp} \cos \alpha'', -a''_{\parallel}, a''_{\perp} \sin \alpha''). \quad (2.226)$$

Einsetzen von Gl. (2.222) bis (2.224) und Gl. (2.225), (2.226) in Gl. (2.213) bis (2.218) gibt dann

$$\varepsilon_1 (a_{\parallel} + a'_{\parallel}) \sin \alpha = \varepsilon_2 a''_{\parallel} \sin \alpha'', \quad (2.227)$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} (a_{\perp} + a'_{\perp}) \sin \alpha = \sqrt{\varepsilon_2} a''_{\perp} \sin \alpha'', \quad (2.228)$$

$$(a_{\parallel} - a'_{\parallel}) \cos \alpha = a''_{\parallel} \cos \alpha'', \quad (2.229)$$

$$a_{\perp} + a'_{\perp} = a''_{\perp}, \quad (2.230)$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} (a_{\perp} - a'_{\perp}) \cos \alpha = \sqrt{\varepsilon_2} a''_{\perp} \cos \alpha'', \quad (2.231)$$

$$\sqrt{\varepsilon_1} (a_{\parallel} + a'_{\parallel}) = \sqrt{\varepsilon_2} a''_{\parallel}. \quad (2.232)$$

Berücksichtigt man das Brechungsgesetz (2.207), so wird (2.227) identisch mit (2.232), und (2.228) identisch mit (2.230), weshalb wir (2.227), (2.228) als redundante Beziehungen weglassen können. Die verbleibenden *vier* komplexen linearen inhomogenen

Gleichungen für die vier komplexen Unbekannten  $a'_\perp$ ,  $a''_\perp$ ,  $a'_\parallel$ ,  $a''_\parallel$  gestatten die eindeutige Bestimmung dieser Größen nach dem Schema

$$\left. \begin{aligned} a_\perp + a'_\perp &= a''_\perp \\ \sin \alpha'' \cos \alpha (a_\perp - a'_\perp) &= \sin \alpha \cos \alpha'' a''_\perp \end{aligned} \right\} \Rightarrow a'_\perp, a''_\perp; \quad (2.233)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha (a_\parallel - a'_\parallel) &= \cos \alpha'' a''_\parallel \\ \sin \alpha'' (a_\parallel + a'_\parallel) &= \sin \alpha a''_\parallel \end{aligned} \right\} \Rightarrow a'_\parallel, a''_\parallel. \quad (2.234)$$

Aus den Gleichungen (2.233) folgt durch Elimination von  $a''_\perp$

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \alpha'' (a_\perp + a'_\perp) - \sin \alpha'' \cos \alpha (a_\perp - a'_\perp) &= 0, \\ \sin(\alpha - \alpha'') a_\perp + \sin(\alpha + \alpha'') a'_\perp &= 0, \\ a'_\perp &= -a_\perp \frac{\sin(\alpha - \alpha'')}{\sin(\alpha + \alpha'')} \end{aligned} \quad (2.235)$$

und durch Elimination von  $a'_\perp$

$$\begin{aligned} 2 \sin \alpha'' \cos \alpha a_\perp &= \sin(\alpha + \alpha'') a''_\perp, \\ a''_\perp &= a_\perp \frac{2 \sin \alpha'' \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha'')}. \end{aligned} \quad (2.236)$$

Analog erhält man aus den Gleichungen (2.234) durch Elimination von  $a''_\parallel$

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \alpha (a_\parallel - a'_\parallel) - \sin \alpha'' \cos \alpha'' (a_\parallel + a'_\parallel) &= 0, \\ a'_\parallel &= a_\parallel \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha'' \cos \alpha''}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha'' \cos \alpha''} \end{aligned} \quad (2.237)$$

und durch Elimination von  $a'_\parallel$

$$a''_\parallel = a_\parallel \frac{2 \sin \alpha'' \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha'' \cos \alpha''}. \quad (2.238)$$

Mithilfe der Formeln

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \alpha \pm \sin \alpha'' \cos \alpha'' &= \sin \alpha \cos \alpha (\sin^2 \alpha'' + \cos^2 \alpha'') \pm \sin \alpha'' \cos \alpha'' (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= (\sin \alpha \cos \alpha'' \pm \sin \alpha'' \cos \alpha)(\cos \alpha \cos \alpha'' \pm \sin \alpha \sin \alpha'') \\ &= \sin(\alpha \pm \alpha'') \cos(\alpha \mp \alpha'') \end{aligned}$$

kann man die Beziehungen (2.237), (2.238) noch umformen.

Die schließlich erhaltenen Endformeln werden als fresnelsche Formeln bezeichnet.

Fresnelsche Formeln	
$a'_{\parallel} = a_{\parallel} \frac{\tan(\alpha - \alpha'')}{\tan(\alpha + \alpha'')},$	$a'_{\perp} = -a_{\perp} \frac{\sin(\alpha - \alpha'')}{\sin(\alpha + \alpha'')},$ (2.239)
$a''_{\parallel} = a_{\parallel} \frac{2 \sin \alpha'' \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha'') \cos(\alpha - \alpha'')},$	$a''_{\perp} = a_{\perp} \frac{2 \sin \alpha'' \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha'')}. (2.240)$

Mithilfe des Brechungsgesetzes (2.207) und der Additionstheoreme der Winkelfunktionen und kann man leicht zeigen, dass sich die fresnelschen Formeln auch in der folgenden Form schreiben lassen.

Fresnelsche Formeln	
$a'_{\parallel} = a_{\parallel} \frac{n_{12} \cos \alpha - \cos \alpha''}{n_{12} \cos \alpha + \cos \alpha''},$	$a'_{\perp} = a_{\perp} \frac{\cos \alpha - n_{12} \cos \alpha''}{\cos \alpha + n_{12} \cos \alpha''},$ (2.241)
$a''_{\parallel} = a_{\parallel} \frac{2 \cos \alpha}{n_{12} \cos \alpha + \cos \alpha''},$	$a''_{\perp} = a_{\perp} \frac{2 \cos \alpha}{\cos \alpha + n_{12} \cos \alpha''}. (2.242)$

Im **Fall (b)** (Totalreflexion; s. Seite 165ff) hat man im Medium 1 zwei ebene Wellen mit Ausbreitungsrichtungen  $\mathbf{n}$  bzw.  $\mathbf{n}'$ . Die Wahl der Polarisationsvektoren  $\boldsymbol{\epsilon}_1 = \boldsymbol{\epsilon}_{\perp}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_2 = \boldsymbol{\epsilon}_{\parallel}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}'_1 = \boldsymbol{\epsilon}'_{\perp}$  und  $\boldsymbol{\epsilon}'_2 = \boldsymbol{\epsilon}'_{\parallel}$  erfolgt deshalb vollkommen gleich wie in Abb. 2.27 dargestellt und in Gl. (2.219), (2.220) angeschrieben. Im Medium 2 hat man eine *inhomogene Welle*,  $\mathbf{n}''$  ist ein komplexer Vektor und  $\alpha''$  ist ein komplexer Winkel. Die Abbildung 2.27 ist daher bzgl. des Mediums 2 obsolet. Wie aber bereits auf Seite 167 festgestellt wurde, können wir für  $\mathbf{n}''$  mathematisch formal nach wie vor  $\mathbf{n}'' = (\sin \alpha'', 0, -\cos \alpha'')$  schreiben. Damit können wir auch wieder formal neben dem „unproblematischen“ Vektor  $\boldsymbol{\epsilon}'_1 = \boldsymbol{\epsilon}'_{\perp} = \mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$  einen *komplexen Vektor*  $\boldsymbol{\epsilon}'_2 = \boldsymbol{\epsilon}'_{\parallel} = (\cos \alpha'', 0, \sin \alpha'')$  wie in Gl. (2.221) einführen. Die Interpretation von  $\boldsymbol{\epsilon}'_1, \boldsymbol{\epsilon}'_2$  als Polarisationsvektoren ist natürlich hinfällig. Die angeschriebenen Ausdrücke behalten aber ihre mathematische Gültigkeit. Auch die Nebenbedingung  $\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{n}'' = 0$  ist nach wie vor erfüllt, wenn sie auch keine anschauliche Bedeutung mehr besitzt.

Da wir bei der von Gl. (2.219) bis (2.224) ausgehenden Rechnung überall  $\cos \alpha''$  beibehalten, d. h. nirgends durch  $\sin \alpha''$  ausgedrückt haben, gelten die fresnelschen Formeln (2.239), (2.240) bzw. (2.241), (2.242) auch im Fall (b). Die Differenzierung ergibt sich erst dadurch, dass gemäß Seite 167 im **Fall (a)**

$$\cos \alpha'' = +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha''} = +\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n_{12}^2}} = \frac{1}{n_{12}} \sqrt{n_{12}^2 - \sin^2 \alpha} \quad (2.243)$$

und im **Fall (b)**

$$\cos \alpha'' = +i\sqrt{\sin^2 \alpha'' - 1} = +i\sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{n_{12}^2} - 1} = i\frac{1}{n_{12}} \sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2} \quad (2.244)$$

einzusetzen ist.

### Zusammenfassung

Wir haben den Ansatz (2.187) bis (2.193), welcher die Feld- und Materialgleichungen im Medium 1 bzw. im Medium 2 erfüllt, in die Grenzbedingungen (2.196) eingesetzt und dabei keinen Widerspruch erhalten. Ferner gestatten die aus den Grenzbedingungen erhaltenen Beziehungen (das Reflexionsgesetz, das Brechungsgesetz und die fresnelschen Formeln) bei gegebenem  $\omega$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{a}$  die eindeutige Bestimmung von  $\mathbf{n}'$ ,  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{n}''$  und  $\mathbf{a}''$ . Damit ist die durch Feldgleichungen, Materialgleichungen, Grenzbedingungen und asymptotische Bedingung (einfallende ebene Welle im Medium 1) eindeutig bestimmte Lösung des Problems gefunden.

### Polarisations- und Intensitätsverhältnisse bei Reflexion und Brechung

Gilt entweder  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ , also  $n_{12} > 1$ , oder  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ , also  $n_{12} < 1$ , und ist der Einfallswinkel  $\alpha$  nicht größer als  $\alpha_T = \arcsin n_{12}$ , so liegt Fall (a) vor, und es kommt zu Reflexion und Brechung. (Siehe die Abbildungen 2.24, 2.25 von Seite 164.)

Es ist dann  $\alpha''$  reell, woraus folgt, dass alle Proportionalitätsfaktoren in den Gleichungen (2.239), (2.240) reell sind. Der Proportionalitätsfaktor

$$\frac{\tan(\alpha - \alpha'')}{\tan(\alpha + \alpha'')}$$

kann positiv, negativ oder null sein. Letzteres tritt im Sonderfall  $\alpha + \alpha'' = \frac{\pi}{2}$  ein. Wie man leicht zeigen kann (s. Aufgabe E17), liegt dieser Sonderfall bei Einfall unter dem so genannten *brewsterschen Winkel*  $\alpha_B := \arctan n_{12}$  vor.

Der Proportionalitätsfaktor

$$-\frac{\sin(\alpha - \alpha'')}{\sin(\alpha + \alpha'')}$$

kann positiv oder negativ sein, und die Proportionalitätsfaktoren

$$\frac{2 \sin \alpha'' \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha'') \cos(\alpha - \alpha'')}, \quad \frac{2 \sin \alpha'' \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha'')}$$

können nur positive Werte annehmen.<sup>49</sup> Drücken wir die komplexen Amplituden  $a_{\parallel}$ ,  $a_{\perp}$  usf. durch die zugehörigen reellen Amplituden und Phasenwinkel aus,  $a_{\parallel} = E_{\parallel} \exp(i\delta_{\parallel})$ ,  $a_{\perp} = E_{\perp} \exp(i\delta_{\perp})$  usf., so folgt für  $(a_{\parallel}, a_{\perp}) \neq (0, 0)$  modulo  $2\pi$

$$\delta'_{\perp} - \delta'_{\parallel} = \begin{cases} \delta_{\perp} - \delta_{\parallel} + \pi & \text{für } \alpha + \alpha'' < \frac{\pi}{2}, \text{ d. h. } \alpha < \alpha_B \\ \delta_{\perp} - \delta_{\parallel} & \text{für } \alpha + \alpha'' > \frac{\pi}{2}, \text{ d. h. } \alpha > \alpha_B \end{cases} \quad (2.245)$$

$$\delta''_{\perp} - \delta''_{\parallel} = \delta_{\perp} - \delta_{\parallel}. \quad (2.246)$$

<sup>49</sup>Beachte, dass  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$  und  $\alpha + \alpha'' < \pi$  gilt.

Im Sonderfall  $\alpha + \alpha'' = \frac{\pi}{2}$ , d. h.  $\alpha = \alpha_B$ , gilt  $a'_{\parallel} = 0$ . ( $\delta'_{\perp} - \delta'_{\parallel}$  hat dann keinen definierten Wert und ist bedeutungslos.) Ist  $a_{\parallel}$  oder  $a_{\perp}$  null, so gilt dasselbe für  $a'_{\parallel}$ ,  $a''_{\parallel}$  bzw. für  $a'_{\perp}$ ,  $a''_{\perp}$ . ( $\delta_{\perp} - \delta_{\parallel}$ ,  $\delta'_{\perp} - \delta'_{\parallel}$  und  $\delta''_{\perp} - \delta''_{\parallel}$  haben dann keinen definierten Wert und sind bedeutungslos.) Daraus ergeben sich die folgenden Aussagen:

(1)  $\alpha + \alpha'' \neq \frac{\pi}{2}$ , d. h.  $\alpha \neq \alpha_B$

In diesem Fall sind alle Proportionalitätsfaktoren in den Gleichungen (2.239), (2.240) von null verschieden.

- (1.1) Ist die einfallende Welle elliptisch polarisiert, so ist es auch die reflektierte und die gebrochene Welle, allerdings mit verschiedenen Achsenverhältnissen der Ellipse. Bei der reflektierten Welle kann sich außerdem der Umlaufsinn des  $\mathbf{E}$ -Vektors umkehren.
- (1.2) Ist die einfallende Welle linear polarisiert, so ist es auch die reflektierte und die gebrochene Welle.
- (1.3) Ist die einfallende Welle zirkular polarisiert, so ist die reflektierte und die gebrochene Welle elliptisch polarisiert.

(2) *Sonderfall*  $\alpha + \alpha'' = \frac{\pi}{2}$ , d. h.  $\alpha = \alpha_B$

- (2.1) Ist die einfallende Welle elliptisch polarisiert, so ist die reflektierte Welle linear polarisiert<sup>50</sup> mit der Polarisationsrichtung  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}'_{\perp} = \mathbf{e}_y$ , die gebrochene Welle ist elliptisch polarisiert (s. Abb. 2.28).
- (2.2) Ist die einfallende Welle linear polarisiert mit einer Polarisationsrichtung  $\mathbf{e}$ , welche nicht in der Einfallsebene liegt ( $\mathbf{e} \not\perp \mathbf{e}_y$ ), so ist die reflektierte Welle linear polarisiert mit der Polarisationsrichtung  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}'_{\perp} = \mathbf{e}_y$ , die gebrochene Welle ist linear polarisiert mit einer Polarisationsrichtung  $\mathbf{e}''$ , welche nicht in der Einfallsebene liegt (s. Abb. 2.28).
- (2.3) Ist die einfallende Welle linear polarisiert mit der Polarisationsrichtung  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{\parallel}$ , so gibt es überhaupt keine reflektierte Welle ( $a'_{\perp} = a'_{\parallel} = 0$ ), und die gebrochene Welle ist linear polarisiert mit der Polarisationsrichtung  $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}''_{\parallel}$  (s. Abb. 2.29).
- (2.4) Ist die einfallende Welle zirkular polarisiert, so ist die reflektierte Welle linear polarisiert mit der Polarisationsrichtung  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}'_{\perp} = \mathbf{e}_y$  und die gebrochene Welle ist elliptisch polarisiert (s. Abb. 2.28).

Nun zu den *Intensitätsverhältnissen*. Da wir  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$  gesetzt haben, gilt in den beiden Medien

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}).$$

Wie man leicht beweist (s. Aufgabe E18), kann für ein zeitlich harmonisches elektromagnetisches Feld der zeitliche Mittelwert von  $\mathbf{S}$  über eine Periode (s. Gl. (1.301)) mithilfe

<sup>50</sup>Dies wird zur Erzeugung linear polarisierter Strahlung ausgenützt.

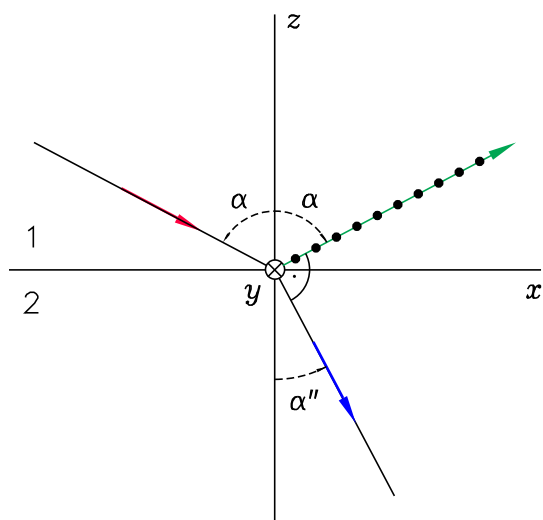


Abbildung 2.28: Lichteinfall unter dem Brewsterschen Winkel, einfallende Welle *nicht* linear polarisiert mit Polarisationsrichtung in der Einfallsebene

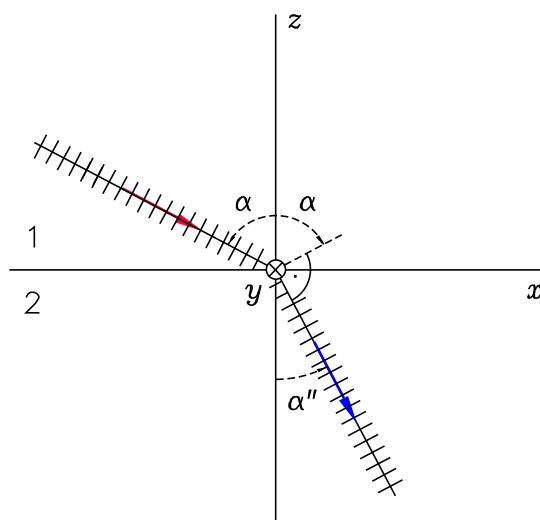


Abbildung 2.29: Lichteinfall unter dem Brewsterschen Winkel, einfallende Welle linear polarisiert mit Polarisationsrichtung in der Einfallsebene

der Formel

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_c \times \mathbf{B}_c^*) \quad (2.247)$$

berechnet werden. Für eine monochromatische ebene Welle mit der Kreisfrequenz  $\omega$ , der Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$  und dem komplexen Amplitudenvektor  $\mathbf{a}$  in einem Medium mit reellem  $\varepsilon(\omega)$  folgt daraus (s. Aufgabe E19)<sup>51</sup>

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon(\omega)} |\mathbf{a}|^2 \mathbf{n} \quad (2.248)$$

mit  $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^*$ . Für die *Intensität* einer solchen Welle gilt also (s. Gl. (1.301))

$$I = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon(\omega)} |\mathbf{a}|^2. \quad (2.249)$$

Damit ergibt sich für die einfallende Welle (Argument  $\omega$  wieder weggelassen)

$$I^{(e)} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon_1} (|a_{\perp}|^2 + |a_{\parallel}|^2), \quad (2.250)$$

für die reflektierte Welle

$$I^{(r)} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon_1} (|a'_{\perp}|^2 + |a'_{\parallel}|^2) \quad (2.251)$$

und für die gebrochene Welle

$$I^{(g)} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon_2} (|a''_{\perp}|^2 + |a''_{\parallel}|^2). \quad (2.252)$$

<sup>51</sup>Die Komponenten von  $\mathbf{n}$  sowie  $\varepsilon(\omega)$  müssen reell sein, damit die Beziehungen (2.248), (2.249) gelten.

Im Medium 1 gibt es *zwei* ebene Wellen, und der zeitgemittelte Poyntingvektor ist eigentlich durch Gl. (2.247) mit  $\mathbf{E}_c \rightarrow \mathbf{E}_{c1} = \mathbf{E}_c^{(e)} + \mathbf{E}_c^{(r)}$ ,  $\mathbf{B}_c \rightarrow \mathbf{B}_{c1} = \mathbf{B}_c^{(e)} + \mathbf{B}_c^{(r)}$  gegeben, womit für das Medium 1

$$\overline{\mathbf{S}}_1 = \overline{\mathbf{S}}^{(e)} + \overline{\mathbf{S}}^{(r)} + \text{Interferenzterm}, \quad I_1 = |\overline{\mathbf{S}}_1| \quad (2.253)$$

folgt. Dabei sind – wie man zeigen kann – nicht alle Komponenten des Interferenztermes null. Die Berechnung der Intensitäten  $I^{(e)}$  und  $I^{(r)}$  aus  $\overline{\mathbf{S}}^{(e)}$  allein bzw. aus  $\overline{\mathbf{S}}^{(r)}$  allein sowie die obige Interpretation dieser Größen ist aber durch die Art gerechtfertigt, wie die Intensitäten im Experiment tatsächlich gemessen werden (s. Abb. 2.30). Im Experiment hat man es nie mit unendlich ausgedehnten Wellenfronten (ebenen Wellen), sondern mit endlich ausgedehnten „Lichtstrahlen“ zu tun. Abgesehen von den „Randzonen“ der Strahlen, in denen die Wellenfronten unvermeidlich deformiert sind, werden dann die Felder des einfallenden, reflektierten und gebrochenen Strahls durch die für ebene Wellen abgeleiteten Formeln korrekt beschrieben. Die Intensität  $I_1$  würde man im Medium 1 in jenem Raumgebiet messen, in welchem einfallender *und* reflektierter Strahl vorhanden sind. Außerhalb dieses Raumgebietes misst man im einfallenden Strahl  $I^{(e)}$  und im reflektierten Strahl  $I^{(r)}$ .<sup>52</sup>

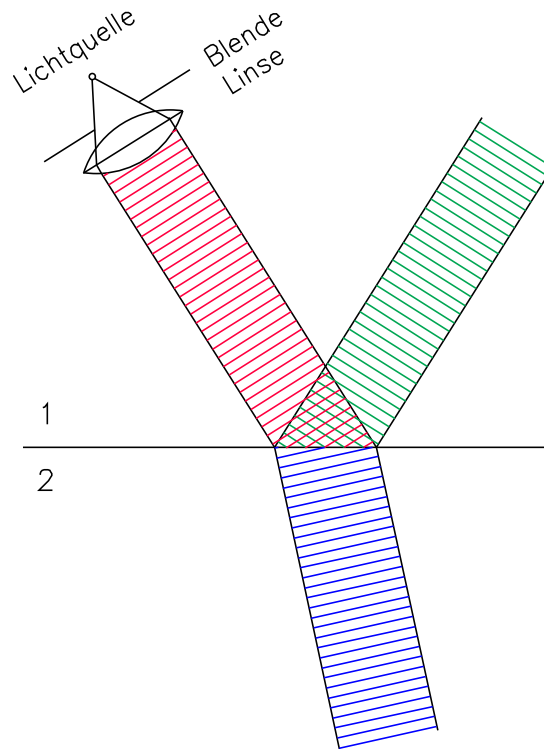


Abbildung 2.30: Zur Intensitätsmessung bei Reflexion und Brechung

<sup>52</sup>Bei der Messung von  $I_1$ ,  $I^{(e)}$ ,  $I^{(r)}$  und  $I^{(g)}$  muss man die jeweiligen „Randzonen“ meiden, da dort die Ergebnisse der idealisierten Rechnung nicht gelten.

Für die folgenden Überlegungen – welche nicht nur bei Reflexion und Brechung (Fall (a)), sondern auch bei Totalreflexion (Fall (b)) gelten – ist wichtig, dass für die  $z$ -Komponente des zeitgemittelten Poyntingvektors in jenem Raumgebiet, in dem einfallende *und* reflektierte Welle vorhanden sind,<sup>53</sup>

$$\overline{S_{1,z}} = \overline{S_z^{(e)}} + \overline{S_z^{(r)}} \quad (2.254)$$

gilt, die  $z$ -Komponente des zeitgemittelten Poyntingvektors also *keine Interferenzterme* enthält (s. Aufgabe E20).<sup>54</sup> Man kann deshalb  $-\overline{S_z^{(e)}}$  als jene (von der „Lichtquelle“ her stammende) Energie interpretieren, welche im Medium 1 im Zeitmittel pro Zeiteinheit auf die Flächeneinheit der Grenzebene einfällt<sup>55</sup>, und man kann  $\overline{S_z^{(r)}}$  als jene Energie interpretieren, welche im Zeitmittel pro Zeiteinheit von der Flächeneinheit der Grenzebene in das Medium 1 „zurückgeworfen“ wird. Ferner ist  $-\overline{S_{2,z}}$  die Energie, die im Zeitmittel pro Zeiteinheit von der Flächeneinheit der Grenzebene in das Medium 2 wegströmt. Da in der Grenzfläche keine Energie dissipiert wird, muss die *Energieströmungsbilanz*

$$-\overline{S_z^{(e)}} = \overline{S_z^{(r)}} + (-\overline{S_{2,z}}) \quad (2.255)$$

gelten. Dies ist durch Reflexionsgesetz, Brechungsgesetz und fresnelsche Formeln gewährleistet, da ja die zur Ableitung dieser Beziehungen benützten Grenzbedingungen u. a. die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$  und damit die Stetigkeit der Normalkomponenten von  $\mathbf{S}$  auf der Grenzebene gewährleisten:

$$S_{1,z}(x, y, 0, t) = S_{2,z}(x, y, 0, t), \quad \forall x, y, t. \quad (2.256)$$

Durch Bildung des Zeitmittelwertes folgt daraus  $\overline{S_{1,z}} = \overline{S_{2,z}}$  (Zeitmittelwerte von  $x, y$  unabhängig) und mit Gl. (2.254) folgt sofort  $\overline{S_z^{(e)}} + \overline{S_z^{(r)}} = \overline{S_{2,z}}$ , also Gl. (2.255).

Die Größen

$$R := \frac{\overline{S_z^{(r)}}}{-\overline{S_z^{(e)}}}, \quad T := \frac{-\overline{S_{2,z}}}{-\overline{S_z^{(e)}}} \quad (2.257)$$

heißen *Reflexions-* bzw. *Transmissionskoeffizient* für den Übergang  $1 \rightarrow 2$ .  $R$  und  $T$  hängen vom Einfallswinkel  $\alpha$  und der Frequenz der einfallenden Welle ab. Die Energieströmungs-

<sup>53</sup>In der idealisierten Rechnung mit ebenen Wellen ist dies das gesamte Medium 1, in einem realistischen Experiment ist es der „Überlappungsbereich“ von einfallendem und reflektiertem Strahl (unter Ausschluss einer „Randzone“).

<sup>54</sup>Beachte, dass in Gl. (2.254) alle Terme ortsunabhängig sind.

<sup>55</sup>Beachte, dass  $\mathbf{n}_{\mathcal{F}} = \mathbf{e}_z$  gilt.



bilanz an der Grenzfläche drückt sich dann als  $R + T = 1$  aus. Wegen (siehe Gl. (2.248))

$$-\overline{S_z^{(e)}} = -\frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon_1} |\mathbf{a}|^2 n_z = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon_1} |\mathbf{a}|^2 \cos \alpha = I^{(e)} \cos \alpha, \quad (2.258)$$

$$\overline{S_z^{(r)}} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon_1} |\mathbf{a}'|^2 n'_z = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon_1} |\mathbf{a}'|^2 \cos \alpha = I^{(r)} \cos \alpha, \quad (2.259)$$

gilt *allgemein*, d. h. in den Fällen (a) und (b),

$$R = \frac{I^{(r)} \cos \alpha}{I^{(e)} \cos \alpha} = \frac{I^{(r)}}{I^{(e)}} = \frac{|\mathbf{a}'|^2}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{|a'_\perp|^2 + |a'_\parallel|^2}{|a_\perp|^2 + |a_\parallel|^2}, \quad T = 1 - R. \quad (2.260)$$

Für den Fall (b) werden wir damit  $R = 1, T = 0$  erhalten (s. Gl. (2.268)). *Nur* im Fall (a) hingegen gelten die Beziehungen

$$-\overline{S_{2,z}} = -\overline{S_z^{(g)}} = -\frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon_2} |\mathbf{a}''|^2 n''_z = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon_2} |\mathbf{a}''|^2 \cos \alpha'' = I^{(g)} \cos \alpha'', \quad (2.261)$$

$$T = \frac{I^{(g)} \cos \alpha''}{I^{(e)} \cos \alpha} = n_{12} \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha} \frac{|\mathbf{a}''|^2}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha''}{\sin \alpha'' \cos \alpha} \frac{|a''_\perp|^2 + |a''_\parallel|^2}{|a_\perp|^2 + |a_\parallel|^2}. \quad (2.262)$$

*Polarisations- und Intensitätsverhältnisse im Medium 1 und qualitative Eigenschaften der inhomogenen Welle im Medium 2 bei Totalreflexion*

Gilt  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ , also  $n_{12} < 1$ , und ist der Einfallswinkel  $\alpha$  größer als  $\alpha_T = \arcsin n_{12}$ , so liegt Fall (b) vor, und es kommt zu Totalreflexion (s. Abb. 2.26 von Seite 166). Aus den fresnelschen Formeln (2.241) folgt dann mit Gl. (2.244)

$$a'_\parallel = a_\parallel \frac{n_{12} \cos \alpha - i \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}}{n_{12}}}{n_{12} \cos \alpha + i \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}}{n_{12}}}, \quad a'_\perp = a_\perp \frac{\cos \alpha - i \sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}}{\cos \alpha + i \sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}}. \quad (2.263)$$

Nun gilt aber für reelles  $a, b$

$$\frac{a - ib}{a + ib} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} e^{-i\phi}}{\sqrt{a^2 + b^2} e^{i\phi}} = e^{-2i\phi} \quad \text{mit} \quad \tan \phi = \frac{b}{a}. \quad (2.264)$$

Aus den Beziehungen (2.263) ergibt sich daher

$$a'_\parallel = a_\parallel \exp\left(-2i \arctan \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}}{n_{12}^2 \cos \alpha}\right), \quad (2.265)$$

$$a'_\perp = a_\perp \exp\left(-2i \arctan \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}}{\cos \alpha}\right). \quad (2.266)$$

Daraus folgt für den Polarisationszustand der reflektierten Welle:

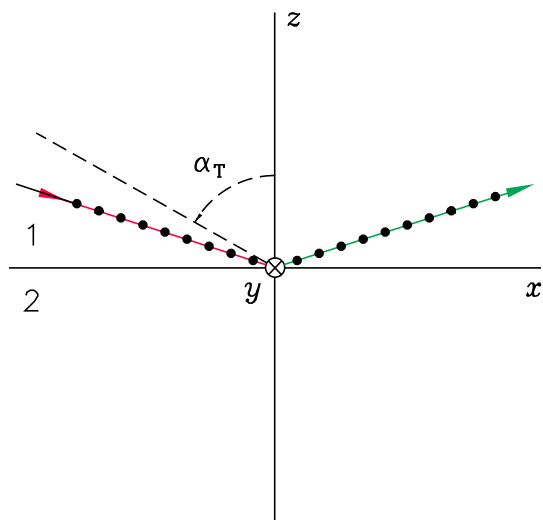


Abbildung 2.31: Polarisationszustand der reflektierten Welle bei Totalreflexion, wenn die einfallende Welle linear polarisiert ist mit Polarisationsrichtung senkrecht zur Einfallsebene

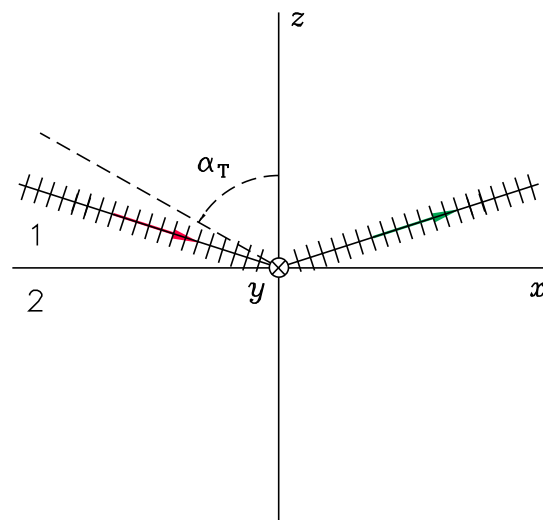


Abbildung 2.32: Polarisationszustand der reflektierten Welle bei Totalreflexion, wenn die einfallende Welle linear polarisiert ist mit Polarisationsrichtung in der Einfallsebene

- (1) Ist die einfallende Welle elliptisch polarisiert, so ist es i. Allg. auch die reflektierte Welle.<sup>56</sup>
- (2) Ist die einfallende Welle zirkular polarisiert oder ist sie linear polarisiert mit einer Polarisationsrichtung  $\epsilon$ , die weder in der Einfallsebene liegt noch senkrecht dazu steht ( $a_{\perp} \neq 0, a_{\parallel} \neq 0$ ), so ist die reflektierte Welle elliptisch polarisiert.
- (3) Ist die einfallende Welle linear polarisiert mit Polarisationsrichtung  $\epsilon$  in der Einfallsebene [senkrecht zur Einfallsebene], so ist die reflektierte Welle ebenfalls linear polarisiert mit Polarisationsrichtung  $\epsilon'$  in der Einfallsebene [senkrecht zur Einfallsebene] (s. Abb. 2.31, 2.32).

Nun zu den *Intensitätsverhältnissen* im Medium 1. Aus den Beziehungen (2.265), (2.266) folgt

$$|a'_{\parallel}| = |a_{\parallel}|, \quad |a'_{\perp}| = |a_{\perp}|.$$

Dies bedeutet (s. Gl. (2.250), (2.251)), dass die Intensität der reflektierten Welle gleich ist der Intensität der einfallenden Welle,

$$I^{(r)} = I^{(e)} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\epsilon_1} (|a_{\perp}|^2 + |a_{\parallel}|^2), \quad (2.267)$$

woraus

$$R = 1, \quad T = 0 \quad (2.268)$$

<sup>56</sup>„Zufällig“ könnte die reflektierte Welle auch linear oder zirkular polarisiert sein. (Letzteres setzt  $|a_{\perp}| = |a_{\parallel}|$  voraus.)

folgt.<sup>57</sup> Es strömt also im Zeitmittel keine Energie ins Medium 2 ein, die gesamte von der „Lichtquelle“ auf die Grenzfläche einfallende Energie wird in das Medium 1 „zurückgeworfen“, weshalb man von *Totalreflexion* spricht.

Da  $\mathbf{n}''$  im Fall der Totalreflexion komplex ist, gilt Formel (2.248) für das Medium 2 nicht, und es gilt daher auch die Beziehung (2.261) nicht. Man muss  $-\overline{S_{2,z}}$  gemäß

$$-\overline{S_{2,z}} = -\frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[(\mathbf{E}_{c2} \times \mathbf{B}_{c2}^*) \cdot \mathbf{e}_z] \quad (2.269)$$

berechnen. Um diesen Ausdruck ausrechnen zu können und damit explizit zu zeigen, dass  $-\overline{S_{2,z}}$  null ist, benötigt man  $\mathbf{E}_{c2}$ ,  $\mathbf{B}_{c2}^*$ . Die elektrische Feldstärke haben wir bereits auf Seite 166 berechnet:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{c2}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{a}'' \exp\left[-\sqrt{\varepsilon_1 n_x^2 - \varepsilon_2} \frac{\omega}{c} |z|\right] \exp\left[i\left(\sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} n_x x - \omega t\right)\right] \\ &= \mathbf{a}'' \exp\left[-\sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} \sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2} |z|\right] \exp\left[i\left(\sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} \sin \alpha x - \omega t\right)\right]. \end{aligned} \quad (2.270)$$

Die magnetische Feldstärke ist durch Gl. (2.193) mit dem komplexen Vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'' &= (\sin \alpha'', 0, -\cos \alpha'') = \left(\frac{\sin \alpha}{n_{12}}, 0, -i \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{n_{12}^2} - 1}\right) \\ &= \frac{1}{n_{12}} (\sin \alpha, 0, -i \sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}) \end{aligned} \quad (2.271)$$

gegeben. Im Medium 2 liegt eine in positiver  $x$ -Richtung fortschreitende, in negativer  $z$ -Richtung exponentiell abklingende inhomogene Welle vor.<sup>58</sup>

Für die Phasengeschwindigkeit dieser Welle gilt

$$v_{\text{ph}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} \frac{n_{12}}{\sin \alpha} < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} \quad (2.272)$$

und für die Eindringtiefe ( $k'' = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \sqrt{\varepsilon_2} \frac{\omega}{c}$ )

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} \sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}} = \frac{n_{12}}{\sqrt{\varepsilon_2} \frac{\omega}{c} \sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}} \\ &= \frac{\lambda_2}{2\pi} \frac{n_{12}}{\sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}}. \end{aligned} \quad (2.273)$$

<sup>57</sup>Beachte, dass die Beziehungen (2.254) bis (2.260) auch im Fall (b) gelten.

<sup>58</sup>Beachte, dass es im Medium 2 voraussetzungsgemäß *keine Absorption* gibt. Das exponentielle Abklingen hat also nichts mit Absorption zu tun.

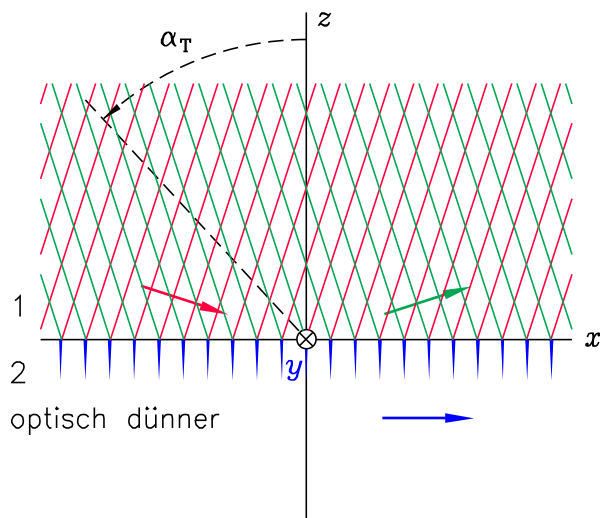


Abbildung 2.33: „Lichthaut“ im Medium 2 bei Totalreflexion einer ebenen Welle

Man kann leicht zeigen (s. Aufgabe E21), dass die Eindringtiefe von der Größenordnung  $\lambda_2$  ist, falls  $\alpha$  nicht zu nahe bei  $\alpha_T$  liegt, weshalb man von einer „Lichthaut“ im Medium 2 spricht (s. Abb. 2.33). Ferner kann man leicht zeigen, dass sich alle Größen (Feldstärken, Phasengeschwindigkeit, Eindringtiefe etc.) beim „Durchgang“ von  $\alpha$  durch  $\alpha_T$  stetig verhalten (s. Aufgabe E22).

Die Bezeichnung *Totalreflexion* besteht zu Recht, da  $R = 1$ ,  $T = 0$  gilt. Es stellt sich aber die Frage, wie die im Medium 2 vorhandene Energie dorthin gekommen ist bzw. dorthin kommt. Um diese Frage zu klären, muss man von einem *realistischen Experiment* mit einem endlich ausgedehnten einfallenden Strahl ausgehen. Die Abbildung 2.34 zeigt, was dabei „passiert“: In der „Randzone“ des einfallenden Strahles, in der die Ergebnisse der idealisierten Rechnung aufgrund der Deformation der Wellenfronten nicht gelten, erfolgt Transmission des elektromagnetischen Feldes und damit Transmission von Feldenergie in das Medium 2. Das Feld breitet sich im Medium 2 längs der Grenzfläche in  $x$ -Richtung aus und „verlässt“ das Medium 2 wieder im Bereich der „Randzone“ des reflektierten Strahles. Im Endeffekt wird also die gesamte Energie „zurückgeworfen“.

Wir zeigen nun explizit, dass  $-\overline{S}_{2,z}$  für alle  $z$  null ist. Dabei gehen wir von der Formel (2.269) aus und benutzen Gl. (2.270), (2.271) und die Abkürzung  $\sqrt{\dots} \equiv \sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}$ .

Mit

$$\mathbf{B}_{c2}^* = \mathbf{n}''^* \times \sqrt{\varepsilon_2} \mathbf{E}_{c2}^*$$

und

$$\mathbf{E}_{c2} = (a_{\perp}'' \mathbf{e}_{\perp}'' + a_{\parallel}'' \mathbf{e}_{\parallel}'') \exp\left[-\sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} \sqrt{\dots} |z|\right] \exp\left[i\left(\sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} \sin \alpha x - \omega t\right)\right]$$

sowie den Beziehungen

$$\mathbf{n}''^* = \frac{1}{n_{12}} (\sin \alpha, 0, i\sqrt{\dots}), \quad \mathbf{e}_{\parallel}'' = \frac{1}{n_{12}} (i\sqrt{\dots}, 0, \sin \alpha), \quad \mathbf{e}_{\perp}'' = (0, 1, 0)$$

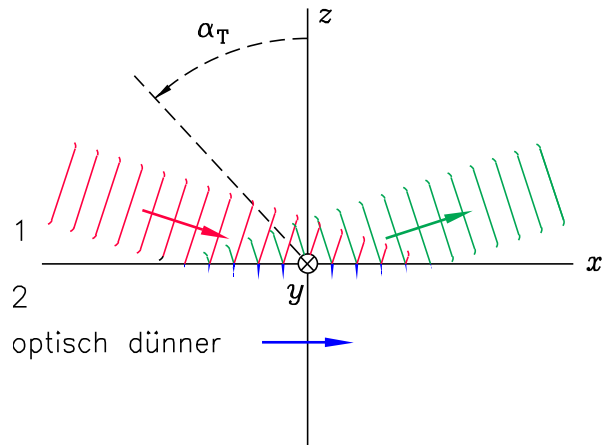


Abbildung 2.34: „Lichthaut“ im Medium 2 bei Totalreflexion eines „Lichtstrahles“

folgt wegen<sup>59</sup>  $\mathbf{E}_{c2} \times (\mathbf{n}''^* \times \mathbf{E}_{c2}^*) = |\mathbf{E}_{c2}|^2 \mathbf{n}''^* - (\mathbf{E}_{c2} \cdot \mathbf{n}''^*) \mathbf{E}_{c2}^*$

$$-\overline{S_{2,z}} = -\frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon_2} \operatorname{Re} \left[ \underbrace{|\mathbf{E}_{c2}|^2}_{\text{reell}} \underbrace{(\mathbf{n}''^* \cdot \mathbf{e}_z)}_{\text{imaginär}} \right] + \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon_2} \operatorname{Re} \left[ \underbrace{(\mathbf{E}_{c2} \cdot \mathbf{n}''^*)}_{\text{imaginär (s. unten)}} (\mathbf{E}_{c2}^* \cdot \mathbf{e}_z) \right] = 0.$$

Zu zeigen bleibt, dass  $(\mathbf{E}_{c2} \cdot \mathbf{n}''^*)(\mathbf{E}_{c2}^* \cdot \mathbf{e}_z)$  tatsächlich imaginär ist:

$$\mathbf{E}_{c2} \cdot \mathbf{n}''^* = a_{\parallel}'' 2i \frac{\sin \alpha \sqrt{\dots}}{n_{12}^2} \exp \left[ -\sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} \sqrt{\dots} |z| \right] \exp \left[ i \left( \sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} \sin \alpha x - \omega t \right) \right],$$

$$\mathbf{E}_{c2}^* \cdot \mathbf{e}_z = a_{\parallel}''^* \frac{\sin \alpha}{n_{12}} \exp \left[ -\sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} \sqrt{\dots} |z| \right] \exp \left[ -i \left( \sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} \sin \alpha x - \omega t \right) \right],$$

$$(\mathbf{E}_{c2} \cdot \mathbf{n}''^*)(\mathbf{E}_{c2}^* \cdot \mathbf{e}_z) = i |a_{\parallel}''|^2 \frac{2 \sin^2 \alpha \sqrt{\dots}}{n_{12}^3} \exp \left[ -2 \sqrt{\varepsilon_1} \frac{\omega}{c} \sqrt{\dots} |z| \right].$$

## 2.8 Beugung an undurchdringlichen Hindernissen

### 2.8.1 Grundaufgabe der Elektrodynamik bei Anwesenheit undurchdringlicher Hindernisse

In Abschnitt 1.15 haben wir die so genannte 1. Grundaufgabe der Elektrodynamik für natürliche Randbedingungen gelöst, d. h. wir haben das elektromagnetische Feld einer vorgegebenen räumlich lokalisierten Quellverteilung im Vakuum für den Fall berechnet, dass keine Randbedingungen im Endlichen vorgegeben sind.

<sup>59</sup>Beachte: Es gilt  $\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{n}'' = 0$ , aber  $\mathbf{a}'' \cdot \mathbf{n}''^* \neq 0$ .

Nun behandeln wir die (1.) **Grundaufgabe der Elektrodynamik bei Anwesenheit undurchdringlicher Hindernisse**, d. h. wir nehmen an, dass es im Endlichen neben einer vorgegebenen räumlich lokalisierten Quellverteilung noch *Hindernisse* gibt, welche die Eigenschaft besitzen, dass sie das Eindringen des elektromagnetischen Feldes nicht gestatten, sodass in ihrem Inneren  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$  gilt (s. Abb. 2.35). *Ideale Leiter*<sup>60</sup> stellen derartige Hindernisse dar. Sie bilden im Feld der Quellverteilung durch Influenz eine Oberflächenladungsverteilung und einen Oberflächenstrom aus, welche das elektromagnetische Feld im Inneren „auslöschen“. In der Praxis wird dieses Ideal durch gute elektrische Leiter angenähert.<sup>61</sup>

Die Grundaufgabe der Elektrodynamik bei Anwesenheit undurchdringlicher Hindernisse wird auch als **Beugungsproblem im weiteren Sinn** bezeichnet. Wir schreiben die mathematische Formulierung für die elektromagnetischen Potentiale an, die Feldstärken  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  ergeben sich aus den Potentialen gemäß Gl. (1.24), (1.26).

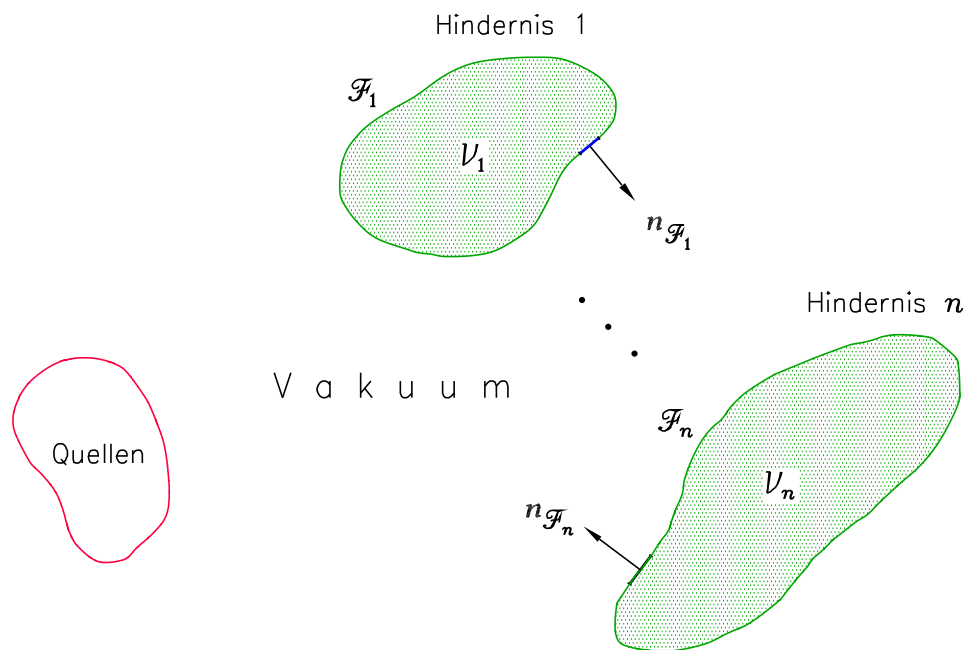


Abbildung 2.35: Grundaufgabe der Elektrodynamik bei Anwesenheit undurchdringlicher Hindernisse (Beugungsproblem im weiteren Sinn)

<sup>60</sup>Siehe die Fußnote auf Seite 150.

<sup>61</sup>Für zu hohe Frequenzen (Röntgen- und Gammastrahlen) trifft dies nicht mehr zu, man muss dann aber ohnehin zur mikroskopischen und quantentheoretischen Behandlung übergehen, da dann die makroskopische Elektrodynamik nicht mehr gilt, und die Energie  $\hbar\omega$  der Photonen zum Auslösen atomarer Stoßprozesse ausreicht.

Die Feldgleichungen

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.274)$$

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (2.275)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.276)$$

sind für den *Außenraum der Hindernisse*, d. h. für  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \dots \cup \mathcal{V}_n\}$ , zu lösen. Die Tangentialkomponente von  $\mathbf{E}$  und die Normalkomponente von  $\mathbf{B}$  müssen auf den Oberflächen  $\mathcal{F}_s$  der Hindernisse  $s = 1, 2, \dots, n$  stetig sein. Da sie im Inneren der Hindernisse null sind, müssen sie auch auf der „Außenseite“ null sein.<sup>62</sup> Es müssen daher die folgenden *Randbedingungen* erfüllt werden:

$$\mathbf{n}_{\mathcal{F}_s}(\mathbf{r}) \times \left( \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = \mathbf{0}, \quad (2.277)$$

$$\mathbf{n}_{\mathcal{F}_s}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{F}_s, \quad s = 1, 2, \dots, n; \quad \forall t. \quad (2.278)$$

Um die Lösung für die Feldstärken  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  eindeutig festzulegen, muss noch eine *Ausstrahlungsbedingung* hinzugenommen werden. Diese muss garantieren, dass es im Unendlichen nur *auslaufende Wellen* gibt. Sie ist mathematisch so kompliziert, dass wir sie nicht anschreiben. Es müssen nämlich räumlich asymptotische Bedingungen für die Komponenten der fouriertransformierten Feldstärken  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)$  vorgeschrieben werden.<sup>63, 64</sup>

Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich, wenn die *Quellverteilung zeitlich harmonisch* ist, und *stationäre Verhältnisse* vorliegen, d. h. der „Einschwingvorgang“ abgeklungen ist. In komplexer Schreibweise hat man dann

$$\rho_c(\mathbf{r}, t) = \rho_c(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{j}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_c(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (2.279)$$

und

$$\varphi_c(\mathbf{r}, t) = \varphi_c(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{A}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_c(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (2.280)$$

und die elektromagnetischen Feldstärken

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_c(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_c(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (2.281)$$

<sup>62</sup>Die Normalkomponente von  $\mathbf{E}$  und die Tangentialkomponente von  $\mathbf{B}$  können auf der „Außenseite“ der Hindernisse *nicht* null sein, da sie auf der „Innenseite“ der Hindernisse null sind und auf den Oberflächen der Hindernisse einen Sprung besitzen müssen, welcher gerade die influenzierten Oberflächenladungsdichten und Oberflächenstromdichten liefert.

<sup>63</sup>Siehe dazu Stumpf, H., und W. Schuler: Elektrodynamik, Vieweg, Braunschweig 1981, wo die mathematische Seite des Beugungsproblems sehr ausführlich besprochen wird. Die folgende Darstellung lehnt sich eng an dieses Buch an.

<sup>64</sup>Besitzen die Oberflächen der Hindernisse Kanten, so kommen noch so genannte *Kantenbedingungen* dazu. Wir nehmen im Folgenden an, dass die Oberflächen aller Hindernisse glatt sind.

ergeben sich gemäß ( $k = \frac{\omega}{c}$  Kreiswellenzahl)

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad} \varphi_c(\mathbf{r}) + ik\mathbf{A}_c(\mathbf{r}), \quad (2.282)$$

$$\mathbf{B}_c(\mathbf{r}) = \mathbf{rot} \mathbf{A}_c(\mathbf{r}). \quad (2.283)$$

Es sind dann die *Feldgleichungen*

$$\Delta \varphi_c(\mathbf{r}) + k^2 \varphi_c(\mathbf{r}) = -4\pi \rho_c(\mathbf{r}), \quad (2.284)$$

$$\Delta \mathbf{A}_c(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{A}_c(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_c(\mathbf{r}), \quad (2.285)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{A}_c(\mathbf{r}) - ik \varphi_c(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.286)$$

für den *Außenraum der Hindernisse*, d. h. für  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \dots \cup \mathcal{V}_n\}$ , zu lösen, wobei die *Randbedingungen*<sup>65</sup>

$$\mathbf{n}_{\mathcal{F}_s}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{grad} \varphi_c(\mathbf{r}) - ik\mathbf{A}_c(\mathbf{r})) = \mathbf{0}, \quad (2.287)$$

$$\mathbf{r} \in \mathcal{F}_s, \quad s = 1, 2, \dots, n; \quad \forall t$$

und die entsprechende *Ausstrahlungsbedingung* zu erfüllen sind.

Für die soeben formulierte *stationäre Beugungstheorie im weiteren Sinn* gibt es einen Existenz- und Eindeutigkeitsatz<sup>66</sup> sowie exakte Lösungen für den Fall eines einzigen kugelförmigen oder zylinderförmigen Hindernisses.

Von **Beugungstheorie im engeren Sinn** spricht man, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Die Quellverteilung ist so weit von den Hindernissen entfernt, dass man in der Gegend der Hindernisse von einem *Wellenfeld* sprechen kann. Man nennt dann die Quelle eine „Lichtquelle“ (Strahlungsquelle). In den Anwendungen gibt man meist gar nicht die Quellverteilung selbst, sondern das von dieser auf den Bereich mit den Hindernissen einfallende Wellenfeld an.
- Die Lineardimensionen der Hindernisse sowie die Abstände der Hindernisse sind groß gegenüber den Wellenlängen<sup>67</sup> der von der Quelle emittierten Wellen.

Unter diesen Annahmen kann man in niedrigster Näherung zur Berechnung der „Lichtintensität“ (Intensität des Wellenfeldes) im Bereich der Hindernisse und „hinter“ den Hindernissen die Gesetze der *geometrischen Optik* benützen („Lichtstrahlen“). Nur in der unmittelbaren *Umgebung der geometrischen Schattengrenzen* und in Bereichen, in denen

<sup>65</sup>Die Bedingungen  $\mathbf{n}_{\mathcal{F}_s}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}_c(\mathbf{r}) = 0$  werden – wie man zeigen kann – *nicht* benötigt, da sie zu den übrigen Beziehungen redundant sind. Beachte, dass eine analoge Situation bei Reflexion und Brechung vorlag.

<sup>66</sup>Die Eindeutigkeit bezieht sich auf die Feldstärken  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ . Die Potentiale sind nur bis auf Eichtransformationen mit Eichfunktionen, welche Lösung der homogenen Wellengleichung sind, bestimmt.

<sup>67</sup>In der stationären Beugungstheorie gibt es nur *eine* Wellenlänge, nämlich  $\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$ .



eine große Anzahl von „Lichtstrahlen“ zusammentreffen, reicht diese Näherung nicht aus: Man muss die *Beugung* der elektromagnetischen Wellen berücksichtigen, welche zu typischen Intensitätsmustern (hellen und dunklen Streifen oder Ringen etc.) führt. Die Beugungstheorie im engeren Sinn ist hauptsächlich an der Berechnung der Intensität in diesen Raumbereichen interessiert. Unter den ihr zugrunde liegenden Annahmen lassen sich *Näherungsmethoden* entwickeln, welche auch bei komplizierten Anordnungen eine halbquantitative oder sogar quantitative Berechnung der Intensitätsverteilung gestatten. Ausgangspunkt für die einfachste derartige Näherungsmethode, das *kirchhoffsche Verfahren*, ist der im Folgenden abgeleitete mathematische Hilfssatz.

### 2.8.2 Mathematischer Hilfssatz zur Helmholtzgleichung

Die Potentiale  $\varphi_c, A_{cx}, A_{cy}, A_{cz}$  erfüllen neben der Differentialgleichung (2.286) alle eine *inhomogene Helmholtzgleichung*, also eine Differentialgleichung vom Typ

$$\Delta \Psi_c(\mathbf{r}) + k^2 \Psi_c(\mathbf{r}) = -4\pi q_c(\mathbf{r}). \quad (2.288)$$

#### Mathematischer Hilfssatz

Ist  $\Psi_c$  Lösung der inhomogenen Helmholtzgleichung (2.288) zu einer vorgegebenen lokalisierten „Quellverteilung“  $q_c$ , und ist  $\mathcal{V}$  ein Volumsbereich, in dessen Innerem überall  $q_c(\mathbf{r}) = 0$  gilt, so erfüllt  $\Psi_c$  für Punkte  $\mathbf{r}$  im Inneren von  $\mathcal{V}$  die *Identität*

$$\Psi_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f}' \cdot \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left[ \mathbf{grad}' \Psi_c(\mathbf{r}') + ik \left( 1 + \frac{i}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Psi_c(\mathbf{r}') \right]. \quad (2.289)$$

Für den Beweis dieses mathematischen Hilfssatzes verwenden wir die Tatsache, dass

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') := \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (2.290)$$

eine spezielle greensche Funktion des Helmholtzoperators  $\Delta + k^2$ , d. h. Partikulärintegral von

$$\{\Delta + k^2\} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.291)$$

ist<sup>68</sup> (s. Aufgabe E23), sowie die 2. greensche Formel aus der Vektoranalysis:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{V}} d^3r' \left[ U(\mathbf{r}') \Delta' V(\mathbf{r}') - V(\mathbf{r}') \Delta' U(\mathbf{r}') \right] \\ &= \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f}' \cdot \left[ U(\mathbf{r}') \mathbf{grad}' V(\mathbf{r}') - V(\mathbf{r}') \mathbf{grad}' U(\mathbf{r}') \right]. \end{aligned} \quad (2.292)$$

<sup>68</sup>Zusammen mit dem Zeitfaktor  $e^{-i\omega t}$  beschreibt der Ausdruck (2.290) in komplexer Schreibweise eine vom fiktiven Quellpunkt  $\mathbf{r}'$  auslaufende Kugelwelle.

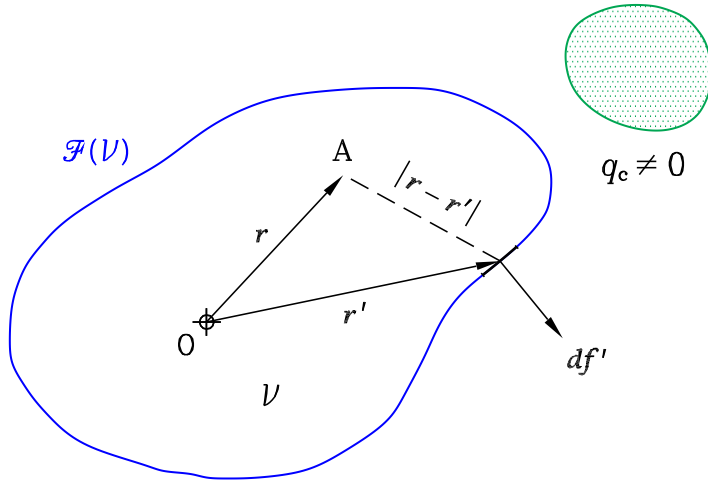


Abbildung 2.36: Zum Hilfsatz

Setzt man in diese Formel

$$U(\mathbf{r}') \equiv \frac{\Psi_c(\mathbf{r}')}{4\pi}, \quad V(\mathbf{r}') \equiv G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (2.293)$$

ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r' \left[ \Psi_c(\mathbf{r}') \underbrace{\Delta' G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \Delta' \Psi_c(\mathbf{r}')}_{-k^2 \Psi_c(\mathbf{r}') - 4\pi q_c(\mathbf{r}')} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f}' \cdot [\Psi_c(\mathbf{r}') \mathbf{grad}' G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \mathbf{grad}' \Psi_c(\mathbf{r}')]. \end{aligned} \quad (2.294)$$

Ist  $q_c$  im Inneren von  $\mathcal{V}$  null, so erfüllt also  $\Psi_c$  für Punkte  $\mathbf{r}$  im Inneren von  $\mathcal{V}$  (siehe Abb. 2.36) die Identität

$$-\Psi_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f}' \cdot [\Psi_c(\mathbf{r}') \mathbf{grad}' G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \mathbf{grad}' \Psi_c(\mathbf{r}')]. \quad (2.295)$$

Mit der Greenschen Funktion (2.290) sowie dem zugehörigen Gradienten

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}' G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= \mathbf{grad}' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -ik \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} + \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &= -ik \left( 1 + \frac{i}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (2.296)$$

folgt dann die Beziehung (2.289).

### 2.8.3 Kirchhoffsches Verfahren

Nehmen wir einmal an, das betrachtete stationäre Beugungsproblem sei exakt gelöst worden, und  $\varphi_c, \mathbf{A}_c$  seien die betreffenden elektromagnetischen Potentiale. Nach dem Hilfssatz von Abschnitt 2.8.2 müssen dann  $\varphi_c, \mathbf{A}_c$  für Aufpunkte  $\mathbf{r}$  im Inneren eines Volumsbereiches  $\mathcal{V}$ , in welchem  $\rho_c(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{j}_c(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$  gilt, die Gleichungen

$$\varphi_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} d\mathbf{f}' \cdot \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left[ \mathbf{grad}' \varphi_c(\mathbf{r}') + ik \left( 1 + \frac{i}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \varphi_c(\mathbf{r}') \right], \quad (2.297)$$

$$A_{cj}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^3 \oint_{\mathcal{F}(\mathcal{V})} df'_l \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left[ \frac{\partial A_{cj}(\mathbf{r}')}{\partial x'_l} + ik \left( 1 + \frac{i}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \frac{x_l - x'_l}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} A_{cj}(\mathbf{r}') \right] \quad (2.298)$$

identisch erfüllen. Wir bezeichnen diese Beziehungen als *kirchhoffsche Identitäten*.

Die Beziehungen (2.297), (2.298) können *nicht* als Integralgleichungen für die gesuchten Potentiale aufgefasst werden, welche man etwa durch Iteration lösen könnte. Beachte, dass *beliebige* Lösungen der Helmholtzgleichungen (2.284), (2.285) für Aufpunkte  $\mathbf{r}$  im Volumsbereich  $\mathcal{V}$  die Gleichungen (2.297), (2.298) identisch erfüllen, auch Lösungen der Helmholtzgleichungen, welche Lorenzgleichung, Randbedingungen und Ausstrahlungsbedingung *nicht* erfüllen. Beachte ferner, dass in die Gleichungen (2.297), (2.298) außerdem die spezielle Quellverteilung nicht explizit eingeht. Lösungen der Helmholtzgleichungen für *andere* als die gegebenen Queldichten erfüllen also ebenfalls für Aufpunkte  $\mathbf{r}$  im Volumsbereich  $\mathcal{V}$  die Gleichungen (2.297), (2.298) identisch, wofern nur diese Queldichten im Inneren von  $\mathcal{V}$  null sind. Es ist also *nicht* möglich, die gesuchte Lösung des Beugungsproblems mathematisch aus den Beziehungen (2.297), (2.298) zu berechnen.

Kirchhoffs Grundgedanke für die Gewinnung einer *Näherungslösung* ist die physikalische Erwartung, dass man durch Einsetzen von plausiblen erratenen Näherungsausdrücken für *alle* in die kirchhoffschen Identitäten (2.297), (2.298) eingehenden Randwerte der gesuchten Lösung (Potentiale und Normalableitungen der Potentiale auf ganz  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ ) eine brauchbare Näherung für  $\varphi_c(\mathbf{r}), \mathbf{A}_c(\mathbf{r})$  für Punkte  $\mathbf{r}$  aus dem Inneren von  $\mathcal{V}$  erhalten kann. Da die Helmholtzgleichung *nicht* die simultane Vorgabe von Funktion und Normalableitung auf einer geschlossenen Oberfläche erlaubt (überbestimmtes Problem), steht diese Erwartung auf tönernen Füßen. Setzt man in die Gleichungen (2.297), (2.298) die *exakten* Randwerte und Normalableitungen der Lösung ein, so erhält man daraus natürlich für Punkte  $\mathbf{r}$  im Inneren von  $\mathcal{V}$  auch die *exakte* Lösung. Ändert man aber Randwerte oder (und) Normalableitungen noch so geringfügig ab, so ist *nicht* gewährleistet,

dass sich aus den Gleichungen (2.297), (2.298) für Punkte  $\mathbf{r}$  im Inneren von  $\mathcal{V}$  auch nur eine geringfügige Änderung ergibt, da aufgrund der Überbestimmung Stabilität nicht gesichert ist.

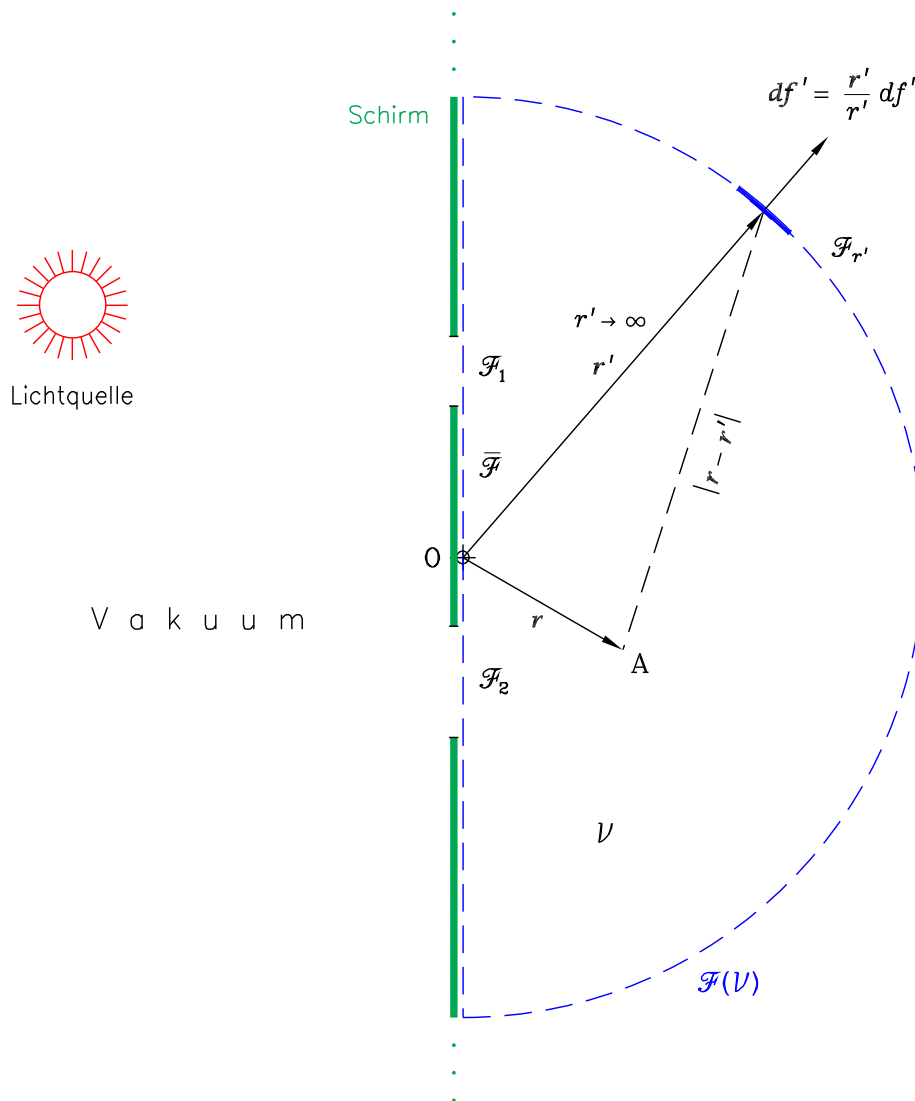


Abbildung 2.37: Ebener Beugungsschirm mit endlich vielen, nicht ins Unendliche reichenden Öffnungen: Volumsbereich  $\mathcal{V}$  mit Oberfläche  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  für das Anschreiben der kirchhoffschen Identitäten;  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$  Teile von  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  unmittelbar hinter den Öffnungen,  $\bar{\mathcal{F}}$  Teil von  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  unmittelbar hinter dem undurchlässigen Schirmteil,  $\mathcal{F}_{r'}$  Halbkugelfläche mit Radius  $r' \rightarrow \infty$ ;  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots$ ,  $\mathcal{F}(\mathcal{V}) = \mathcal{F} \cup \bar{\mathcal{F}} \cup \mathcal{F}_{r'}$

Das Erraten von physikalisch plausiblen Näherungsausdrücken für die Randwerte von  $\varphi_c, \mathbf{A}_c$  und deren Normalableitungen auf einer geschlossenen Fläche  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  gelingt nur für Problemstellungen mit *Beugungsschirmen* der in Abb. 2.37 dargestellten Art, wenn man  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  wie dort eingezeichnet wählt und folgende Voraussetzungen erfüllt sind.

**Voraussetzungen:**

- Öffnungen und Abstände zwischen den Öffnungen sind groß gegen die Wellenlänge.
- Es werden nur Aufpunkte  $\mathbf{r}$  hinter dem Beugungsschirm betrachtet, deren Abstand vom Beugungsschirm groß ist gegen die Wellenlänge.

Für derartige Problemstellungen schlug Kirchhoff die folgenden Annahmen vor:

**Kirchhoffsche Annahmen**

1. Unmittelbar hinter dem undurchlässigen Teil des Schirmes (Fläche  $\bar{\mathcal{F}}$ ) sind die elektromagnetischen Potentiale und deren Normalableitungen null.
2. Unmittelbar hinter den Schirmöffnungen (Fläche  $\mathcal{F}$ ) besitzen die elektromagnetischen Potentiale und deren Normalableitungen jene Werte, welche dort vorliegen würden, wenn überhaupt kein Schirm vorhanden wäre (ungestörte von der „Lichtquelle“ her einfallende Welle).
3. Im Halbraum hinter dem Schirm verhält sich das elektromagnetische Feld asymptotisch wie das einer Kugelwelle, welche vom „Bereich der Schirmöffnungen“ ausläuft. Legt man den Koordinatenursprung in diesen Bereich (s. Abb. 2.37), so soll also

$$\varphi_c(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} f(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \mathbf{A}_c(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \mathbf{g}(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.299)$$

gelten.<sup>69</sup>

*Physikalisch* bedeuten die Annahmen 1, 2, dass man auf  $\bar{\mathcal{F}}$  jene Randwerte wählt, welche dort vorlägen, wenn der Schirm nirgends eine Öffnung hätte, und auf  $\mathcal{F}$  jene Randwerte wählt, die dort vorlägen, wenn es überhaupt keinen Schirm gäbe. Bis auf „Randzonen“, deren Breite von der Größenordnung der Wellenlänge ist, stellt dies eine gute Näherung für die tatsächlichen Felder dar.

*Mathematisch* sind die kirchhoffschen Annahmen über die Randwerte jedoch mit der Helmholtzgleichung *nicht verträglich*. Ist nämlich  $\Psi_c$  und  $\mathbf{grad} \Psi_c \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{F}}$  auf einem beliebigen endlichen Teilstück von  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$  null, und ist  $\Psi_c$  Lösung der Helmholtzgleichung, so folgt  $\Psi_c(\mathbf{r}) \equiv 0$  für alle  $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$ . Dazu kommt – dies wurde bereits auf Seite 187 besprochen –, dass bei noch so geringfügigen Abweichungen in den Randwerten und Normalableitungen nicht gewährleistet ist, dass sich für die Potentiale für Punkte  $\mathbf{r}$  im Inneren von  $\mathcal{V}$  auch nur ein geringfügiger Fehler ergibt, da aufgrund der Überbestimmung Stabilität nicht gesichert ist. Diese beiden mathematischen Mängel des kirchhoffschen Verfahrens können allerdings durch eine Modifikation des Verfahrens beseitigt werden.<sup>70</sup>

Werten wir die kirchhoffschen Identitäten (2.297), (2.298) unter Verwendung der kirchhoffschen Annahmen aus:

<sup>69</sup>Zusammen mit dem Zeitfaktor  $e^{-i\omega t}$  beschreiben diese Ausdrücke in komplexer Schreibweise eine vom fiktiven Quellpunkt  $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$  auslaufende winkelmäßig amplitudenmodulierte Kugelwelle.

<sup>70</sup>Siehe dazu Seite 191f.

Aufgrund von Annahme 1 sind in (2.297), (2.298) die Beiträge von  $\overline{\mathcal{F}}$  null. Zufolge der Annahme 3 verschwinden für  $r' \rightarrow \infty$  auch die Beiträge der Halbkugelfläche  $\mathcal{F}_{r'}$ . Für den Integranden in Gl. (2.297) angeschrieben:

Auf der Halbkugelfläche  $\mathcal{F}_{r'}$  gilt  $d\mathbf{f}' = \frac{\mathbf{r}'}{r'} r'^2 d\Omega'$  und somit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{f}' &\underset{r' \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{ikr'}}{r'} \left[ \mathbf{grad}' \varphi_c(\mathbf{r}') - ik \left( 1 + \frac{i}{kr'} \right) \frac{\mathbf{r}'}{r'} \varphi_c(\mathbf{r}') \right] \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r'} r'^2 d\Omega' \\
 &= \frac{e^{ikr'}}{r'} \left[ \underbrace{\frac{\mathbf{r}'}{r'} \cdot \mathbf{grad}' \varphi_c(\mathbf{r}')}_{f(\Omega') \frac{e^{ikr'}}{r'}} - ik \left( 1 + \frac{i}{kr'} \right) \overbrace{\varphi_c(\mathbf{r}')}^{f(\Omega') \frac{e^{ikr'}}{r'}} \right] r'^2 d\Omega' \quad (2.300) \\
 \frac{\partial}{\partial r'} \varphi_c(\mathbf{r}') &= \left( ik - \frac{1}{r'} \right) f(\Omega') \frac{e^{ikr'}}{r'} + O\left( \frac{1}{r'^3} \right) \\
 &= \frac{e^{ikr'}}{r'} O\left( \frac{1}{r'^2} \right) r'^2 d\Omega' = O\left( \frac{1}{r'} \right) d\Omega' \xrightarrow{r' \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Es bleiben somit nur die Integrale über die Schirmöffnungen  $\mathcal{F}$  übrig, wobei in den Integranden aufgrund von Annahme 2 die Potentiale  $\varphi_c^{(e)}, \mathbf{A}_c^{(e)}$  der *ungestörten* einfallenden Welle einzusetzen sind. Das kirchhoffsche Verfahren liefert also für die Potentiale  $\varphi_c, \mathbf{A}_c$  in Aufpunkten  $\mathbf{r}$  „hinter dem Schirm“

$$\begin{aligned}
 \varphi_c(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{f}' \cdot \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left[ \mathbf{grad}' \varphi_c^{(e)}(\mathbf{r}') \right. \\
 &\quad \left. + ik \left( 1 + \frac{i}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \varphi_c^{(e)}(\mathbf{r}') \right], \quad (2.301)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{cj}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^3 \int_{\mathcal{F}} df'_l \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left[ \frac{\partial A_{cj}^{(e)}(\mathbf{r}')}{\partial x'_l} \right. \\
 &\quad \left. + ik \left( 1 + \frac{i}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \frac{x_l - x'_l}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} A_{cj}^{(e)}(\mathbf{r}') \right]. \quad (2.302)
 \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke, die man als **Kirchhoffintegrale** bezeichnet, können als mathematische Formulierung des *huygensschen Prinzips* interpretiert werden, nach welchem das Wellenfeld im Aufpunkt  $\mathbf{r}$  als Überlagerung von Kugelwellen

$$\frac{e^{i(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-\omega t)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

berechnet werden kann, welche von fiktiven Quellpunkten  $\mathbf{r}'$  in den Schirmöffnungen ausgehen. Amplitude und Phase dieser huygensschen Elementarwellen werden dabei

durch Amplitude und Phase des auf die Öffnung einfallenden ungestörten Wellenfeldes bestimmt.

Die aus den Kirchhoffintegralen berechneten Intensitätsverteilungen<sup>71</sup> stimmen unter den auf Seite 189 genannten Voraussetzungen mit den bei Beugungsexperimenten mit Schirmen experimentell gefundenen Intensitätsverteilungen sehr gut überein.

Die auf Seite 189 besprochene *mathematische Inkonsistenz* des kirchhoffschen Verfahrens kann man vermeiden, indem man in den Hilfssatz (2.295) anstelle der Greenfunktion für natürliche Randbedingungen Gl. (2.290) die so genannte dirichletsche Greenfunktion  $G_D(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$  einsetzt, welche die Randbedingung  $G_D(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = 0$  für  $\mathbf{r}' \in \mathcal{F}(\mathcal{V})$  erfüllt. Für einen ebenen Beugungsschirm erhält man dann<sup>72</sup> anstelle der Kirchhoffintegrale (2.301), (2.302) die *modifizierten Kirchhoffintegrale*<sup>73</sup>

$$\varphi_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{f}' \cdot \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} 2ik \left(1 + \frac{i}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \varphi_c^{(e)}(\mathbf{r}'), \quad (2.303)$$

$$A_{cj}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^3 \int_{\mathcal{F}} df'_l \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} 2ik \left(1 + \frac{i}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \frac{x_l - x'_l}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} A_{cj}^{(e)}(\mathbf{r}'), \quad (2.304)$$

für welche man auf  $\mathcal{F}$  nur die ungestörten Potentiale, nicht aber deren Normalableitungen benötigt. Wie man sieht, erhält man die modifizierten Kirchhoffintegrale aus den Kirchhoffintegralen, indem man in den Kirchhoffintegralen (2.301), (2.302) den ersten Term in der eckigen Klammer weglässt und den zweiten Term mit dem Faktor zwei multipliziert. Dieses einfache „Rezept“ gilt auch für die weiteren Rechnungen bis zum Endergebnis Gl. (2.316). Es wird sich zeigen, dass unter jenen Voraussetzungen, unter denen man vom kirchhoffschen Verfahren brauchbare Ergebnisse erwarten kann, und in jenem Raumbereich, in welchem die daraus berechneten Intensitäten noch merklich von null verschieden sind, die Kirchhoffintegrale praktisch dasselbe Ergebnis liefern wie die modifizierten Kirchhoffintegrale. Diese Tatsache stellt eine gewisse theoretische Rechtfertigung des originalen kirchhoffschen Verfahrens dar.

Im Folgenden zeichnen wir in den Abbildungen eine einzige Schirmöffnung und legen den Koordinatenursprung „in ihre Mitte“ (s. Abb. 2.38). Die Rechnungen gelten aber auch bei mehreren Öffnungen. Es muss nur der Ursprung in den Bereich der Schirmebene gelegt werden, in dem die Öffnungen sind. Weiters nehmen wir im Folgenden zur Vereinfachung der Rechnungen an, dass die „Lichtquelle“ so weit vom Beugungsschirm entfernt ist, dass man die ungestörte einfallende elektromagnetische Welle als *monochromatische ebene Welle* mit vorgegebener Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}^{(e)}$  idealisieren kann. Da wir keine Aussagen über Polarisierungseffekte anstreben – sie wären ohnehin nicht

<sup>71</sup>Beachte: Die Potentiale  $\varphi_c^{(e)}$ ,  $\mathbf{A}_c^{(e)}$  sind als Lösungen der 1. Grundaufgabe der Elektrodynamik für natürliche Randbedingungen im Prinzip bekannt (s. Abschnitt 1.15).

<sup>72</sup>Siehe dazu Jackson, J. D.: Klassische Elektrodynamik. Walter de Gruyter, Berlin 2006.

<sup>73</sup>Diese Bezeichnung stammt von Jackson. Kirchhoff hat dieses Verfahren nicht gekannt.

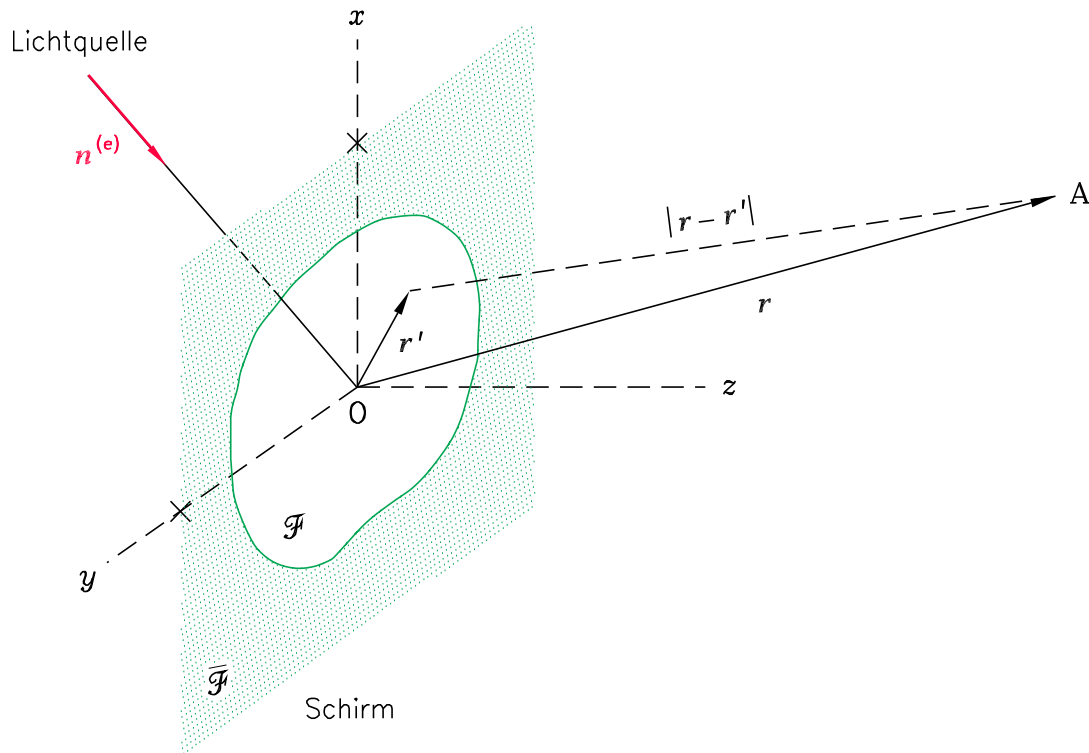


Abbildung 2.38: Ebener Beugungsschirm und einfallende ebene Welle

brauchbar – , setzen wir eine *linear polarisierte* monochromatische ebene Welle an:

$$\mathbf{E}_c^{(e)}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} e^{ik\mathbf{n}^{(e)} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{B}_c^{(e)}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}^{(e)} \times \mathbf{E}_c^{(e)}(\mathbf{r}), \quad (2.305)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{e} E_0^{(e)} e^{i\delta^{(e)}}, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{n}^{(e)} = 0. \quad (2.306)$$

Wie man leicht verifiziert (s. Aufgabe E24) lassen sich die Feldstärken (2.305) aus den Potentialen

$$\varphi_c^{(e)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{A}_c^{(e)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{ik} \mathbf{a} e^{ik\mathbf{n}^{(e)} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.307)$$

herleiten. Setzt man diese Potentiale in die Kirchhoffintegrale (2.301), (2.302) ein, so folgt

$$\varphi_c(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.308)$$

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{f}' \cdot \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left[ \mathbf{n}^{(e)} + \left(1 + \frac{i}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] e^{ik\mathbf{n}^{(e)} \cdot \mathbf{r}'} \quad (2.309)$$

Ist  $D$  die maximale Ausdehnung der Öffnung bzw. des Bereiches mit Öffnungen, so ist eine notwendige Bedingung für die Anwendbarkeit der Kirchhoffintegrale (2.308), (2.309)



jedenfalls

$$D \gg \lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (2.310)$$

da sonst die kirchhoffsche Annahme 2 nicht zutrifft. Bei der Auswertung der Kirchhoffintegrale (2.301), (2.302) bzw. (2.308), (2.309) unterscheidet man folgende Zonen:<sup>74</sup>

- Mittelzone:  $\lambda \ll r \sim D$ ,
- Fernzone:  $\lambda \ll D \ll r$ .

### 2.8.4 Fraunhoferbeugung. Beispiele: Spalt und Doppelspalt

Wir behandeln hier nur die so genannte *Fraunhoferbeugung*. Von Fraunhoferbeugung spricht man, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$1 \ll \frac{D}{\lambda} \ll \frac{r}{D}. \quad (2.311)$$

Es reicht also *nicht* aus, dass der Aufpunkt in der Fernzone liegt, es muss darüber hinaus  $r$  im Vergleich zu  $D$  viel größer sein als  $D$  im Vergleich zur Wellenlänge  $\lambda$  („ferne Fernzone“).<sup>75</sup> Der Fall der Fraunhoferbeugung ist einerseits praktisch sehr wichtig, andererseits auch mathematisch einfach, da sich der Integrand in Gl. (2.309) noch wesentlich vereinfachen lässt. Man kann dann nämlich in dieser Gleichung

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r}, \quad \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{f}' \approx \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{f}', \quad 1 + \frac{i}{k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx 1 + \frac{i}{kr} \approx 1 \quad (2.312)$$

setzen und man kann das Argument in  $\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  vereinfachen. Wegen  $kr \gg 1$  kann man aber im Exponenten nicht  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  durch  $r$  ersetzen. Man muss in der Entwicklung

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2} = r \sqrt{1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} \\ &= r \left[ 1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r^2 r'^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{2r^4} + O\left(\frac{r'^3}{r^3}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.313)$$

so weit gehen, bis die in der Entwicklung von  $k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  weggelassenen Terme klein gegen  $2\pi$  sind. Für Punkte  $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$  der Öffnung und Aufpunkte  $\mathbf{r}$ , welche die Bedingung (2.311) erfüllen, folgt mit  $r'_{\max} \sim \frac{D}{2}$  zunächst einmal  $|k(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}')|_{\max} \sim \frac{2\pi}{\lambda} \frac{D}{2} \gg \pi$ , sodass der zweite Term in der Entwicklung (2.313) berücksichtigt werden muss. Dagegen folgt

$$\begin{aligned} \left[ kr \frac{r^2 r'^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{2r^4} \right]_{\max} &= \left[ \frac{kr'^2}{2r} \left\{ 1 - \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r'} \right)^2 \right\} \right]_{\max} = \left[ \frac{kr'^2}{2r} \sin^2(\angle \mathbf{r}, \mathbf{r}') \right]_{\max} \\ &\sim \frac{\pi D^2}{4\lambda r} \ll \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

<sup>74</sup>In der Nahzone  $r \lesssim \lambda \ll D$  sind die Kirchhoffintegrale aufgrund der Voraussetzungen für das kirchhoffsche Verfahren nicht brauchbar.

<sup>75</sup>Ein Zahlenbeispiel dazu:  $\lambda = 6000 \text{ \AA} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ ,  $D = 10^{-2} \text{ cm}$ ,  $r = 50 \text{ cm}$ .

Der dritte Term in der Entwicklung (2.313) und alle weiteren Terme können also vernachlässigt werden, und man hat

$$\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \approx \exp(ikr) \exp\left[-ik\left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}'\right)\right]. \quad (2.314)$$

Setzen wir die Näherungen (2.312), (2.314) in Gl. (2.309) ein und berücksichtigen wir noch, dass auf  $\mathcal{F}$  die Beziehung  $d\mathbf{f}' = -\mathbf{e}_z dx' dy'$  gilt, so erhalten wir<sup>76</sup>

$$\varphi_c(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.315)$$

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) \approx -\mathbf{a}\left[\left(\mathbf{n}^{(e)} + \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \cdot \mathbf{e}_z\right] \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \iint_{\mathcal{F}} dx' dy' \exp\left[ik\left(\mathbf{n}^{(e)} - \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \cdot \mathbf{r}'\right]_{z'=0}. \quad (2.316)$$

Mit den in der Beugungstheorie üblichen Bezeichnungen<sup>77</sup>

$$\mathbf{n}^{(e)} = (\alpha, \beta, \gamma), \quad \frac{\mathbf{r}}{r} = (\alpha', \beta', \gamma') \quad (2.317)$$

hat man für die elektromagnetischen Potentiale

$$\varphi_c(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.318)$$

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) = -\mathbf{e} E_0^{(e)} \frac{e^{i(kr + \delta^{(e)})}}{4\pi r} (\gamma + \gamma') A(\alpha - \alpha', \beta - \beta'), \quad (2.319)$$

wobei

$$A(\alpha - \alpha', \beta - \beta') := \iint_{\mathcal{F}} dx' dy' e^{ik[(\alpha - \alpha')x' + (\beta - \beta')y']} \quad (2.320)$$

als *Interferenzfunktion* bzw. als Amplitudenfunktion bezeichnet wird.

Wir berechnen nun die „Lichtintensität“ auf einem kugelförmig gekrümmten Beobachtungsschirm B mit Radius  $r_0$ , wobei

$$\frac{r_0}{D} \gg \frac{D}{\lambda}$$

gelten muss.

<sup>76</sup>Das Zeichen  $\approx$  zeigt in der Folge jeweils einen Näherungsschritt an. Nach einem solchen schreiben wir wieder ein Gleichheitszeichen, damit man erkennen kann, wann ein weiterer Näherungsschritt erfolgt.

<sup>77</sup>Diese Bezeichnungen sind nicht ganz glücklich gewählt. Beachte, dass  $\alpha', \beta', \gamma'$  von  $x, y, z$  abhängen, während  $\alpha, \beta, \gamma$  vorgegebene Konstanten mit  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$  sind.

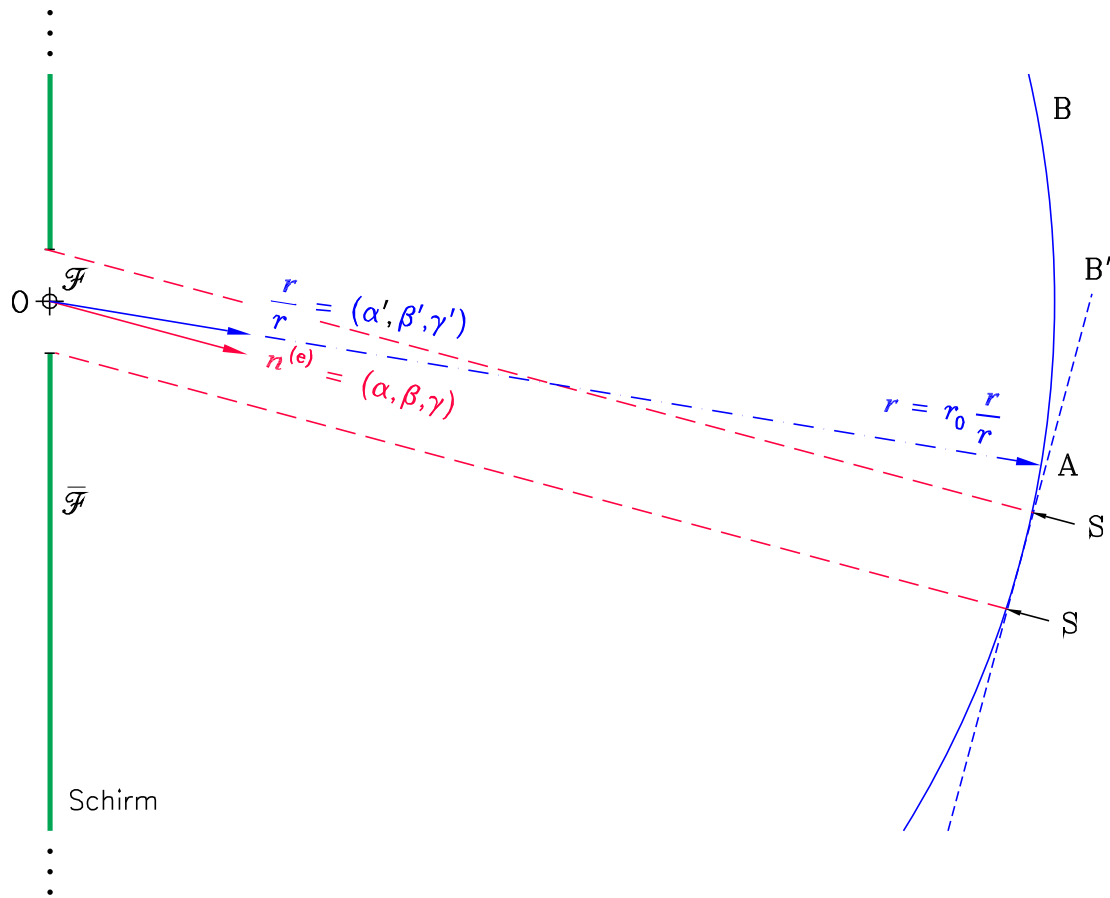


Abbildung 2.39: Beugungsschirm und Beobachtungsschirm

Da man sich im Experiment nur für Richtungen  $\frac{\mathbf{r}}{r}$  interessiert, welche nahe bei  $\mathbf{n}^{(e)}$  liegen<sup>78</sup>, kann man im Experiment als „Auffänger“ einen ebenen Schirm  $B'$  benutzen (siehe Abb. 2.39). Aus Gl. (1.301) und Gl. (2.247) erhalten wir

$$I\left(r_0 \frac{\mathbf{r}}{r}\right) = |\overline{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)}|_{|\mathbf{r}|=r_0} = \frac{c}{8\pi} |\operatorname{Re}[\mathbf{E}_c(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_c^*(\mathbf{r})]|_{|\mathbf{r}|=r_0} \quad (2.321)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}) &= -\mathbf{grad} \varphi_c(\mathbf{r}) + ik\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) \\ &= -\mathbf{e} E_0^{(e)} \frac{e^{i(kr+\delta^{(e)})}}{4\pi r} ik(\gamma + \gamma') A(\alpha - \alpha', \beta - \beta'), \end{aligned} \quad (2.322)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_c^*(\mathbf{r}) &= \mathbf{rot} \mathbf{A}_c^*(\mathbf{r}) \\ &\approx \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{e}\right) E_0^{(e)} \frac{e^{-i(kr+\delta^{(e)})}}{4\pi r} ik(\gamma + \gamma') A^*(\alpha - \alpha', \beta - \beta'), \end{aligned} \quad (2.323)$$

<sup>78</sup>Nur für solche Richtungen gibt es merkliche Abweichungen von der geometrischen Optik.

also

$$I\left(r_0 \frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{ck^2 E_0^{(e)2}}{8\pi} \frac{1}{(4\pi r_0)^2} (\gamma + \gamma')^2 \left| \mathbf{e} \times \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{e} \right) \right| |A(\alpha - \alpha', \beta - \beta')|^2. \quad (2.324)$$

Das modifizierte kirchhoffsche Verfahren liefert anstelle des Faktors  $(\gamma + \gamma')^2$  den Faktor  $(2\gamma')^2$ , sonst ist die Formel für die Intensität gleich.

Für jene Richtungen  $\frac{\mathbf{r}}{r}$ , für die es merkbliche Abweichungen von der geometrischen Optik gibt, für die also  $|A(\alpha - \alpha', \beta - \beta')|^2$  merklich von null verschieden ist, gilt

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \approx \mathbf{n}^{(e)}, \quad \text{also} \quad \gamma' \approx \gamma, \quad \mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \approx \mathbf{e} \cdot \mathbf{n}^{(e)} = 0 \quad (2.325)$$

und

$$\left| \mathbf{e} \times \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{e} \right) \right| = \left| \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}) \right| = \sqrt{\left[ \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}) \right]^2} = \sqrt{1 - (\mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r})^2} \approx 1. \quad (2.326)$$

Die Polarisationsabhängigkeit der Intensität ist also für diese Richtungen vernachlässigbar. *Außerhalb* dieses Winkelbereiches um die Einfallrichtung ist der Einfluss des Polarisationszustandes der einfallenden Welle auf den Intensitätsverlauf *nicht* vernachlässigbar. Das kirchhoffsche Verfahren liefert für diese Richtungen – für die die Intensität schon sehr klein ist – zwar eine Polarisationsabhängigkeit der Intensität, beschreibt sie aber nicht quantitativ richtig. Abgesehen von dieser Feinheit kann man jedoch sagen, dass das kirchhoffsche Verfahren einen Intensitätsverlauf liefert, welcher sehr gut mit dem experimentell gefundenen Intensitätsverlauf übereinstimmt.

Interessanter als die Intensität selbst ist das von der Intensität der „Lichtquelle“ unabhängige *Verhältnis der Intensitäten* für die variable Richtung  $\frac{\mathbf{r}}{r}$  und die feste Richtung  $\mathbf{n}^{(e)}$ . Für dieses Intensitätsverhältnis folgt im Rahmen der angeführten Näherungen sowohl für das kirchhoffsche Verfahren als auch für das modifizierte kirchhoffsche Verfahren

$$\frac{I\left(r_0 \frac{\mathbf{r}}{r}\right)}{I\left(r_0 \mathbf{n}^{(e)}\right)} \approx \left| \frac{A(\alpha - \alpha', \beta - \beta')}{A(0,0)} \right|^2. \quad (2.327)$$

Beachte: Die Größe  $A(0,0) = \iint_{\mathcal{F}} dx' dy'$  ist der Flächeninhalt der Öffnung (die Summe der Flächeninhalte der Öffnungen).

### Beispiele: Spalt und Doppelspalt

**Rechteckspalt** (s. Abb. 2.40): Mit  $A(0,0) = dh$  und

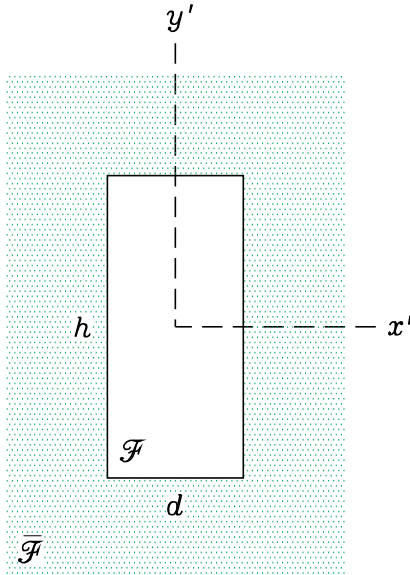


Abbildung 2.40: Beugungsschirm mit Rechtecköffnung

$$\begin{aligned}
 A(\alpha - \alpha', \beta - \beta') &= \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} dx' e^{ik(\alpha - \alpha')x'} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy' e^{ik(\beta - \beta')y'} \\
 &= \frac{\sin \frac{kd(\alpha - \alpha')}{2}}{\frac{k(\alpha - \alpha')}{2}} \frac{\sin \frac{kh(\beta - \beta')}{2}}{\frac{k(\beta - \beta')}{2}}
 \end{aligned} \tag{2.328}$$

folgt

$$\frac{I(r_0 \frac{r}{r})}{I(r_0 \mathbf{n}^{(e)})} = \left[ \frac{\sin \frac{kd(\alpha - \alpha')}{2}}{\frac{kd(\alpha - \alpha')}{2}} \right]^2 \left[ \frac{\sin \frac{kh(\beta - \beta')}{2}}{\frac{kh(\beta - \beta')}{2}} \right]^2. \tag{2.329}$$

Die Abbildung 2.41 zeigt den Verlauf der Funktion

$$\left( \frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2. \tag{2.330}$$

Interpretiert man dabei  $\xi$  als  $kd(\alpha - \alpha')/2$ , so stellt dies das Intensitätsverhältnis in Abhängigkeit von  $\alpha - \alpha'$  für  $\beta = \beta'$  dar. Bei senkrechtem Einfall der Strahlung auf den Beugungsschirm, d. h. für  $\alpha = \beta = 0$ , ist dies der Intensitätsverlauf längs der  $x$ -Achse. (Siehe dazu auch die Aufgabe E25.) Die Abbildung 2.42 zeigt das auf dem „Auffänger“ erzeugte Beugungsmuster.

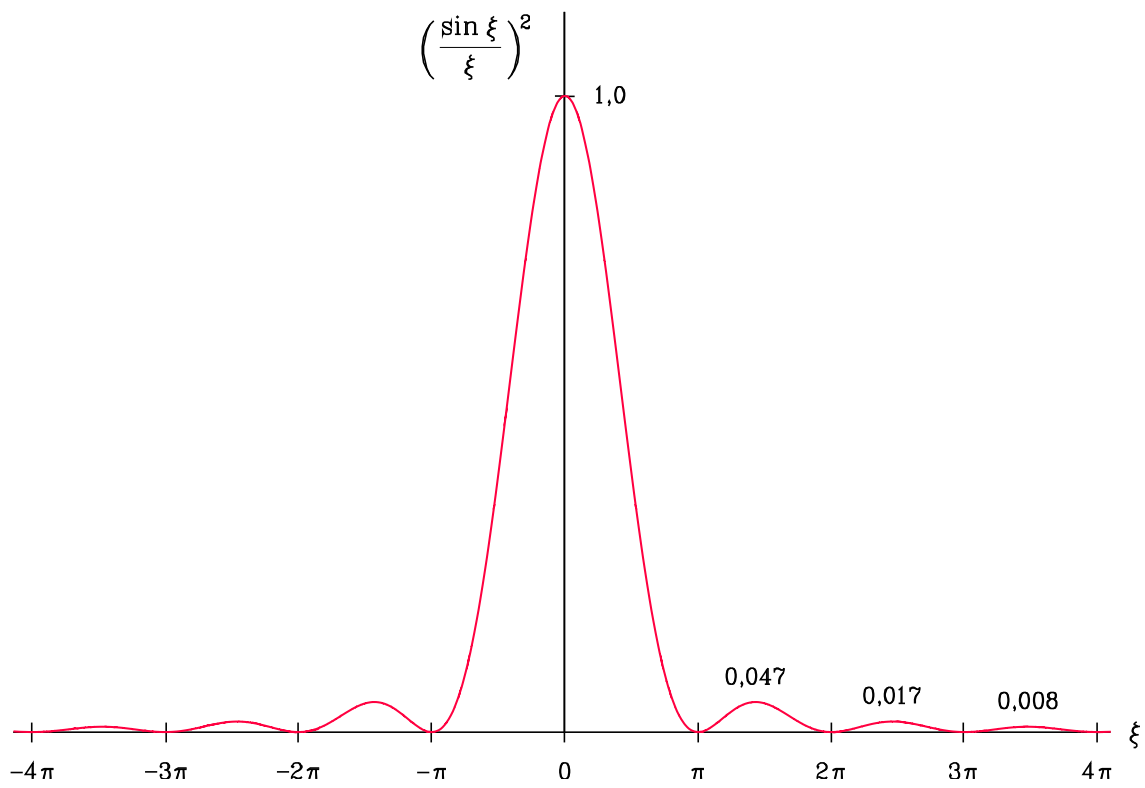


Abbildung 2.41: Die Funktion  $\left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2$

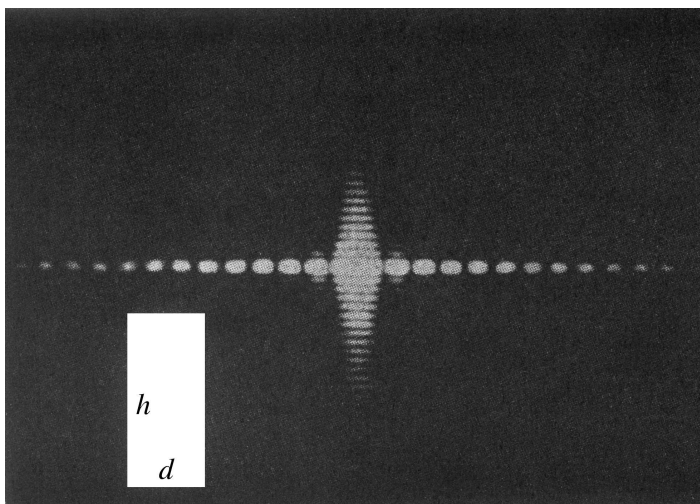


Abbildung 2.42: Beugungsmuster beim Rechteckspalt

**Doppel-Rechteckspalt** (s. Abb. 2.43): Mit  $A(0,0) = 2dh$  und

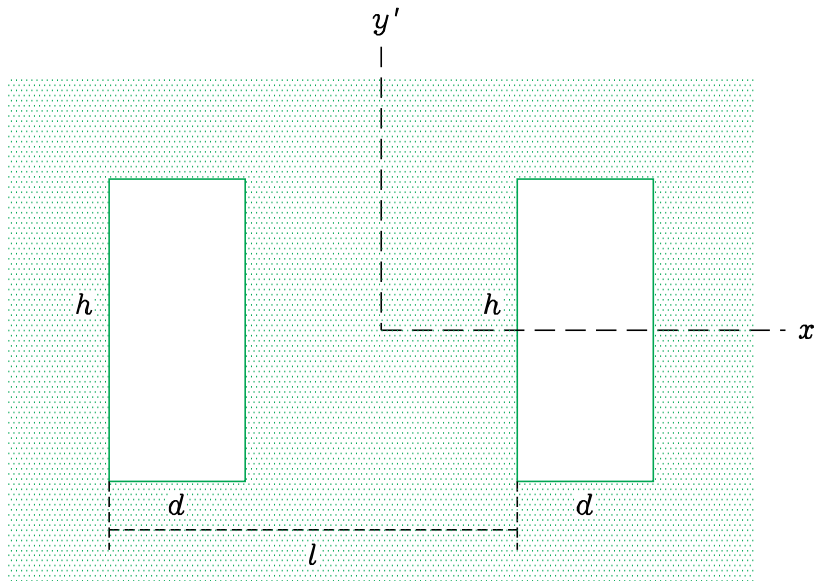


Abbildung 2.43: Beugungsschirm mit zwei Rechtecköffnungen

$$\begin{aligned}
 A(\alpha - \alpha', \beta - \beta') &= \left[ \underbrace{\int_{-\frac{l}{2}-\frac{d}{2}}^{-\frac{l}{2}+\frac{d}{2}} dx' e^{ik(\alpha-\alpha')x'}}_{\text{Subst.: } x = x' + \frac{l}{2}} + \underbrace{\int_{\frac{l}{2}-\frac{d}{2}}^{\frac{l}{2}+\frac{d}{2}} dx' e^{ik(\alpha-\alpha')x'}}_{\text{Subst.: } x = x' - \frac{l}{2}} \right] \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy' e^{ik(\beta-\beta')y'} \\
 &= 2 \cos \frac{kl(\alpha - \alpha')}{2} \underbrace{\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} dx e^{ik(\alpha-\alpha')x} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy' e^{ik(\beta-\beta')y'}}_{(A(\alpha - \alpha', \beta - \beta'))_{\text{Spalt}}}
 \end{aligned} \tag{2.331}$$

folgt

$$\frac{I(r_0 \frac{r}{r})}{I(r_0 \mathbf{n}^{(e)})} = \left[ \frac{I(r_0 \frac{r}{r})}{I(r_0 \mathbf{n}^{(e)})} \right]_{\text{Spalt}} \left( \cos \frac{kl(\alpha - \alpha')}{2} \right)^2. \tag{2.332}$$

Wegen  $l > d$  liegt das erste Minimum des Kosinusquadrat-Faktors bei kleinerem  $|\alpha - \alpha'|$  als das erste Minimum des Faktors

$$\left( \frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2, \quad \xi := \frac{kd(\alpha - \alpha')}{2}.$$

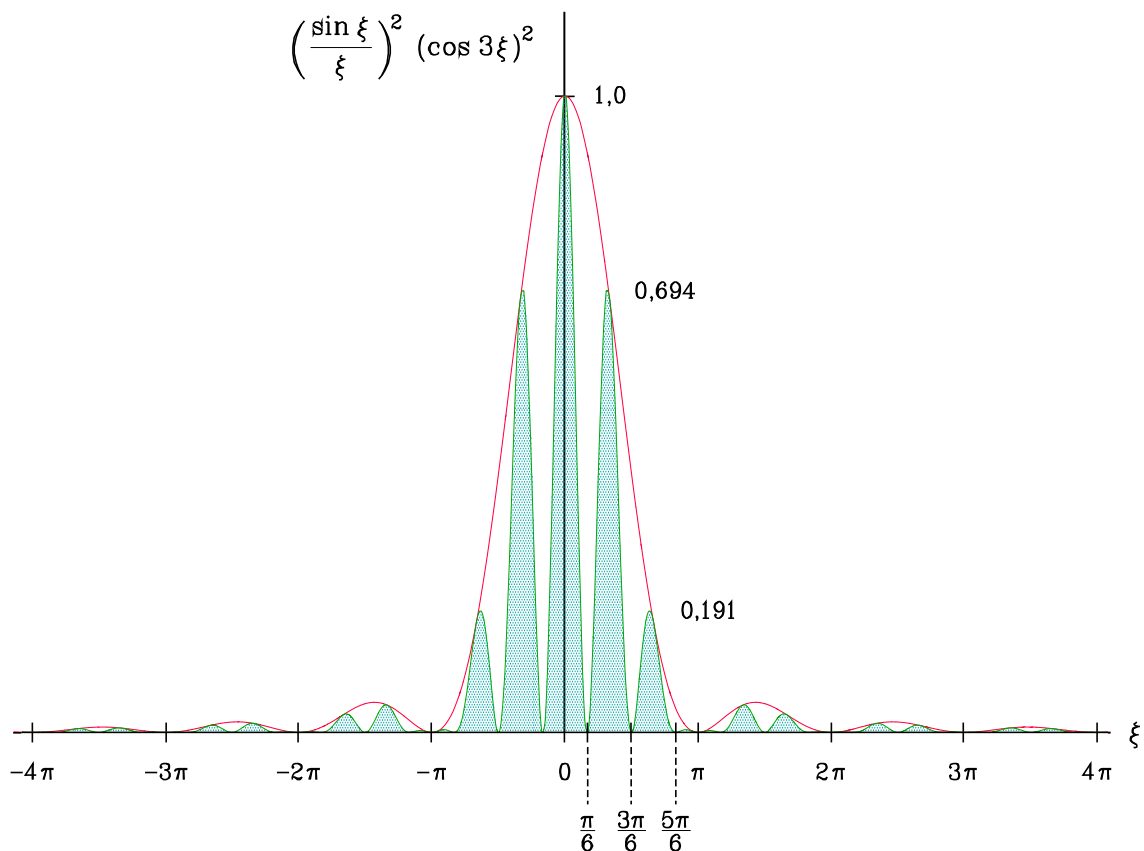


Abbildung 2.44: Die Funktion  $\left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2 (\cos 3\xi)^2$

Das Beugungsbild von Abb. 2.42 wird also von zusätzlichen in der Abbildung senkrecht verlaufenden dunklen Streifen zerteilt. Betrachten wir den Fall  $l = 3d$ . Die Abbildung 2.44 zeigt den Verlauf der Funktion

$$\left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2 (\cos 3\xi)^2. \quad (2.333)$$

Interpretiert man dabei  $\xi$  als  $kd(\alpha - \alpha')/2$ , so stellt dies das Intensitätsverhältnis in Abhängigkeit von  $\alpha - \alpha'$  für  $\beta = \beta'$  dar. Bei senkrechtem Einfall der Strahlung auf den Beugungsschirm, d. h. für  $\alpha = \beta = 0$ , ist dies der Intensitätsverlauf längs der  $x$ -Achse. (Siehe dazu auch die Aufgabe E26.) Wegen  $(\cos 3\xi)^2 \leq 1$  ist die Funktion (2.330), welche für  $\beta = \beta'$  den Intensitätsverlauf für den Einzelspalt angibt, Hüllkurve der Funktion (2.333), welche für  $\beta = \beta'$  den Intensitätsverlauf für den Doppelspalt angibt.



## Aufgaben zur Elektrodynamik

**E1** Zeige, dass die Determinante der Transformationsmatrix  $L = (L_{\alpha}^{\mu'})$  für eine beliebige homogene Lorentztransformation

$$x^{\mu'} = L_{\alpha}^{\mu'} x^{\alpha}$$

den Wert eins besitzt.

Anleitung: Verifiziere, dass für beliebige räumliche Drehungen  $\det L_D = 1$  und für beliebige Standard-Lorentztransformationen  $\det L_{St} = 1$  ist. Eine allgemeine homogene Lorentztransformation lässt sich – wie aus der Relativitätstheorie bekannt ist – stets aus einer räumlichen Drehung, einer Standard-Lorentztransformation und einer weiteren räumlichen Drehung zusammensetzen, wobei  $L = L_{D_2} L_{St} L_{D_1}$  gilt (Matrizenprodukt). Nach den Regeln der Determinantenrechnung folgt dann  $\det L = \det L_{D_2} \det L_{St} \det L_{D_1}$ .

**E2** Eine Punktladung  $q$  bewege sich relativ zu einem Inertialsystem  $I$  gleichförmig geradlinig nach dem Bewegungsgesetz

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t, \quad \mathbf{v}_0 = (v_0, 0, 0).$$

In dem zu  $I$  in Standardkonfiguration befindlichen dauernden Ruhesystem  $\tilde{I}$  der Ladung befindet sich diese im Ursprung. Ladungs- und Stromdichte in  $\tilde{I}$  sind daher durch

$$\tilde{\rho}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) = q \delta(\tilde{\mathbf{r}}), \quad \tilde{\mathbf{j}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) = \mathbf{0}$$

gegeben. Berechne mithilfe des Transformationsgesetzes der Viererstromdichte bei Standard-Lorentz-Transformationen Ladungs- und Stromdichte im Inertialsystem  $I$ .

Hinweis: Das Ergebnis muss natürlich

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_0 \rho(\mathbf{r}, t)$$

lauten. Um dieses Ergebnis zu erhalten, muss man unter anderem  $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$  und  $\delta(\alpha \xi) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(\xi)$  benutzen.

**E3** Für den in Aufgabe [E2](#) betrachteten Fall liegt in  $\tilde{I}$  ein rein elektrostatisches Coulombfeld vor, d. h. die elektromagnetischen Potentiale und Feldstärken sind durch

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) &= \frac{q}{\tilde{r}}, & \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) &= \mathbf{0}, \\ \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) &= \frac{q \tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}^3}, & \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

gegeben. Berechne mithilfe des Transformationsgesetzes der Potentiale und Feldstärken bei Standard-Lorentz-Transformationen die Potentiale und Feldstärken im Inertialsystem I und bringe das Ergebnis mit

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{r} - \mathbf{r}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t, \quad \cos \alpha(\mathbf{r}; t) := \frac{\mathbf{R}(\mathbf{r}; t) \cdot \mathbf{v}_0}{R(\mathbf{r}; t) v_0}$$

auf die Form

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{R(\mathbf{r}; t) \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2} \sin^2 \alpha(\mathbf{r}; t)}}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}_0}{c} \varphi(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q \mathbf{R}(\mathbf{r}; t) \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)}{[R(\mathbf{r}; t)]^3 \left[1 - \frac{v_0^2}{c^2} \sin^2 \alpha(\mathbf{r}; t)\right]^{3/2}}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}_0}{c} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

Begründe, warum diese Formeln für  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  auch gelten, wenn  $\mathbf{v}_0$  eine allgemeine Richtung besitzt. Begründe ferner, warum sie auch für eine Anfangslage  $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{0}$  des Teilchens gelten müssen, sofern man

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}; t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t$$

einsetzt.

Bemerkung: Das elektromagnetische Feld in I nennt man *konvektives Coulombfeld*.

#### E4

- (a) Löse die relativistische Bewegungsgleichung (1.163) für den Fall des homogenen elektrostatischen Feldes

$$\mathbf{E}^{(\text{ex})} = (E^{(\text{ex})}, 0, 0)$$

und die Anfangsbedingungen

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$$

(„longitudinales Feld“).

- (b) Zeichne unter den Annahmen  $q > 0$ ,  $E^{(\text{ex})} > 0$ ,  $v_0 > 0$  und  $v_0 \ll c$  ein Diagramm für  $v_x(t)$  und vergleiche mit dem Ergebnis der „nichtrelativistischen Mechanik“ (Newtongleichung mit Lorentzkraft).

#### E5

Verifiziere, dass

$$\square \frac{\delta(t \mp \frac{r}{c})}{r} = 4\pi \delta(\mathbf{r}) \delta(t)$$

gilt, womit gezeigt ist, dass die Funktionen (1.192) Partikulärlösungen von Gl. (1.193) sind.

Anleitung: Beweise zuerst, dass für  $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ ,  $t \neq 0$  die Beziehung  $\square \frac{\delta(t \mp \frac{r}{c})}{r} = 0$  gilt. Verwende dabei die Form des Laplaceoperators in Kugelkoordinaten. Zeige hierauf unter Benützung des gaußschen Satzes und der Beziehung  $\Delta = \text{div grad}$ , dass

$$\int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathcal{K}(\varepsilon)} d^3r \square \frac{\delta(t \mp \frac{r}{c})}{r} = 4\pi$$

gilt, wobei  $\mathcal{K}(\varepsilon)$  ein Kugelbereich vom Radius  $\varepsilon$  um den Ursprung ist.

**E6** Für ein gleichförmig geradlinig bewegtes Teilchen gilt

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t, \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0, \quad \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{0}.$$

Die Gleichung

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}{c} = t - \frac{\overbrace{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t + \mathbf{v}_0(t - t')|}^{\mathbf{R}(\mathbf{r}; t)}}{c}$$

lässt sich durch Quadrieren von

$$t - t' = \frac{|\mathbf{R}(\mathbf{r}; t) + \mathbf{v}_0(t - t')|}{c}$$

explizit nach  $t'$  auflösen, womit man  $t' = t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t)$  erhält. Führe diese Auflösung durch und zeige, dass das Einsetzen von  $t_{\text{ret}}(\mathbf{r}, t)$  in die Liénard-Wiechert-Felder wieder auf die Formeln von Aufgabe [E3](#) führt.

**E7**

(a) Zeige, dass sich für  $v(t) \ll c$  aus der Beziehung [\(1.249\)](#)

$$\frac{d^2 U_{\text{rad}}(t, \Omega)}{dt d\Omega} \approx \frac{q^2 \dot{\mathbf{v}}^2(t)}{4\pi c^3} \sin^2 \theta(t) \tag{E7-1}$$

ergibt, wobei  $\theta(t)$  den Winkel zwischen  $\mathbf{n}$  und  $\dot{\mathbf{v}}(t)$  bedeutet. Zeige ferner: In diesem Fall folgt aus der Beziehung [\(1.258\)](#)

$$\frac{dU_{\text{rad}}(t)}{dt} \approx \frac{2q^2 \dot{\mathbf{v}}^2(t)}{3c^3}. \tag{E7-2}$$

(b) Leite Gl. [\(E7-2\)](#) aus Gl. [\(E7-1\)](#) durch Integration über alle Richtungen  $\mathbf{n} \hat{=} \Omega$  ab.

Anleitung zu (b): Für die Integration wählt man zweckmäßigerweise die für festes  $t$  feste Richtung von  $\dot{\mathbf{v}}(t)$  als Polarachse.

**E8** Leite aus den homogenen Maxwellgleichungen (1.264) bis (1.267) die Wellengleichungen (1.269), (1.270) für die kartesischen Komponenten von  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  ab.

Hinweis: Beachte die Fußnote von Seite 21.

**E9** Untersuche den Polarisationszustand der monochromatischen ebenen Welle Gleichung (1.293), (1.294) speziell für die Fälle

$$\chi := \delta_2 - \delta_1 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

und verifiziere auf diese Weise die diesbezüglichen Aussagen von Abb. 1.28.

Anleitung: Für die Rechnung ist es zweckmäßig, das Koordinatensystem so zu wählen, dass  $\mathbf{e}_1$  in  $x$ -Richtung,  $\mathbf{e}_2$  in  $y$ -Richtung und  $\mathbf{n}$  in  $z$ -Richtung zeigt. Verwende ferner die Abkürzung  $\xi := \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(k)t$ , benütze für die Komponenten von  $\mathbf{E}$  das Additionstheorem der Winkelfunktionen und eliminiere mithilfe von  $\sin^2 \xi + \cos^2 \xi = 1$  die Größe  $\xi$ .

**E10** Beweise ausgehend von Gl. (1.301) und der Formel (1.71) für den Poyntingvektor, dass die Intensität der monochromatischen ebenen Welle Gl. (1.293), (1.294) durch Gl. (1.302) gegeben ist.

Anleitung: Verwende das Additionstheorem

$$\cos[\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_\alpha] = \cos[\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r} + \delta_\alpha] \cos \omega t + \sin[\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r} + \delta_\alpha] \sin \omega t.$$

Bemerkung: In Aufgabe E19 wird die analoge Aufgabenstellung für eine monochromatische ebene Welle in einem nichtdissipativen Medium mithilfe einer eleganteren Methode, der komplexen Schreibweise, behandelt.

**E11** Mache für die homogenen Maxwellgleichungen den komplexen Lösungsansatz

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B}_c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

wobei  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$  gilt,  $\mathbf{n}$  ein vorgegebener reeller Einheitsvektor ist und  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  konstante komplexe Vektoren sind.

Welche Bedingungen müssen die Amplitudenvektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  erfüllen und welche Beziehung muss zwischen  $k$  und  $\omega$  bestehen (Dispersionsbeziehung  $\omega = \omega(k)$ ), damit der Ansatz die homogenen Maxwellgleichungen löst?

Hinweis: Beachte, dass im Zusammenhang mit dem Ansatz

$$\nabla \rightarrow i\mathbf{k} \quad (\text{„in“ oder „ex“}), \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

gilt.

**E12** Ein geladenes Teilchen führe eine beliebige nichtrelativistische periodische Bewegung mit der Periode  $T$  aus. Zeige, dass dann die Beziehung (1.261) erfüllt ist, wenn die zeitliche Mittelung über die Periode  $T$  durchgeführt wird.

Anleitung: Beweise diese Aussage mittels partieller Integration.

**E13** Zeige, dass die Beziehungen (2.102) bis (2.105) dann und nur dann widerspruchsfrei sind, wenn

$$k^2 = \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}$$

gilt.

**E14** Leite aus

$$k(\omega) = k'(\omega) + ik''(\omega) = \sqrt{\varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)} \frac{\omega}{c} = \sqrt{\varepsilon(\omega)} \frac{\omega}{c}$$

(Hauptwert der Wurzel) die Formeln (2.113), (2.114) für  $k'(\omega)$ ,  $k''(\omega)$  ab.

**E15** Berechne Phasengeschwindigkeit und Eindringtiefe einer monochromatischen ebenen Welle mithilfe der Beziehungen (2.115) und (2.116) für folgende Fälle:

- (a)  $\omega = 6 \cdot 10^{15}$  Hertz,  $\varepsilon' = 6$ ,  $\varepsilon'' = 0,5$ ;
- (b)  $\omega = 6 \cdot 10^{14}$  Hertz,  $\varepsilon' = 4$ ,  $\varepsilon'' = 10^{-4}$ .

**E16** Welche Beziehungen müssten für  $\omega_1, \omega_2, \sqrt{\varepsilon(\omega_1)}, \sqrt{\varepsilon(\omega_2)}$  bei Vorhandensein von Dispersion *zufällig* bestehen, damit eine aus zwei monochromatischen ebenen Teilwellen mit den Kreisfrequenzen  $\omega_1, \omega_2$  (und gleicher Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$ ) zusammengesetzte ebene Welle zeitlich und räumlich periodisch wäre? Wodurch wären zeitliche Periode  $T$  und Wellenlänge  $\lambda$  einer solchen Welle gegeben?

**E17** Drücke den durch  $\alpha + \alpha'' = \frac{\pi}{2}$  definierten Brewsterschen Winkel  $\alpha = \alpha_B$  durch den Brechungsindex  $n_{12}$  aus.

**E18** Beweise die Formel (2.247).

Anleitung: Benütze die Zerlegung

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\alpha}_1(\mathbf{r}) + i\boldsymbol{\alpha}_2(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{B}_c(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{r}) + i\boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{r})$$

( $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  reellwertig).

**E19** Zeige, dass aus Gl. (2.247) für eine monochromatische ebene Welle mit reellem Ausbreitungsvektor  $\mathbf{n}$  und komplexem Amplitudenvektor  $\mathbf{a}$  in einem Medium mit reellem  $\varepsilon(\omega)$  für den zeitgemittelten Poyntingvektor der ortsunabhängige Ausdruck

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon(\omega)} |\mathbf{a}|^2 \mathbf{n}$$

folgt ( $|\mathbf{a}|^2 := \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^*$ ).

**E20** Schreibe die  $z$ -Komponente des zeitgemittelten Poyntingvektors im Medium 1

$$\bar{S}_1 = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_{c,1} \times \mathbf{B}_{c,1}^*)$$

an und zeige damit, dass die Beziehung (2.254) gilt, dass also die  $z$ -Komponente des zeitgemittelten Poyntingvektors *keine Interferenzterme* enthält.

**E21** Zeige anhand von Zahlenbeispielen, dass für realistische Werte  $n_{12} < 1$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{n_{12}}{\sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}}$$

von der Größenordnung eins ist, sobald der Einfallswinkel  $\alpha$  einige Winkelminuten größer ist als der Grenzwinkel  $\alpha_T$ .

**E22** Zeige, dass die elektrische Feldstärke, die Phasengeschwindigkeit und die Eindringtiefe für das Medium 2 beim „Durchgang“ von  $\alpha$  durch  $\alpha_T$  stetig sind.

Anleitung: Betrachte die Grenzfälle  $\alpha \uparrow \alpha_T$  und  $\alpha \downarrow \alpha_T$ .

**E23** Verifiziere, dass

$$\{\Delta + k^2\} \frac{e^{ikr}}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r})$$

gilt, womit gezeigt ist, dass die Funktion von Gl. (2.290) eine spezielle greensche Funktion des Helmholtzoperators  $\Delta + k^2$  ist.

Anleitung: Beweise zuerst, dass für  $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$  die Beziehung  $\{\Delta + k^2\} \frac{e^{ikr}}{r} = 0$  gilt. Verwende dabei die Form des Laplaceoperators in Kugelkoordinaten.

Zeige hierauf unter Benützung des gaußschen Satzes und der Beziehung  $\Delta = \text{div grad}$ , dass

$$\int_{\mathcal{K}(\varepsilon)} d^3r \{\Delta + k^2\} \frac{e^{ikr}}{r} = -4\pi$$

gilt, wobei  $\mathcal{K}(\varepsilon)$  ein Kugelbereich vom Radius  $\varepsilon$  um den Ursprung ist.

**E24** Verifiziere, dass die Potentiale  $\varphi_c^{(e)}, \mathbf{A}_c^{(e)}$  von Gl. (2.307) Partikulärlösungen der Feldgleichungen

$$\Delta \varphi_c(\mathbf{r}) + k^2 \varphi_c(\mathbf{r}) = 0,$$

$$\Delta \mathbf{A}_c(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{A}_c(\mathbf{r}) = \mathbf{0},$$

$$\text{div} \mathbf{A}_c(\mathbf{r}) - ik \varphi_c(\mathbf{r}) = 0$$

sind, und man aus ihnen mithilfe der Formeln (2.282), (2.283) die Feldstärken von Gl. (2.305) erhält.

**E25** Auf einen Beugungsschirm mit einem Rechteckspalt der Breite  $d = 10^{-2}$  cm (siehe Abb. 2.40) fällt eine ebene Welle mit der Wellenlänge  $\lambda = 6000 \text{ \AA} = 6 \cdot 10^{-5}$  cm senkrecht ein, d. h. es gilt  $\mathbf{n}^{(e)} = (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ .

- (a) Berechne für einen im Abstand  $r_0 = 50$  cm vom Beugungsschirm aufgestellten, zu diesem parallelen Beobachtungsschirm die Lage des ersten und des zehnten Minimums in  $x$ -Richtung, d. h. für  $\beta' = 0$ .

- (b) Berechne für das zehnte Minimum in  $x$ -Richtung den Vektor  $\frac{\mathbf{r}}{r} = (\alpha', 0, \gamma')$  und überprüfe die Brauchbarkeit der Näherungen (2.325), (2.325).
- (c) Mache eine maßstabsgetreue Zeichnung von Beugungsschirm und Auffänger und trage die Lage des zehnten Minimums in  $x$ -Richtung sowie die geometrische Schattengrenze ein.
- (d) Zeichne auf einer  $x$ -Achse maßstabsgetreu die Lage des ersten Minimums in  $x$ -Richtung sowie die geometrische Schattengrenze ein.

**E26** Löse die zu Aufgabe E25 analoge Aufgabe für einen Beugungsschirm mit Doppelspalt (siehe Abb. 2.43) für den Fall  $l = 3d$ .





# Sachverzeichnis zur Elektrodynamik

Sind bei einem Indexeintrag mehrere Skriptumstellen angeführt, so verweisen allfällige schräg gestellte Seitenzahlen auf die *wichtigsten* Stellen für den betreffenden Eintrag.

## A

- Abraham-Lorentz-Modell der „physikalischen Punktladung“ 106–109  
abrahamsche Strahlungsrückwirkungskraft *siehe* Strahlungsrückwirkungskraft  
Absorption, Resonanz- 132, 138, 139  
ampèresches Gesetz oder Verkettungsgesetz 14  
Anschlussbedingungen *siehe* Grenzbedingungen  
Arbeitssatz für eine Punktladung *siehe* Bewegung einer Punktladung  
Ausbreitung elektromagnetischer Wellen  
  im Vakuum 54, 89  
  in einem Medium 137–139  
Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen  
  durch beschleunigt bewegte Punktladungen 34, 55, 78–88  
  gesamte Ausstrahlungsleistung 85  
  Winkelverteilung 83, 86–88  
  durch gegebene Quellverteilungen 79  
Ausstrahlungsbedingung 69, 183  
avancierte Potentiale *siehe* Potentiale, elektromagnetische
- ## B
- „Beschleunigungsfeld“ einer Punktladung 78  
Beugung elektromagnetischer Felder an undurchdringlichen Hindernissen 182–184  
  Beugungstheorie im engeren Sinn 184–185  
  Fraunhoferbeugung 193–196  
    am Doppelspalt 199–200  
    am Rechteckspalt 197–198  
  huygenssches Prinzip 190  
  kirchhoffsches Verfahren für ebene Beugungsschirme 187–191  
  Kirchhoffintegrale 190  
  kirchhoffsche Annahmen 187–189  
  kirchhoffsche Identitäten 187  
  modifizierte Kirchhoffintegrale 191  
  mathematischer Hilfssatz zur Helmholtzgleichung 185–186  
  stationäre Beugungstheorie 183–184  
bewegte Punktladung, elektromagnetisches Feld 71–76  
Bewegung einer Punktladung  
  in einem allgemeinen elektromagnetischen Feld 54–57  
  in einem homogenen elektrostatischen Feld 58–60  
  in einem homogenen magnetostatischen Feld 60–62  
  in einem homogenen statischen elektromagnetischen Feld 57–58  
Bewegungsgleichungen  
  in der Maxwell-Lorentz-Theorie 5, 26, 102–106  
  vorläufige 27  
  in Viererschreibweise 50, 105  
  Lorentz-Abraham-Dirac-Gln. 102  
  Spohngleichungen 105  
  in der newtonschen Gravitationstheorie 29

Bewegungsgleichung für eine Punktladung  
*siehe* Bewegung einer Punktladung  
Bewegungsumkehr-Transformation in der  
Elektrodynamik 71  
Brechung *siehe* Reflexion und Brechung bzw.  
Totalreflexion  
brewsterscher Winkel 172–173

### C

Coulombeichung 21  
Coulombfeld  
elektrostatisches 63, 77  
konvektives 77  
verallgemeinertes 78  
Coulombpotential 19, 63, 77  
coulombsches Gesetz 14

### D

Diamagnetika 130  
dielektrische Verschiebung *siehe* makrosko-  
pische Elektrodynamik, Hilfsfeld **D**  
Dielektrizitätsfunktion, komplexwertige  
135–137, 139, 142  
für NaCl 136  
Dielektrizitätskonstante, statische 130  
Dipolmoment  
elektrisches 122, 123, 128  
magnetisches 122, 123, 128  
Dispersion der elektrischen Suszeptibilität  
132–137  
Oszillatormodell 132  
Dispersionsbeziehung  
für elektromagnetische Wellen im Medi-  
um 140  
für elektromagnetische Wellen im Vaku-  
um 94  
Drehimpulsdichte und Drehimpuls-  
stromdichte des elektromagne-  
tischen Feldes im Vakuum 38  
Drehimpulserhaltung in der Maxwell-  
Lorentz-Theorie 38

### E

Eichfunktionen 21, 22, 23  
Eichinvarianz 21

Eichtheorien 21  
Eichtransformationen 21–23  
Eichung  
Coulomb- 21  
Lorenz- 22, 67  
Einstein-de Broglie-Beziehungen 94  
elektrische Leiter 131, 136  
ideale 150, 182  
elektrische Leitfähigkeit *siehe* Gleichstrom-  
leitfähigkeit  
elektrische Verschiebung *siehe* makroskopi-  
sche Elektrodynamik, Hilfsfeld **D**  
Elektrodynamik kontinuierlicher Medien *sie-*  
*he* makroskopische Elektrodynamik  
elektromagnetische Wellen im Medium  
ebene Wellen in „transparenten Medi-  
en“  
Wellenpakete 147  
ebene Wellen in transparenten Medien  
aperiodische 146  
monochromatische 144  
gedämpfte monochromatische ebene  
Wellen 142–143  
Eindringtiefe 143  
Phasengeschwindigkeit 143  
inhomogene Wellen 141, 166, 171, 179  
komplexe Schreibweise 140  
Phasen-, Gruppen-, Front-, Energie-  
transport- und Signalgeschwin-  
digkeit 138–139  
„Vorläufer“ 139  
zerfließende, gedämpfte und verzerrte  
Wellen 137–138  
elektromagnetische Wellen im Vakuum  
Ausbreitung 54, 89  
Ausbreitungsgeschwindigkeit 8  
ebene Wellen 90–93  
aperiodische 93, 98  
monochromatische 93–97  
periodische 93, 97  
Transversalität 92  
experimentell erforschter Frequenzbe-  
reich 94–95  
komplexe Schreibweise 99–101

- sichtbarer Spektralbereich 94
- Wellenpakete 98
- Energiedichte
  - des elektromagnetischen Feldes im Medium 157–158
  - bei vernachlässigbarer Dispersion 146, 158
  - des elektromagnetischen Feldes im Vakuum 32
  - einer ebenen elektromagnetischen Welle im Vakuum 93
- Energieerhaltung in der Maxwell-Lorentz-Theorie 31
- Energiestromdichte
  - des elektromagnetischen Feldes im Medium 145, 155–156, 158
  - des elektromagnetischen Feldes im Vakuum 32
  - einer ebenen elektromagnetischen Welle im Vakuum 93
- Erhaltung der elektrischen Ladung 12–14
  
- F**
- faradaysches Induktionsgesetz 14
- Feld, elektromagnetisches
  - einer beliebig bewegten Punktladung 71–76
  - einer beschleunigt bewegten Punktladung 77–79
  - einer gleichförmig geradlinig bewegten Punktladung 77
  - einer ruhenden Punktladung 77
- Feldgleichungen, makroskopische 113, 116
  - Herleitung aus den mikroskopischen Feldgleichungen durch räumliche Mittelung 118–127
- Feldgleichungen, mikroskopische
  - für das elektromagnetische Feld 5, 14, 26, 53
  - für die elektromagnetischen Potentiale 21
  - für die Potentiale in Lorenzform 22
  - in Integralform 17
  - in Viererschreibweise 50, 105
- Lorentzkovarianz 44
  - quellenfreie 89
  - Zeitumkehrinvarianz 71
- „Feldinvarianten“ des elektromagnetischen Feldes 45
- Feldtensor des elektromagnetischen Feldes im Vakuum 49–51
- Feldtheorien 9
- Fernwirkungstheorien
  - instantane 8
  - retardierte 8
- Fernzone 193
- Flächendivergenz eines Vektorfeldes in einem Flächenpunkt 151
- Flächenladungs- und Flächenstromverteilungen, elektrische 147
- Flächenladungs- und Flächenstromverteilungen, elektrische 150
- Flächenladungsdichte, elektrische 149, 152–153
- Flächenrotor eines Vektorfeldes in einem Flächenpunkt 151
- Flächenstromdichte, elektrische 149
- Forminvarianz *siehe* Kovarianz
- freie elektrische Ladungsdichte der Materie 114, 127, 130–131
  - Definition 123
- fresnelsche Formeln 171, 171, 176, 177
  
- G**
- Galileitransformationen 8
- „Geschwindigkeitsfeld“ einer Punktladung 78
- Gleichstromleitfähigkeit 129, 130, 136
- Gravitationstheorie 3
  - einsteinsche 7, 15
  - newtonsche 6, 8, 28–29
  - Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen 29
- Gravitationswellen 8, 10
- greensche Funktionen
  - des d’Alembertoperators 67–68
  - des Helmholtzoperators 185
  - des Laplaceoperators 64

Grenzbedingungen für die makroskopischen elektromagnetischen Felder [147–151](#), [161](#), [176](#)  
Herleitung für ebene Grenzflächen [151–155](#)  
Grenzwinkel der Totalreflexion [163](#)

## I

Impulsdichte  
des elektromagnetischen Feldes im Vakuum [36](#)  
einer ebenen elektromagnetischen Welle im Vakuum [93](#)  
Impulserhaltung in der Maxwell-Lorentz-Theorie [35](#)  
Impulsstromdichte des elektromagnetischen Feldes im Vakuum [37](#)  
Induktionsterm [16](#), [17](#)  
Inertialsysteme [6](#)  
Homogenität der Zeit [29](#)  
Homogenität und Isotropie des Bezugsraumes [29](#)  
in Standardkonfiguration [7](#)  
„raumzeitlich lokale“ [7](#)  
raumzeitlich unendliche [6](#)  
Influenz [182](#)  
inneres Produkt von Vierervektoren [42](#)  
Intensität monochromatischer elektromagnetischer Wellen [97](#)  
für ebene Wellen im Vakuum [97](#)  
für ebene Wellen in „transparenten Medien“ [145](#)

## J

joulesche Wärme [129](#), [133](#), [157](#)  
joulesche Wärmeleistungsdichte [157](#), [158](#)

## K

komplexe Schreibweise in der Elektrodynamik [99–101](#), [140](#)  
Kontinuitätsgleichung in der Elektrodynamik [14](#), [16](#), [53](#), [114](#)  
in Viererschreibweise [43](#)  
Kovarianz [6](#), [26](#), [39](#), [44](#), [48](#)  
Kraftgesetz

in der Maxwell-Lorentz-Theorie [5](#), [23–25](#)  
vorläufiges [27](#)  
in Viererschreibweise [50](#)  
Lorentz-Abraham-Kraft [25](#)  
in der newtonschen Gravitationstheorie [29](#)

Kreiswellenzahl-Vierervektor für monochromatische ebene Wellen im Vakuum [94](#)

Kreiswellenzahlvektor  
für monochromatische ebene oder inhomogene Wellen im Medium [140](#)  
für monochromatische ebene Wellen im Vakuum [94](#)

## L

Ladung, elektrische  
Diskretheit [12](#), [15](#)  
Erhaltung [12–14](#)  
Lorentzinvarianz [13](#), [40](#)  
Ladung, magnetische *siehe* magnetische Monopole  
Ladungsdichte, elektrische [11](#)  
Larmorsche Formel für die gesamte Ausstrahlungsleistung [86](#)  
Leiter, elektrische [131](#), [136](#)  
ideale [150](#), [182](#)  
Leitfähigkeit *siehe* Gleichstromleitfähigkeit  
Leitungsstromdichte der Materie, elektrische [114](#), [127](#)  
Definition [123](#)  
Liénard-Wiechert-Feld [76](#)  
Liénard-Wiechert-Potentiale [74](#)  
„Lichthaut“ im Medium 2 bei Totalreflexion [166](#), [180–181](#)  
Phasengeschwindigkeit [179](#)  
Eindringtiefe [179](#)  
Lorentz-Abraham-Kraft [25](#)  
Lorentzkovarianz *siehe* Kovarianz  
Lorentzkraft [23–24](#), [27](#), [50](#)  
Vierer- [48](#)  
Lorentztransformationen, allgemeine [6](#)  
der Raumzeitkoordinaten [40](#)  
der Viererstromdichte [42](#)

des Viererpotentials 43  
 Lorentztransformationen, Standard-  
 der elektromagnetischen Feldstärken 45  
 der elektromagnetischen Potentiale 43  
 der elektromagnetischen Queldichten  
 42  
 der Kraft 47  
 der Raumzeitkoordinaten 9  
 der Teilchengeschwindigkeit 48  
 der Viererstromdichte 42  
 Lorenzzeichnung 22, 67  
 Feldgleichungen für die Potentiale 22  
 Lorenzkonvention 21, 23  
 in Viererschreibweise 43

### M

magnetische Induktion *siehe* makroskopi-  
 sche Elektrodynamik, Hilfsfeld **H**  
 magnetische Monopole 15  
 magnetische Verschiebung *siehe*  
 makroskopische Elektrodynamik,  
 Hilfsfeld **H**  
 Magnetisierung *siehe* Polarisationsfeld der  
 Materie, magnetisches  
 Magnetisierungsstromdichte der Materie  
 114  
 makroskopische Elektrodynamik 111–116  
 Definition der makroskopischen  
 Feldstärken 119  
 Grundgleichungen *siehe* Feldgleichun-  
 gen, makroskopische und *siehe*  
 Materialgleichungen  
 Hilfsfelder **D**, **H** 115  
 logisches Schema 115  
 makroskopische Größen 113  
 Berechnung durch räumliche  
 Mittelung 116–119  
 Materialgleichungen der makroskopischen  
 Elektrodynamik 114, 116, 128  
 für zeitlich nicht zu rasch veränderliche  
 Felder 130  
 für zeitlich sehr rasch veränderliche Fel-  
 der (Dispersion) 131–137  
 für zeitunabhängige makroskopische  
 Quellen und Felder 129

Maxwell-Lorentz-Theorie 3–5, 11, 15,  
 104–105  
 Drehimpulserhaltung 38  
 Energieerhaltung 31  
 Erhaltungssätze 29  
 Existenz und Eindeutigkeit von Lösun-  
 gen 105  
 Grenzen 18–20  
 Grundgleichungen 26, 104–105  
 Impulserhaltung 35  
 logisches Schema 27, 52  
 Lorentzkovarianz 48  
 Zeitrichtung 71  
 Maxwellgleichungen *siehe* Feldgleichungen  
 für das elektromagnetische Feld  
 maxwellscher Spannungstensor 37  
 Maxwelltheorie 53–54, 69, 71, 168  
 mikroskopische Elektrodynamik *siehe*  
 Maxwell-Lorentz-Theorie  
 Mittelzone 193

### N

Nahzone 193  
 nichtlineare Optik 134  
 Normalkomponente eines Vektorfeldes in ei-  
 nem Flächenpunkt 149

### O

oerstedsches Gesetz 14  
 ohmsches Gesetz 129

### P

Paramagnetika 130  
 Permeabilität, statische magnetische 130  
 Phase einer monochromatischen ebenen  
 Welle als Viererskalarfeld 94  
 Poissongleichung 63, 65  
 Polarisation *siehe* Polarisationsfeld der Mate-  
 rie, elektrisches  
 Polarisationsfeld der Materie  
 elektrisches 114, 127, 134–135  
 Definition 123  
 magnetisches 114, 128, 132  
 Definition 123  
 Polarisationsladungsdichte der Materie 114

Polarisationsstromdichte der Materie 114  
Polarisationsvektoren 91, 144, 168, 169, 171  
Polarisationszustand einer monochromatischen ebenen elektromagnetischen Welle 95–96, 144  
    elliptische Polarisation 95–96  
    lineare Polarisation 95–96  
    zirkulare Polarisation 95–96  
Potential  
    Coulomb- 19, 63, 77  
    Yukawa- 19  
Potentiale, elektromagnetische  
    avancierte 66  
    Eichtransformationen 21–23  
    Feldgleichungen 21  
        bei Lorenzgleichung 22  
    Liénard-Wiechert- 74  
    retardierte 66  
    Viererpotential 43  
    Zusammenhang mit den Feldstärken 20  
poyntingsches Vektorfeld 33  
„Poyntingvektor“ *siehe* poyntingsches Vektorfeld

## R

Reflexionskoeffizient *siehe* Reflexion und Brechung bzw. Totalreflexion  
Reflexion und Brechung bzw. Totalreflexion an einer ebenen Grenzfläche  
    Brechungsgesetz 164–165, 168, 176  
    „Brechungsgesetz“ (im weiteren Sinne) 167  
    brewsterscher Winkel 172–173  
    fresnelsche Formeln 171, 171, 176, 177  
    Grenzwinkel der Totalreflexion 163  
    Lösungsansatz 159–161  
    Polarisations- und Intensitätsverhältnisse 172–178  
    Reflexionsgesetz 162, 168, 176  
    Reflexionskoeffizient 176–177, 178  
    Totalreflexion (*siehe* auch „Licht-haut“) 166, 171, 177–181  
    Transmissionskoeffizient 176–177, 178  
„relativistische Masse“ 57

Relativitätsprinzip 6  
    einsteinsches 9, 18, 39, 107  
    galileisches 7  
Relaxationsfunktion bei zeitlicher Dispersion 134  
Relaxationszeit 131  
Resonanzabsorption 132, 138, 139  
retardierte Lösungen 24, 25, 53  
retardierte Potentiale *siehe* Potentiale, elektromagnetische  
Reziprozitätssatz der Relativitätstheorie 42  
Ruhmasse eines Teilchens 56–57

## S

Selbstkraft in der Elektrodynamik *siehe* Strahlungsrückwirkungskraft  
Signalgeschwindigkeit 8–9, 139  
skalares Potential *siehe* Potentiale, elektromagnetische  
Standard-Lorentztransformationen *siehe* Lorentztransformationen, Standard-  
Stetigkeitsbedingungen *siehe* Grenzbedingungen  
Strahlungsfelder, elektromagnetische 46  
    auslaufende 54, 70  
    beschleunigt bewegter Punktladungen 78  
    einlaufende 5, 70  
    gegebener Quellverteilungen 70, 79  
    räumlich lokalisierter Quellen 54, 69  
Strahlungsrückwirkungskraft 23, 25, 52, 54–55, 85, 101–103  
    Vierer- 102  
Stromdichte, elektrische 11  
Suszeptibilität  
    statische elektrische 129  
    statische magnetische 129  
Suszeptibilitätsfunktion, komplexwertige elektrische 135

## T

Tangentialkomponente eines Vektorfeldes in einem Flächenpunkt 149  
Teilchenbeschleuniger 51  
    Kreisbeschleuniger 55, 86

Linearbeschleuniger [55](#), [59](#), [86](#)

Testladung [10–11](#), [23–24](#)

Totalreflexion *siehe* Reflexion und Brechung  
bzw. Totalreflexion und *siehe* „Licht-  
haut“

Trägheitsprinzip [6](#), [7](#)

Transmissionskoeffizient *siehe* Reflexion und  
Brechung bzw. Totalreflexion

Transparenzbereiche eines Mediums [137](#)

## V

Vektorpotential *siehe* Potentiale,  
elektromagnetische

Verkettungsterme [16](#), [17](#), [50](#)

Verknüpfungsgleichungen *siehe* Materialglei-  
chungen der makroskopischen Elek-  
trodynamik

„Verschiebungsstrom des Vakuums“ [16](#)

„vierdimensionales Volumselement“ als Lo-  
rentzinvariante [40](#)

Vierer-Lorentzkraft [48](#)

Vierer-Strahlungsrückwirkungskraft [102](#)

Vierergeschwindigkeit [41](#)

Vierergradientenoperator [42](#)

Viererpotential, elektromagnetisches [43](#)

Viererstromdichte, elektrische [41–42](#)

## W

Wellen

elektromagnetische *siehe* elektroma-  
gnetische Wellen im Vakuum  
bzw. im Medium

Gravitations- [8](#), [10](#)

Wellenfelder, elektromagnetische *siehe*  
Strahlungsfelder, elektromagneti-  
sche

Wellengleichungen

homogene [89](#)

inhomogene [22](#)

in Viererschreibweise [43](#)

Wellenpakete in der Elektrodynamik

*siehe* elektromagnetische

Wellen im Vakuum bzw.

im Medium

## Z

Zeitumkehr-Transformation *siehe* Bewe-  
gungsumkehr-Transformation

Zyklotronfrequenz [61](#)





**Teil II**  
**Quantenmechanik**



## Kapitel 3

# Teilchen- und Feldaspekte bei Licht und Materie

## 3.1 Versagen der klassischen Teilchen- und Feldtheorien

Die klassischen Teilchen- und Feldtheorien bewähren sich bei der Beschreibung großer Erfahrungsbereiche. Wie allen physikalischen Theorien sind ihnen aber Grenzen gesetzt. Im Folgenden werden Beispiele für Phänomene genannt, bei deren Beschreibung sie sich bewähren, sowie Beispiele für Phänomene, bei denen sie versagen.

### **Erfahrungsbereiche, in denen die klassische Feldtheorie des Lichtes<sup>1</sup> erfolgreich ist:**

- Ausbreitung von Licht im leeren Raum (s. Abschnitt 1.17)
- Aberration und Dopplereffekt
- Reflexion und Brechung (s. Abschnitt 2.7)
- Interferenz- und Beugungsphänomene (bei den in der Optik auftretenden Lichtintensitäten) (s. Abschnitt 2.8)

### **Erfahrungsbereiche, in denen die klassische Teilchentheorie des Lichtes erfolgreich ist:**

- Aberration
- Reflexionsgesetz; Brechungsgesetz, wofern man das Medium als „reibende Substanz“ behandelt
- Lichtausbreitung im Vakuum, falls Hindernisse und Öffnungen sowie deren Abstände hinreichend groß sind (geometrische Optik)
- lichtelektrischer Effekt und Comptoneffekt, wofern man die Energie der Lichtteilchen misst

### **Phänomene, bei denen beide klassischen Theorien versagen:**

- spektrale Verteilung der Hohlraumstrahlung
- Winkelverteilung des Lichtes bei der Comptonstreuung
- spontane Lichtemission durch Atome
- Beugungsexperimente mit extrem schwacher Lichtquelle und kurzer Expositionszeit

---

<sup>1</sup>Als *Licht* wird hier nicht nur die sichtbare elektromagnetische Strahlung, sondern die elektromagnetische Strahlung aus dem gesamten Spektrum bezeichnet. Die Grundgleichungen der klassischen Feldtheorie des Lichtes sind die quellenfreien Maxwellgleichungen.

Ähnliche Verhältnisse liegen bei Materie vor.

**Erfahrungsbereiche, in denen die klassische Feldtheorie der Materie<sup>2</sup> erfolgreich ist:**

- Beugungs- und Interferenzerscheinungen bei Experimenten mit hinreichend intensitätsstarken Strahlen von „Mikromaterie“ (z. B. Beugung von Elektronenstrahlen durch Kristallgitter)

**Erfahrungsbereiche, in denen die klassische Teilchentheorie der Materie erfolgreich ist:**

- Dynamik makroskopischer Körper
- „Bewegung“ von „Mikroobjekten“ (Elementarteilchen, Ionen etc.) in Beschleunigern

**Phänomene, bei denen beide klassischen Theorien versagen:**

- Winkelverteilung von „Mikroobjekten“ bei Streuprozessen  
Eine Ausnahme stellt die Coulombstreuung *nichtidentischer* „Mikroobjekte“ (z. B. Elektron-Proton-Streuung), die so genannte *Rutherfordstreuung*, dar. Durch einen mathematischen „Zufall“ stimmt für das Coulombpotential der klassische mit dem quantenmechanischen Streuwirkungsquerschnitt überein. Bei der Coulombstreuung *identischer* „Mikroobjekte“ (z. B. Elektron-Elektron-Streuung) hingegen, der so genannten *Mottstreuung*, versagt die klassische Theorie.
- Struktur (Aufbau, Stabilität) und Linienspektren von Kernen, Atomen und Molekülen  
Eine Ausnahme stellt das *Wasserstoffatom* dar, welches sich klassisch beschreiben lässt, wenn man die bohrschen Ad-hoc-Hypothesen bezüglich der „erlaubten“ strahlungsfreien Elektronbahnen einführt. Ein weiterer mathematischer „Zufall“, der wieder das Coulombpotential betrifft. Bereits beim Heliumatom scheitern alle Versuche, das Linienspektrum auf analoge Weise zu verstehen.
- radioaktiver Zerfall (Tunneleffekt)
- Kernspaltung
- Struktur von Flüssigkeiten und Festkörpern
- Stern-Gerlach-Effekt (Spin)
- Ferromagnetismus, Supraleitung

Aufgrund dieser Situation kann man folgende alternative Betrachtungsweisen ins Auge fassen:

1. Licht und Materie bestehen weder aus klassischen Teilchen (mit allen zugehörigen Attributen), noch sind sie klassische Felder (mit allen zugehörigen Attributen), sondern sie sind als *neue Grunderfahrung* einzustufen.

---

<sup>2</sup>Ein kurzer Abriss dieser Theorie, der de Broglie-Schrödinger-Materiefeldtheorie, wird in Abschnitt 3.3 und Abschnitt 4.3 behandelt.

In der Quantentheorie wird diese neue Grunderfahrung mit ihren rudimentären Teilchenaspekten (Lokalisierbarkeit, „Klumpigkeit“) und ihren rudimentären Feldaspekten (Interferenzfähigkeit) mathematisch logisch widerspruchsfrei erfasst, und es werden alle bekannten Phänomene in Übereinstimmung mit der Erfahrung beschrieben. Will man über ein Phänomen in der aus Erfahrungen mit unserer makroskopischen Umwelt entstandenen Sprache und in anschaulichen Bildern, die makroskopischen Phänomenen entlehnt sind, sprechen, so muss man einmal die klassische Teilchenvorstellung, einmal die klassische Feldvorstellung benutzen. Nur in speziellen Grenzfällen (in denen klassische Theorien anwendbar werden) kann man mit einem dieser Bilder allein das Auslangen finden, ansonsten muss man zwischen den Bildern „springen“.

Konkret: Das Elektron ist nach dieser Auffassung *weder* ein klassisches Teilchen, *noch* ein klassisches Feld, *noch* besitzt es eine „Doppelnatur“. Es ist *weder* Teilchen, *noch* Welle, *noch* beides, es ist etwas Neuartiges, durch klassische Bilder nicht bzw. nur bedingt Erfassbares. Es verhält sich lediglich in mancher Hinsicht *ähnlich* wie ein klassisches Teilchen, in mancher Hinsicht *ähnlich* wie ein klassisches Feld oder – wie man meist sagt – wie eine Welle.

2. Licht und Materie sind *klassische Felder*, „Körnigkeit“, „Klumpigkeit“, Lokalisierbarkeit müssen als spezielle „Feldkonzentrationen“ („Wellenpakete“) verstanden werden. Diese Auffassung wurde von Schrödinger und anfangs auch von de Broglie vertreten, doch ließ sich eine derartige mit der Erfahrung nicht in Konflikt kommende klassische Feldtheorie nicht formulieren, sodass diese Möglichkeit ausfällt (s. dazu Abschnitt 3.3).
3. Licht und Materie besitzen eine echte *klassische Doppelnatur*, d. h. es liegen jeweils *zugleich* ein klassisches Feld *und* klassische Teilchen vor.

Konkret: Elektronmaterie besteht aus klassischen Teilchen, welche von einem klassischen Feld, dem *Führungsfeld*, einem Feld im Konfigurationsraum, „dirigiert“ werden. Die Teilchen bewegen sich auf realen Bahnen, wobei diese außer durch die normalen Kräfte noch durch eine zusätzliche Führungskraft, die *Quantenkraft*, bestimmt sind. Diese Auffassung wurde von de Broglie nach Scheitern des reinen klassischen Feldkonzeptes vertreten und von Bohm 1952 mathematisch so formuliert, dass sich die statistischen Aussagen mit jenen der Standardformulierung der Quantentheorie decken, während die Teilchenbahnen und das Führungsfeld selbst zwar als real, zugleich aber als prinzipiell unbeobachtbare „verborgene Parameter“ erklärt werden. Mittelung über die „verborgenen Parameter“ liefert dann dieselben statistischen Aussagen wie die Standardformulierung der Quantentheorie.

Da das Führungsfeld ein Feld im *Konfigurationsraum* ist, kann man *nicht* – wie dies oft behauptet wird – sagen, ein *einzelnes Elektron* sei zugleich klassisches Teilchen und klassisches Feld. Diese Redeweise wäre zwar bei einem Einelektronenproblem (etwa für das Elektron eines Wasserstoffatoms) möglich, nicht aber bei einem Mehrelektronenproblem. So ist etwa das Führungsfeld für die zwei Elektronen des

Heliumatoms ein Feld im sechsdimensionalen Konfigurationsraum, mathematisch beschrieben durch eine Feldfunktion  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$ , welche zu *beiden* Teilchen gehört. Man hat also dann *zwei Teilchen*, aber nur *ein Feld* vorliegen. Es stellt sich natürlich die Frage, was dann die Aussage bedeuten soll, dass das Führungsfeld ein physikalisch reales Feld ist. Heisenberg stellt dazu die Frage<sup>3</sup>: «Ist denn der Konfigurationsraum ein „wirklicher“ Raum?»

4. Licht und Materie besitzen eine *Doppelnatur*, aber *nicht* im klassischen Sinn und *nicht* als ein „Nebeneinander“, sondern als *komplementäre Züge*, von denen je nach Versuchsanordnung und Phänomen einmal der eine, einmal der andere Zug schärfer hervortritt.

Konkret: Das Elektron selbst besitzt Teilchen- und Wellencharakter, diese Eigenschaften stehen aber nicht zueinander im Widerspruch, da sie zueinander komplementär sind, was im Formalismus der Quantentheorie durch die Unbestimmtheitsbeziehungen gewährleistet ist. Diese bohrschen Begriffe des *Dualismus* und der *Komplementarität* bilden Eckpfeiler der so genannten *Kopenhagener Deutung* der Quantentheorie.

Wir werden im Folgenden die auf Feynman zurückgehende Auffassung von Punkt 1 zugrunde legen. Auf die Frage der Interpretation der Quantentheorie werden wir später zurückkommen. Wir werden dann die Hauptstreitpunkte anführen und ausdrücklich sagen, welche Position in diesen Punkten die hier vorgetragene *Standardinterpretation der Quantenmechanik* einnimmt. Diese Standardinterpretation unterscheidet sich in einigen Punkten von der (nirgends wirklich klar formulierten) „mystischen“, unspezifischen Kopenhagener Interpretation.<sup>4</sup>

## 3.2 Doppelspaltversuch mit Licht bzw. mit Materiestrahlen

Die *klassische Feldtheorie* (Wellentheorie) liefert eine *Interferenzverteilung* auf dem Auffänger, wie sie qualitativ in Abb. 3.1 dargestellt ist. (Im Rahmen der elektromagnetischen Lichttheorie handelt es sich speziell um die Verteilung von Aufgabe E26, wofür die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der kirchhoffschen Annahmen und für die Fraunhoferbeugung erfüllt sind.) Das Intensitätsverhältnis  $I(x)/I(0)$  ist unabhängig von der Intensität der Quelle. Am Auffänger langt eine *ausgedehnte kontinuierliche Wellenfront* an, die auftreffende Energie ist kontinuierlich verteilt.

In der *klassischen Teilchentheorie* hingegen gibt es den Begriff der *Teilchenbahn*. Selbst wenn die Versuchsanordnung nur Einschläge auf dem Auffänger zu registrieren gestattet,

---

<sup>3</sup>Siehe dazu Seite 145 von Baumann, K., und R. U. Sexl: Die Deutungen der Quantentheorie. Vieweg, Braunschweig 1987.

<sup>4</sup>Siehe dazu Seite 16 des Buches von Baumann und Sexl.

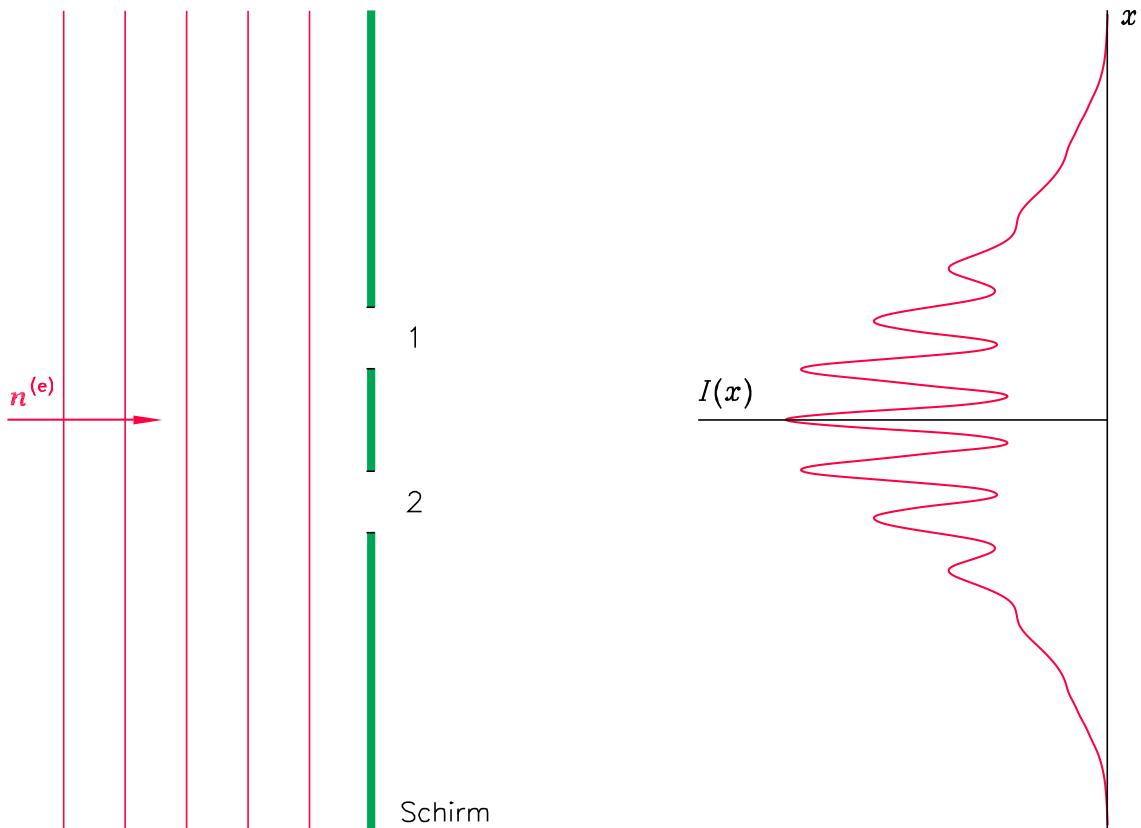


Abbildung 3.1: Intensitätsverlauf auf dem Auffänger nach der klassischen Feldtheorie: Interferenzverteilung  $I(x) = |A_1(x) + A_2(x)|^2 = I_1(x) + I_2(x) + \text{Interferenzterm}$

also keine Aussage liefert, durch welchen Spalt das jeweilige Teilchen hindurchgetreten ist, kann man doch sagen, dass ein auf dem Auffänger ankommendes Teilchen durch Spalt 1 oder durch Spalt 2 gekommen sein *muss*. Nimmt man nun an, dass die Bahnkurve eines durch Spalt 1 (2) hindurchtretenden Teilchens praktisch dieselbe ist, wenn Spalt 2 (1) offen ist, wie wenn Spalt 2 (1) geschlossen ist – diese Annahme ist nach allem, was wir über die fundamentalen physikalischen Wechselwirkungen wissen, gerechtfertigt –, so muss sich nach jeweils insgesamt  $\mathcal{N}$  Einschlägen ( $\mathcal{N}$  hinreichend groß) auf dem Auffänger dieselbe Intensitätsverteilung ergeben, wenn die Hälfte der Zeit Spalt 1 und die andere Hälfte der Zeit Spalt 2 geschlossen ist, wie wenn die ganze Zeit beide Spalte offen sind, d. h. es muss  $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$  gelten (*keine* Interferenzverteilung; s. Abb. 3.2). Weiters ist typisch für das klassische Teilchenbild, dass auf dem Auffänger die Energie *diskontinuierlich* ankommt: Es schlagen einzelne Teilchen ein. Eine annähernd kontinuierliche Intensitätskurve ergibt sich erst für hinreichend großes  $\mathcal{N}$ . Bei intensitätsschwacher Quelle und kurzer Expositionszeit des Auffängers hat man nur einige

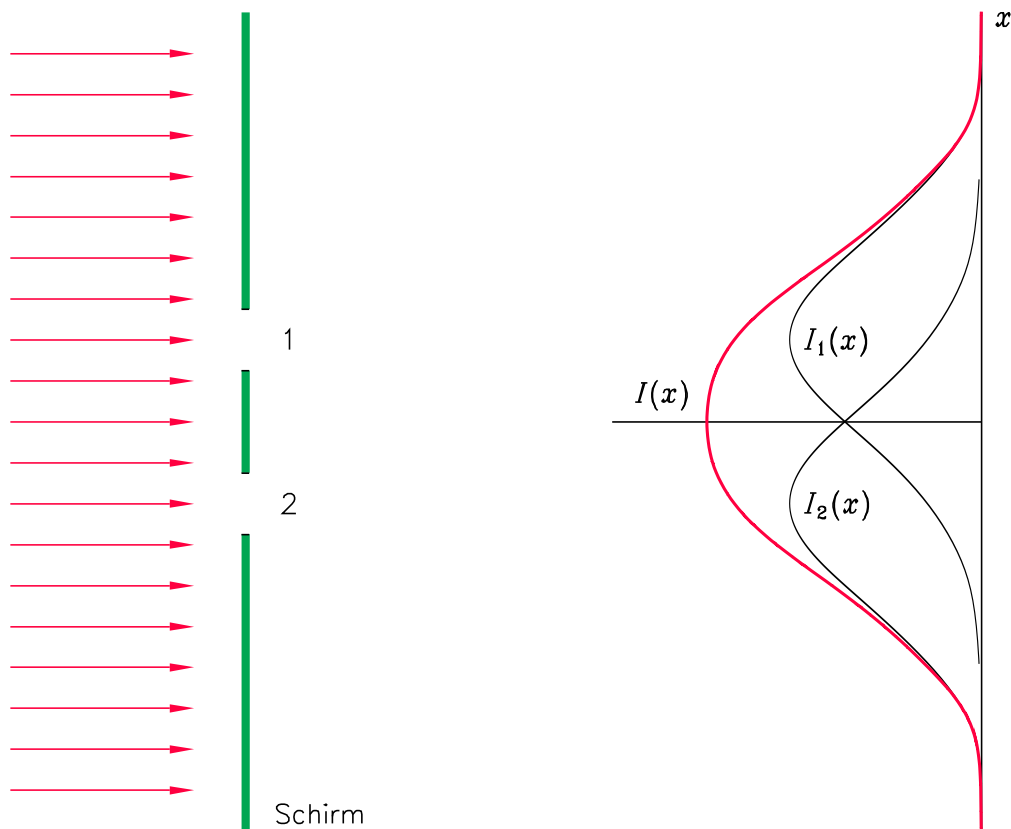


Abbildung 3.2: Intensitätsverlauf auf dem Auffänger nach der klassischen Teilchentheorie:  $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$

statistisch verteilte Einschläge.

Was findet man *experimentell* beim Doppelspaltversuch mit Licht bzw. mit Strahlen von „Mikromaterie“?

Bei den Beugungsversuchen der Optik findet man eine ausgezeichnete Bestätigung der Ergebnisse der klassischen elektromagnetischen Lichttheorie, der klassischen Feldtheorie des Lichtes. Auch für im Sinne der konventionellen Optik schwache Lichtquellen trifft dies zu. Grund dafür ist aber lediglich die Kleinheit des so genannten *Wirkungsquantums*. Ein Beispiel: Eine 100 W-Glühbirne, welche Licht der Wellenlänge  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$  aussendet, emittiert pro Sekunde rund  $3 \cdot 10^{20}$  Photonen.<sup>5</sup> – Macht man in einem Experiment die Quelle so intensitätsschwach, dass in einer Stunde auf dem Auffänger nur die Energie  $100 \hbar\omega$  auftrifft (was 100 Photonen entspricht), so findet man nach Entwicklung einer Photoplatte, welche eine Stunde exponiert wurde, hundert mehr oder weniger

<sup>5</sup>Siehe dazu Seite 19.



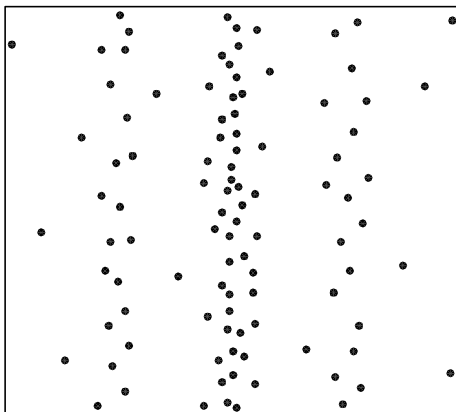


Abbildung 3.3: Verteilung der Schwärzungspunkte bei niedriger Photonenzahl

zufällig verteilte Schwärzungspunkte (s. Abb. 3.3). Erst bei sehr langer Expositionszeit würde man die mithilfe der klassischen elektromagnetischen Lichttheorie berechnete kontinuierliche Intensitätskurve finden.

Stellt man als Auffänger eine Anordnung von schmalen Detektoren auf, so „klickt“ jeweils nur *ein* Detektor, und zwar im Mittel alle 30–40 Sekunden, wobei der betreffende Detektor das Energiequant  $\hbar\omega$ , d. h. ein Photon, absorbiert. Auch bei den in der konventionellen Optik verwendeten Quellen spricht – im Gegensatz zur Vorstellung einer räumlich ausgedehnten Wellenfront – immer nur *ein* Detektor an, doch kann man die rasche Folge der „Klicks“ nicht mehr auflösen, weshalb es zweckmäßig ist, statt mit der Quantentheorie mit der einfacher zu handhabenden klassischen Feldtheorie zu arbeiten.

Für *Elektronenstrahlen* oder *Strahlen anderer „Mikroobjekte“* erwartet man bei einem Auffänger mit Detektoren einzelne „Klicks“, doch würde man meinen, dass sich für eine hinreichend große Zahl von „Mikroobjekten“ die Verteilung von Abb. 3.2 einstellen müsste. Man findet jedoch wie bei Licht ein *Interferenzbild* gemäß Abb. 3.1.<sup>6</sup> Man stellt also experimentell ein *Versagen der klassischen Teilchentheorie* beim Doppelspaltversuch mit „Mikromaterie“ fest. Ein möglicher Ausweg (de Broglie, Bohm) besteht darin, dass man am klassischen Teilchenbegriff und am klassischen Bahnbegriff festhält, in die Bewegungsgleichung aber eine zusätzliche Kraft, und zwar eine durch ein interferenzfähiges Führungsfeld bestimmte *Führungskraft*, einführt. (Das Führungsfeld „weiß“, dass beide Spalte offen sind, und vermittelt diese „Information“ via Führungskraft an die Teilchen.) Die Problematik dieser Konzeption, welche schon auf Seite 221 skizziert wurde, ist, dass sie einen *Kryptodeterminismus* einführt: Die „wahre“ Teilchenbahn (bestimmt durch die normalen Kräfte und die zusätzliche Führungskraft) *könnte* berechnet werden, *wenn* der „wahre“ Anfangsort nicht prinzipiell „verborgen“ *wäre*. Heisenberg sagt dazu<sup>7</sup>: «... diese objektive „Beschreibung“ enthüllt sich dabei als eine Art von „ideologischem Überbau“, der mit der unmittelbaren physikalischen Realität nur noch wenig zu tun

<sup>6</sup>Der Doppelspaltversuch mit „Mikroobjekten“, und zwar mit Elektronen, wurde erstmals 1960 von Jönsson durchgeführt; s. dazu Jönsson, C.: Zeitschrift für Physik 161 (1961), 454–474.

<sup>7</sup>Siehe dazu Seite 145 des auf Seite 222 zitierten Buches.

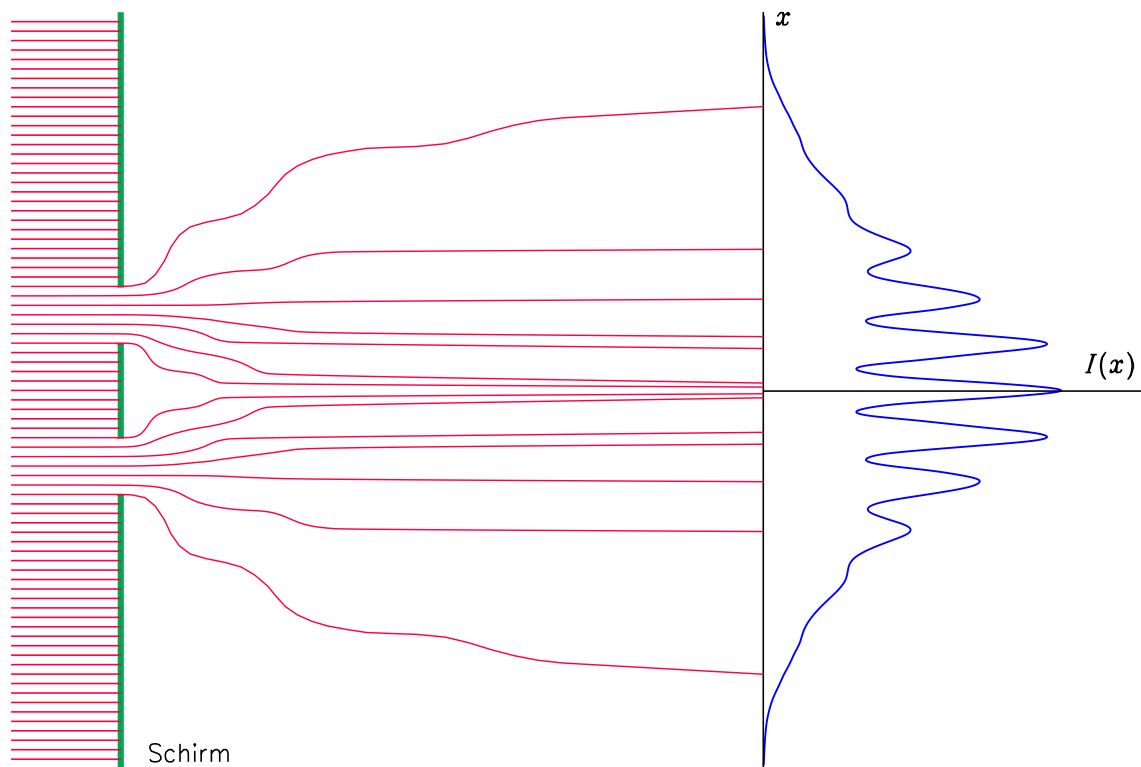


Abbildung 3.4: Bohmsche Teilchenbahnen beim Doppelspaltversuch mit „Mikroobjekten“

hat. Denn die „verborgenen Parameter“ der bohmschen Deutung sind ja von solcher Art, dass sie, sofern die Quantentheorie nicht abgeändert wird, in der Beschreibung der wirklichen Vorgänge *nie* vorkommen können.» – Wir wollen auf nähere Details der bohmschen Theorie der „Mikromaterie“ nicht eingehen<sup>8</sup>, wir wollen hier nur das einfachere Analogon bei Licht skizzieren, da wir das Problem der Beugung am Doppelspalt in der klassischen elektromagnetischen Theorie ausführlich behandelt haben. Das gemäß Abschnitt 2.8.3 berechnete elektromagnetische Feld  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  wäre dann das Führungsfeld für die klassischen Lichtteilchen. Die Schar der möglichen Teilchenbahnen (s. Abb. 3.4) würde mit der Schar der Feldlinien des poyntingschen Vektorfeldes  $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$  identifiziert, deren Dichte in der Maxwelltheorie ja die Intensität angibt, d. h. eine Ad-hoc-Führungskraft müsste ein auf einen Anfangsort „links“ vom Beugungsschirm (mit der Anfangsgeschwindigkeit  $c$ ) „hingesetztes“ Lichtteilchen längs der durch diesen Punkt gehenden  $\mathbf{S}$ -Feldlinie „führen“. Da die Anfangsorte aber prinzipiell „verborgen“ sind, kann man trotz „wahren“ Bahnkurven nicht voraussagen, welcher Detektor auf dem

<sup>8</sup>Siehe dazu Seite 163ff des auf Seite 222 zitierten Buches.

Auffänger jeweils „klicken“ wird. Mittelung über die „verborgenen“ Anfangsorte gibt dann als statistische Verteilung die Interferenzverteilung  $I(x)$ . Beachte, dass nicht einmal die Aussage „Jedes Teilchen, das durch Spalt 1 geht, trifft bei  $x > 0$  auf“ experimentell verifizierbar ist. (Siehe dazu auch weiter unten.)

Da wir diesen Ausweg als kryptodeterministisch ablehnen (obwohl er nicht falsifizierbar und zur üblichen Quantentheorie gleichwertig ist) und da auch der auf Seite 221 unter Punkt 2 skizzierte schrödingersche Versuch scheiterte, entscheiden wir uns für folgenden Weg: **Wir behalten vom klassischen Teilchenbegriff nur die Lokalisierbarkeit bei, geben also den Begriff der Teilchenbahn auf.** Die Schlussweise von Seite 223, die uns auf die Verteilung  $I(x)$  von Abb. 3.2 geführt hat, lässt sich dann für „Mikroobjekte“ nicht anwenden. (Natürlich haben wir damit noch keine „Erklärung“ für die im Experiment gefundene Interferenzverteilung  $I(x)$  von Abb. 3.1.)

Kann man aber nicht experimentell feststellen, durch welchen Spalt ein „Mikroobjekt“ „geht“? – Will man von jedem auf dem Auffänger auftreffenden „Mikroobjekt“ mit ziemlicher Sicherheit sagen können, ob es durch Spalt 1 oder durch Spalt 2 „gekommen“ ist, so muss man die Spalte mit Licht hoher Intensität beleuchten, wobei die Wellenlänge sehr klein gegen den Abstand der Spalte sein muss<sup>9</sup>, und das gestreute Licht in Koinkidenz mit dem auf dem Auffänger auftreffenden „Mikroobjekt“ registrieren. Bei einer so abgeänderten Versuchsanordnung würde man aber die Intensitätsverteilung von Abb. 3.2 erhalten. (Zerstörung der Interferenz durch Identifikation, welche der beiden denkbaren – ursprünglich interferierenden – Möglichkeiten tatsächlich eingetreten ist.) Die drastische Änderung der Intensitätsverteilung durch die besprochene Abänderung der Versuchsanordnung lässt sich qualitativ leicht verstehen, denn Beleuchten mit Licht kleiner Wellenlänge bedeutet Bombardieren der „Mikroobjekte“ mit Photonen großen Impulses  $p = \frac{h}{\lambda}$ .

Es sollen hier noch die Ergebnisse eines sehr präzisen Doppelspaltexperimentes mit Neutronen präsentiert werden, welches von Gähler und Zeilinger<sup>10</sup> durchgeführt wurde. Da Neutronen elektrisch neutral sind und nur ein kleines magnetisches Moment besitzen, sind sie gegenüber den in jedem Laboratorium vorhandenen elektromagnetischen Streufeldern viel unempfindlicher als Elektronen und eignen sich daher besser für Präzisionsmessungen. Die im Experiment verwendeten Neutronen hatten eine mittlere de Broglie-Wellenlänge von 20 Å. Der Doppelspalt wurde durch Glaskanten realisiert, zwischen denen in der Mitte parallel zu den Glaskanten ein Draht aus Bor gespannt wurde. Glas und Draht waren für die benutzten Neutronen undurchlässig. Der auf diese Weise entstehende Doppelspalt hatte eine Spaltbreite von  $2 \cdot 10^{-3}$  cm und einen Spaltabstand von  $10^{-2}$  cm. Die Intensität des Neutronenstrahls war so niedrig, dass jeweils nur ein

---

<sup>9</sup>Nur unter dieser Voraussetzung gestattet das Auflösungsvermögen eine Aussage darüber, ob eine Lichtstreuung bei Spalt 1 oder bei Spalt 2 erfolgt ist.

<sup>10</sup>Siehe dazu Gähler, R., und A. Zeilinger: Am. J. Phys. 59 (1991), 316–324.

Neutron in der Apparatur „unterwegs“ war. Die Abbildung 3.5 zeigt die entsprechende Intensitätsverteilung aus der Arbeit von Gähler und Zeilinger.

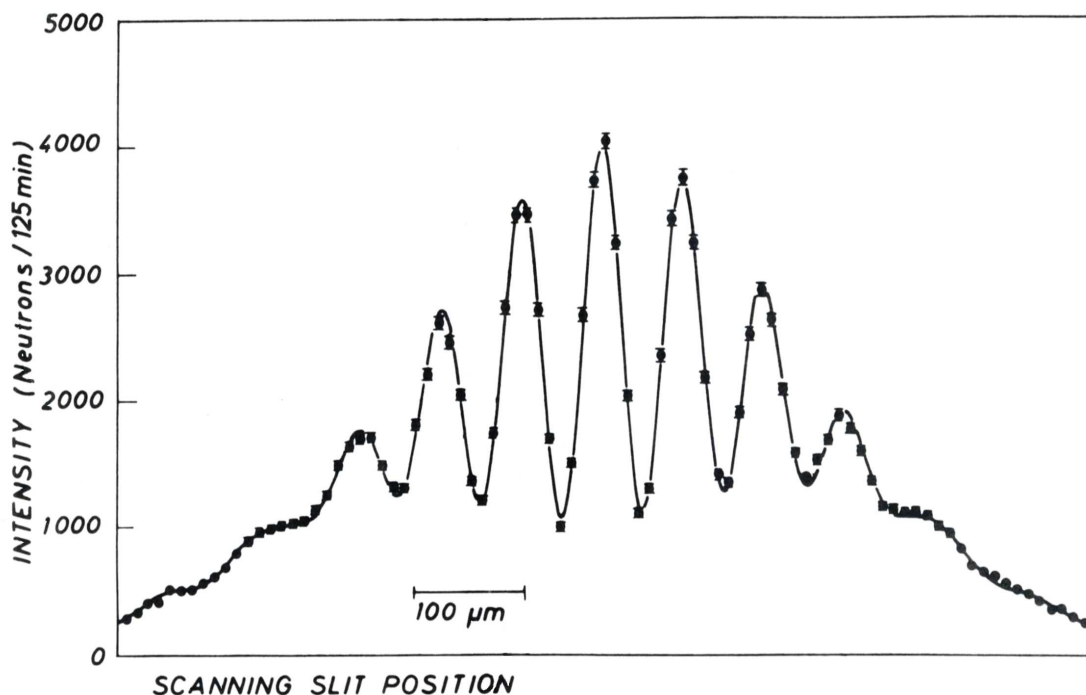


Abbildung 3.5: Intensitätsverteilung für den Doppelspaltversuch mit Neutronen von Gähler und Zeilinger. Die durchgezogene Kurve zeigt das Ergebnis der quantentheoretischen Beugungstheorie, die (zum Teil mit Fehlerbalken versehenen) Punkte sind die experimentellen Zählraten

### 3.3 De Broglie-Schrödinger-Materiefeldtheorie

Wir können die de Broglie-Schrödinger-Materiefeldtheorie<sup>11</sup> nicht mit derselben Ausführlichkeit behandeln wie die maxwellsche elektromagnetische Lichttheorie. Ihre praktische Bedeutung erschöpft sich auch darin, dass sie Beugungsphänomene mit hinreichend großen Mengen von „Mikromaterie“ (z. B. Elektronmaterie) quantitativ richtig erklärt. Sie versagt aber bei der Beschreibung von Atomen, Molekülen etc. sowie bei der Beschreibung der Teilchenaspekte der „Mikromaterie“, d. h. der „Klumpigkeit“ und Lokalisierbarkeit.

<sup>11</sup>Siehe dazu Fick, E.: Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie. AULA-Verlag, Wiesbaden 1988.

Im klassischen Materiefeldbild müsste das, was als ein „Teilchen“ erzeugt oder registriert wird, durch ein räumlich lokalisiertes *Wellenpaket* dargestellt werden. Der Gruppengeschwindigkeit  $v_{\text{Gr}}$  eines solchen Wellenpaketes käme die Rolle der Teilchengeschwindigkeit zu.

Aus den Beugungsexperimenten, konkret aus den Abständen der Intensitätsmaxima und -minima, ergibt sich nun für ein wellenzahlmäßig um  $k_0$  „konzentriertes“ kräftefreies Wellenpaket

$$v_{\text{Gr}} = \eta k_0, \quad (3.1)$$

wobei  $\eta$  eine für die betreffende Materieart (Elektron-, Proton- oder Neutronmaterie) charakteristische Naturkonstante darstellt.

In einer klassischen Materiefeldtheorie haben a priori Begriffe wie Teilchen, Teilchenzahl, Teilchenmasse etc. nichts zu suchen. Da wir hier aber gerade die Frage untersuchen, ob sich der Teilchenbegriff nicht auf bestimmte räumliche „Feldkonzentrationen“, denen eine bestimmte unteilbare Masse zukommt, zurückführen lässt, nehmen wir für kräftefreie Materie eine Anleihe bei den Einstein-de Broglie-Beziehungen. Mit  $p = \hbar k$  und<sup>12</sup>  $E = \frac{p^2}{2m} = \hbar\omega$  folgt

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}, \quad \left(\frac{d\omega(k)}{dk}\right)_{k_0} = v_{\text{Gr}} = \frac{\hbar k_0}{m}, \quad (3.2)$$

im Einklang mit Gl. (3.1), wobei  $\eta$  mit  $\frac{\hbar}{m}$  zu identifizieren ist. Setzt man hier die Elektron-, Proton- bzw. Neutronmasse ein, so erhält man tatsächlich den betreffenden experimentellen  $\eta$ -Wert. Im Folgenden benützen wir diesen Ausdruck für  $\eta$ . Aus der Beziehung (3.2) für  $\omega(k)$  folgt, dass die Phasengeschwindigkeit von der Kreiswellenzahl  $k$  bzw. von der Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  abhängt:

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{\hbar k}{2m}. \quad (3.3)$$

Materiewellen kräftefreier Materie zeigen also *Dispersion*, d. h. *kräftefreie Wellenpakete zerfließen im Laufe der Zeit*. Die Antwort auf die Frage, wie *rasch* dieses Zerfließen erfolgt, ist entscheidend dafür, ob sich kräftefreie „Mikroobjekte“ durch Wellenpakete beschreiben lassen.

Ein kräftefreies Wellenpaket besitzt wegen Gl. (3.2) – für den eindimensionalen Fall angeschrieben – die Form

$$\psi(x, t) = \int_{\mathbb{R}} dk a(k) \exp\left[i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t\right)\right], \quad (3.4)$$

wobei sich die Amplitudenfunktion  $a(k)$  nach dem fourierschen Integraltheorem aus der Anfangsbedingung gemäß

$$a(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dx' \psi(x', 0) e^{-ikx'} \quad (3.5)$$

ergibt. Nach Schrödinger bedeutet dabei

$$\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2 \quad (3.6)$$

<sup>12</sup>Wir beschränken uns auf nichtrelativistische Materie.

die *Materiedichte* (Massendichte der Materie). Diese Interpretation setzt voraus, dass sich eine entsprechende Materiestromdichte (Massenstromdichte der Materie)  $\mathbf{j}(x, t)$  definieren lässt, die zusammen mit  $\rho(x, t)$  eine Kontinuitätsgleichung erfüllt, welche physikalisch die Erhaltung der Masse ausdrückt.<sup>13</sup> Wir kommen darauf in Abschnitt 4.3 zurück.

Die Feldfunktion  $\psi(x, t)$  von Gleichung (3.4) ist Lösung der **de Broglie-Schrödinger-Materiefeldgleichung für kräftefreie Materie**

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (3.7)$$

zur Anfangsbedingung  $\psi(x, 0)$ . Bei drei Raumdimensionen hat man entsprechend

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

und  $\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ .

Nimmt man für  $\psi(x, 0)$  eine so genannte „gaußartige“ Funktion an, für welche  $|\psi(x, 0)|^2$  eine Gaußverteilung mit Mittelwert  $x_0$ ,  $v_{\text{Gr}} = \frac{\hbar k_0}{m} = \frac{p_0}{m}$  und „Breite“<sup>14</sup>  $(\Delta x)_0$  ist, so ergibt die Rechnung gemäß Gl. (3.5) und (3.4) eine Materiefeldfunktion  $\psi(x, t)$  für  $t > 0$ , für welche  $|\psi(x, t)|^2$  eine Gaußverteilung mit Mittelwert bei  $x_0 + \frac{p_0}{m} t$  und „Breite“

$$(\Delta x)_t = (\Delta x)_0 \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 (\Delta x)_0^4}} \quad (3.8)$$

ist.<sup>15</sup> Mit  $m = m_e$  (Elektronmasse) und  $(\Delta x)_0 = 10^{-8}$  cm (Lokalisierung zum Anfangszeitpunkt in atomaren Dimensionen) würde man bereits nach  $10^{-16}$  Sekunden  $(\Delta x)_t = 2(\Delta x)_0$  erhalten. Da das Elektron im Experiment keinerlei Neigung zeigt, zu „zerfließen“, muss die schrödingersche Interpretation von  $|\psi|^2$  fallen gelassen werden. Im folgenden Abschnitt werden wir einen weiteren Grund für diese Notwendigkeit besprechen.

### 3.4 Bornsche Interpretation des Absolutquadrates der Feldfunktion

Nach dem Vorschlag von *Born* wird die Feldgleichung selbst, die ja das Beugungsbild im Grenzfall hinreichend großer Materiemengen richtig wiedergibt, für „Einteilchenprobleme“ beibehalten, es wird jedoch  $|\psi|^2$  als **Antreffwahrscheinlichkeitsdichte** für das

<sup>13</sup>In einer nichtrelativistischen Theorie der Materie muss die Masse eine additive Erhaltungsgröße sein.

<sup>14</sup>Die „Breite“ ist als Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung vom Mittelwert definiert; siehe dazu Abschnitt 4.10.

<sup>15</sup>Siehe z. B. Kapitel 4, Aufgabe 9, von Grau, D.: Übungsaufgaben zur Quantentheorie. Hanser, München 1993; überarbeitete und erweiterte Version auf <http://www.dietrich-grau.at/>.

„Teilchen“<sup>16</sup> interpretiert.<sup>17</sup> Bei „Mehrteilchenproblemen“ wird  $\psi$  zu einer Funktion aller „Teilchenkoordinaten“, also  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$  für  $N$  „Teilchen“ in drei Raumdimensionen, und es ist auch die Differentialgleichung für  $\psi$  zu verallgemeinern.

Born gelangte zu seinem Vorschlag nicht aufgrund des Zerfließens kräftefreier Wellenpakete, sondern durch Analyse des Streuproblems.<sup>18</sup>

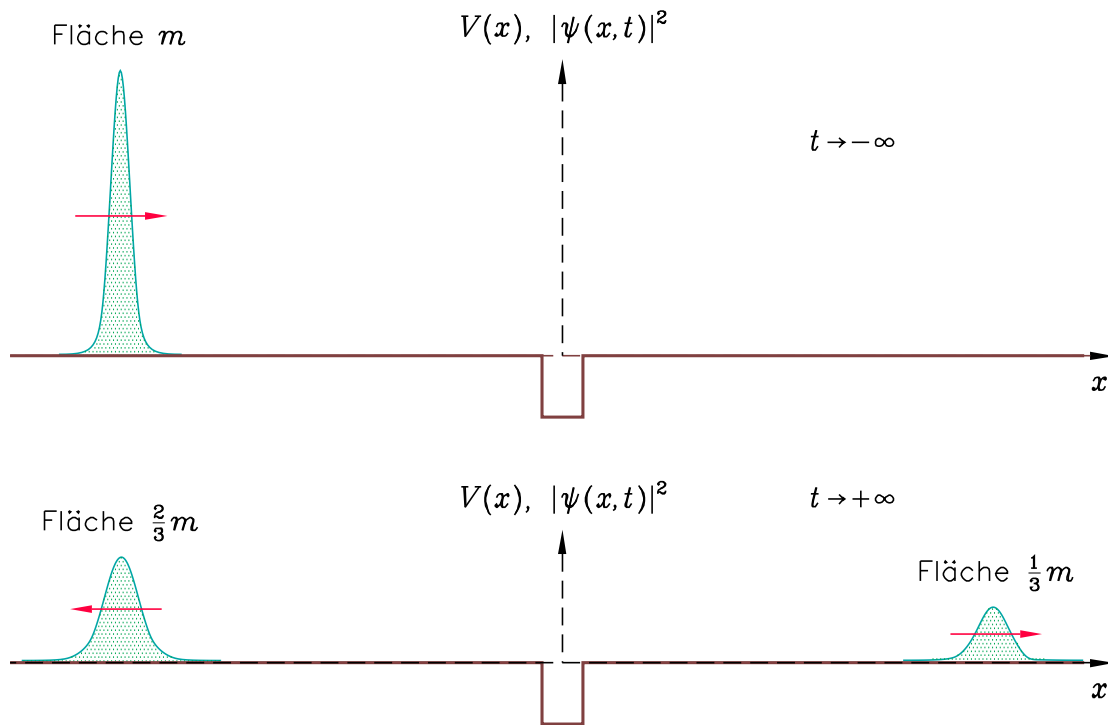


Abbildung 3.6: Streuung eines Wellenpakets in einer Raumdimension

In der klassischen Feldtheorie der Materie lassen sich analog wie in der Maxwelltheorie Energiedichte, Energiestromdichte, Impulsdichte, Impulsstromdichte etc. definieren.<sup>19</sup> Aus solchen Betrachtungen lässt sich ersehen, auf welche Weise die Feldgleichung zu verallgemeinern ist, wenn die Materie äußeren Kräften ausgesetzt ist. Anstelle von Gl. (3.7) tritt dann die **de Broglie-Schrödinger-Materiefeldgleichung**

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right\} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}, \quad (3.9)$$

<sup>16</sup>Die Anführungszeichen werden bis auf weiteres gesetzt, um daran zu erinnern, dass es sich nicht um den klassischen Teilchenbegriff handelt.

<sup>17</sup>Im Zusammenhang mit der Uminterpretation von  $|\psi|^2$  ist auch eine neue Normierung von  $\psi$  erforderlich, da ja das Integral über  $|\psi|^2$  nicht mehr die Gesamtmasse, sondern die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 ergeben muss. Da die Differentialgleichung für  $\psi$  homogen ist, ist eine solche Umnormierung ohne weiteres möglich; s. dazu Abschnitt 4.3.

<sup>18</sup>Siehe dazu Seite 48ff des auf Seite 222 zitierten Buches.

<sup>19</sup>Siehe dazu das auf Seite 228 zitierte Buch.

wobei  $V(x)$  die klassische potentielle Energie darstellt. Wählt man für  $V(x)$  z. B. ein „Kastenpotential“ und wählt man als „Anfangsbedingung“ für  $t \rightarrow -\infty$  ein auf dieses Potential „einfallendes“ räumlich lokalisiertes Wellenpaket mit Gesamtmasse  $m$ , so erhält man für  $t \rightarrow +\infty$  ein reflektiertes und ein transmittiertes Teilpaket. Nach der schrödingerschen Interpretation wäre  $m$  „zerteilt“ worden, z. B. in  $\frac{2}{3}m$  und  $\frac{1}{3}m$ , wie in Abb. 3.6 dargestellt. Da dies in krassem Widerspruch zum Experiment steht, schlug Born die Wahrscheinlichkeitsinterpretation von  $|\psi|^2$  vor.

Im Experiment werden die *Wahrscheinlichkeiten* durch Bestimmung der *relativen Häufigkeiten* für  $\mathcal{N}$  Einzelversuche ( $\mathcal{N}$  hinreichend groß) überprüft (z. B.: von einer Million „Teilchen“ werden 666 682 reflektiert, 333 318 transmittiert). Wir werden die Wahrscheinlichkeiten (im Einklang mit Born) auch in der Theorie als relative Häufigkeiten interpretieren, und zwar als relative Häufigkeiten in einer gedachten Gesamtheit von unendlich vielen „gleich präparierten“ Systemen (hier „Teilchen“). Es gibt aber auch andere Interpretationen des quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsbegriffes (siehe dazu den folgenden Abschnitt).

## 3.5 Interpretationsfragen der Quantenmechanik. Standardinterpretation

Wir beschränken uns in den restlichen Abschnitten auf die *nichtrelativistische Quantentheorie materieller „Mikroobjekte“*, die so genannte *Quantenmechanik*.

Es gibt eine bis heute anhaltende Diskussion über die Interpretation der Quantenmechanik. Einige Punkte wollen wir schon hier anführen, da sie bereits für die Sprechweisen von Bedeutung sind, die wir auf dem „Rateweg“ zum Auffinden des mathematischen Formalismus benützen werden.<sup>20</sup> Es empfiehlt sich, diesen Abschnitt nach dem Studium von Kapitel 4 nochmals durchzulesen, da man seinen Inhalt erst dann voll einordnen und werten kann, wenn man den mathematischen Formalismus und Beispiele dazu kennen gelernt hat.

Für die Einstellung zu den verschiedenen Interpretationsvorschlägen ist die eigene philosophisch-erkenntnistheoretische Grundhaltung entscheidend.

Nach der *empiristischen Konzeption* (Bohr, Heisenberg, Jordan, Born) stellt die Beobachtung die einzige Grundlage der Physik dar. Gegenstand der physikalischen Beschreibung sind ausschließlich die beobachtbaren *Phänomene*. Die Behauptung, dass es eine objektiv existierende Realität gibt, d. h. eine Realität, die auch vorhanden wäre, wenn es keine denkenden und beobachtenden Wesen gäbe, wird als nicht verifizierbar für „sinnlos“ erklärt. Die Naturwissenschaft hat demnach nicht die Aufgabe zu erklären, was die Dinge an sich „sind“ und welche Eigenschaften sie unabhängig von einer Beobachtung „haben“ bzw. was sie zwischen zwei Beobachtungen „tun“.

---

<sup>20</sup>Bezüglich einer umfassenden und ausführlichen Diskussion des Interpretationsproblems s. die auf den Seiten 222, 233 zitierten Bücher.



Aufgabe der Quantenmechanik ist es vielmehr

- (a) eine korrekte und ökonomische Beschreibung gemachter Beobachtungen zu geben;
- (b) einen Formalismus zu konstruieren, der aus gewissen gegebenen Bedingungen Beobachtungsergebnisse vorauszusagen gestattet, und zwar mit Sicherheit oder auch nur auf statistische Art.

Die Forderung der *Objektivität* der Aussagen besagt, dass sie für jeden beliebigen Beobachter wahr sein müssen (Intersubjektivität). Objektivität ist also im Rahmen der empiristischen Konzeption nicht im Sinne von „wahr, unabhängig von jeder Beobachtung“, zu verstehen.

Dagegen gibt es nach der *realistischen Konzeption* (Schrödinger, de Broglie, Einstein, Bell) eine definierte physikalische Realität, die auch existiert, wenn es keinen Beobachter gibt, und die der Untersuchung, der quantitativen Erfassung und mathematischen Berechnung durch den Menschen zugänglich ist. Letztes Ziel der Physik ist die Beschreibung des objektiven, d. h. unabhängig von jeder Beobachtung bzw. Messung existierenden *realen Zustandes* eines physikalischen Systems. Eine Theorie, die nur Aussagen über die Ergebnisse von Beobachtungen bzw. Messungen gestattet, ist unvollständig, nach Einstein «... nicht der wahre Jakob».

Falls die realistische Konzeption zwischen dem Menschen und der Welt möglich ist, muss es eine Formulierung der Grundgesetze der Quantenmechanik geben, in welche die Begriffe „Messung“, „Beobachtung“ nicht eingehen. Die in der Standardinterpretation, aber auch in der Kopenhagener Interpretation, als „Dogmen“ in die Formulierung der Grundgesetze eingehenden Aussagen über Systempräparationen und -messungen müssen sich in einer solchen Formulierung aus der Analyse der Wechselwirkung zwischen Apparaten und „Mikrosystemen“ als *Sätze* (Folgerungen) ergeben.

Bell hat die Verwendung des Konzeptes „Messung“ in den Grundgesetzen am schärfsten kritisiert.<sup>21</sup> Er sagt: «... das Experiment ist ein Werkzeug. Ziel bleibt es, die Welt zu verstehen. Die Quantenmechanik ausschließlich auf Laborwerkeleien zu beschränken, wäre Verrat an der großartigen Idee. Eine bedeutende Formulierung wird nicht die große Welt außerhalb des Labors ausschließen.»

Die Bestrebungen, den Messprozess zu verstehen und die „große Welt“ außerhalb des Labors, insbesondere die Vorgänge im Universum unmittelbar nach dem „Urknall“, quantentheoretisch zu untersuchen, sind eine bedeutende Triebfeder, eine Erweiterung und Neuformulierung der Quantentheorie zu suchen. Die neuesten Entwicklungen auf diesem Weg haben zum „Consistent Histories Approach“ von Griffiths, Gell-Mann, Hartle und Omnès geführt.<sup>22</sup> Der „Consistent Histories Approach“ benötigt weder eine Unter-

---

<sup>21</sup>Siehe die deutsche Übersetzung des Artikels „Against Measurement“ von J. Bell in *Physikalische Blätter* 48 (1992), 267-273.

<sup>22</sup>Einführungen in die Grundgedanken des „Consistent Histories Approach“ geben J. J. Halliwell, *Fundamental Problems in Quantum Theory* (Ed. Greenberger, D. M., und A. Zeilinger), *Annals of the New York Academy of Sciences*, 755, 726–740, New York 1995, und R. Omnès, *Understanding Quantum*

scheidung mikroskopisch–makroskopisch noch eine Trennung System–Messapparatur noch die Annahme einer klassischen Domäne und muss daher auch – im Gegensatz zur konventionellen Formulierung der Quantentheorie – die klassischen Theorien nicht als Vortheorien voraussetzen. Eine vom Beobachter unabhängige Realität kann man sich aber auch im Rahmen dieser Neuformulierung nur in eingeschränktem Sinne verwirklicht denken. Dabei spielen „Dekohärenz“ und „messprozessartige Vorgänge“ durch informationsspeichernde und informationsverwertende Systeme in der Natur selbst (so genannte „Records“, z. B. das Festhalten eines radioaktiven Zerfalls durch ein Glimmerplättchen) eine Rolle. – Es ist nicht möglich hier näher auf den „Consistent Histories Approach“ einzugehen, da der Zugang die Kenntnis der konventionellen Formulierung der Quantenmechanik voraussetzt, und außerdem sehr abstrakte mathematische Konzepte herangezogen werden müssen. Wir bleiben deshalb auf dem Boden der konventionellen Formulierung, welche für die Beschreibung von „Mikrosystemen“ (Atome, Moleküle etc.) maßgeschneidert ist.

Wir zählen nun kurz die Hauptstreitpunkte hinsichtlich der Interpretation der Quantenmechanik auf. Im Anschluss daran deklarieren wir, welche Standpunkte wir im Folgenden zugrunde legen.

Die *Hauptstreitpunkte* sind:

1. Was beschreibt  $\psi$ ?

Nach Bohr beschreibt  $\psi$  *erschöpfend* (exhaustive) ein *Einzelssystem*, womit gemeint ist, dass andere als Wahrscheinlichkeitsaussagen über „Mikrosysteme“ *prinzipiell* unmöglich sind.

Nach Einstein, Popper, Ballentine und – was kaum bekannt ist – auch Born<sup>23</sup>, beschreibt  $\psi$  eine gedachte Gesamtheit unendlich vieler gleich präparierter Systeme, wobei Einstein diese Beschreibung für unvollständig hält, Born jedoch davon überzeugt ist, dass für „Mikrosysteme“ andere als Wahrscheinlichkeitsaussagen niemals möglich sein werden.

2. Wie ist der Wahrscheinlichkeitsbegriff zu interpretieren?

Heisenberg interpretiert die Wahrscheinlichkeit als *Potentialität*, das ist eine Art „Schwebezustand“ des Einzelsystems zwischen „Möglichkeit“ und „Wirklichkeit“. Durch den Beobachtungsakt (oder einen „messprozessartigen Vorgang“ in der Natur) findet der «Übergang vom Möglichen zum Faktischen statt». Popper interpretiert die Wahrscheinlichkeit als *Propensität*, das ist eine Art „Verwirklichungstendenz“ beim Einzelsystem.

---

Mechanics, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1999. Eine ausführliche mathematisch anspruchsvolle Darstellung gibt R. Omnès, *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1994.

<sup>23</sup>Siehe dazu Seite 250 von Albert Einstein, Max Born: Briefwechsel. Nymphenburger Verlagshandlung, München 1969.

Born, Einstein, Pauli, Feynman legen die Häufigkeitsinterpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zugrunde, welche auf von Mises zurückgeht, d. h. die Wahrscheinlichkeit wird als „Grenzwert“ der relativen Häufigkeiten in einer Gesamtheit von  $\mathcal{N}$  Systemen für  $\mathcal{N} \rightarrow \infty$  interpretiert. Ballentine hat gezeigt, dass die Häufigkeitsinterpretation, welche konzeptuelle Mängel besitzt – die Anführungszeichen beim Wort Grenzwert weisen darauf hin –, auf die Propensitätsinterpretation zurückgeführt werden kann.<sup>24</sup>

3. Wie sind Präparation und Messung zu behandeln?

Laut Bohr handelt es sich dabei um irreduzible Konzepte, da Präparations- und Messapparate mit der klassischen Physik beschrieben werden müssen, und diese Apparate „unkontrollierbar“ auf „Mikrosysteme“ einwirken.

Vom Standpunkt der realistischen Konzeption aus betrachtet muss die Quantenmechanik (oder eine andere Theorie, welche diese ersetzt) durch Anwendung auf das aus Apparat und „Mikrosystem“ bestehende zusammengesetzte System *erklären*, was bei Präparation und Messung geschieht.

4. Was ist real?

Allein die Phänomene (z. B. Zeigerausschläge, Nebelkammerspuren) oder auch Teilchen und Felder (eingeschränkt real im Sinne von Bohrs Dualismus und Komplementarität oder uneingeschränkt real, aber eingeschränkt beobachtbar, im Sinne von de Broglie und Bohm) oder gar nur die Sinneseindrücke?

5. Wie ist der Anwendungsbereich abzugrenzen?

Gilt die (nichtrelativistische) Quantenmechanik für *beliebige* (nichtrelativistische) Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden („landläufige“ Ansicht) oder nur für „Mikrosysteme“?

In der Standardformulierung – und zwar in der im Folgenden zugrunde gelegten „offenen“ Variante dieser Formulierung – legt man sich in diesen Punkten wie folgt fest:

Standardinterpretation
<ol style="list-style-type: none"><li>1. <math>\psi</math> beschreibt eine <i>gedachte Gesamtheit</i> von unendlich vielen gleich präparierten Systemen.</li><li>2. Die Wahrscheinlichkeiten werden als <i>relative Häufigkeiten</i> in einer solchen gedachten Gesamtheit interpretiert. Im Experiment wird sie annähernd durch eine tatsächliche Gesamtheit von <math>\mathcal{N}</math> Systemen (<math>\mathcal{N}</math> hinreichend groß) verwirklicht.</li><li>3. Präparations- und Messapparate werden klassisch beschrieben. Die Konzepte <i>Präparation</i> und <i>Messung</i> gehen schon in die Formulierung der Grundgesetze ein.</li></ol>

<sup>24</sup>Siehe Ballentine, L. E.: Quantum Mechanics. World Scientific, New Jersey 1998.

4. Die *Phänomene* (Wirkungsübertragungen) werden als real angesehen. Die Quantenmechanik liefert keinerlei Aussagen bezüglich „Existenz“ bzw. „Verhalten“ eines Einzelsystems zwischen Präparation und Messung<sup>a</sup>, sie liefert lediglich statistische Aussagen für die *Ergebnisse von Messungen*<sup>b</sup> an einer Gesamtheit von Systemen.
5. Anwendungsbereich sind von „Mikrosystemen“ ausgelöste Phänomene (Wirkungsübertragungen). Die Frage der Abgrenzung „nach oben“ wird offen gelassen.

<sup>a</sup>Die Antwort auf diesbezügliche Fragen lautet «No comment».

<sup>b</sup>Wir sprechen deshalb auch nicht von *Aufenthaltswahrscheinlichkeiten*, sondern von *An-treffwahrscheinlichkeiten*.

### 3.6 Statistische Kausalität. Aufgabe der Quantenmechanik

Nach dem heutigen Stand unserer Kenntnisse sind nur Wahrscheinlichkeitsaussagen für einzelne „Mikrosysteme“ möglich. „Erklären“ heißt zurückführen der Wahrscheinlichkeiten bzw. der relativen Häufigkeiten in einer Gesamtheit von „Mikrosystemen“ auf einige universelle statistische Gesetze. Die Wahrscheinlichkeiten sind für eine vorgegebene Präparation und vorgegebene Versuchsbedingungen streng determiniert. Man spricht deshalb von *statistischer Kausalität*.

Ob man eine derartige physikalische Theorie als befriedigend empfindet oder nicht, hängt von der philosophischen Einstellung ab. Die einen sehnen sich nach einem „tieferen Erklären“, die anderen befriedigt, dass die Welt nicht nur ein großes „Räderwerk“ ist. „Kryptodeterministisches Erklären“ unter Benützung prinzipiell „verborgener Parameter“ (z. B. die bohmsche Formulierung der Quantenmechanik) stellt jedenfalls *kein* „tieferes Erklären“, sondern lediglich eine andere Sprechweise dar.

Auf der Basis der zugrunde gelegten allgemeinen Grundsätze und Sprachregelungen können wir nun die Aufgabe der Quantenmechanik in einer vorläufigen Weise skizzieren.  
*Aufgabe der Quantenmechanik:*

- Der mathematische Formalismus muss zu berechnen gestatten, welche Werte physikalische Messgrößen (Observablen) bei einer Messung an einem Einzelsystem überhaupt annehmen können.

Beispiele: Messwertkontinua  $(-\infty, +\infty)$  bei Orts- und Impulskomponenten; diskretes Messwertspektrum  $\{m\hbar, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  bei Bahndrehimpulskomponenten; Messwertkontinuum  $[0, +\infty)$  für die Energie eines kräftefreien Teilchens<sup>25</sup>; diskretes Messwertspektrum  $\{E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_0, n = 0, 1, 2, \dots\}$  für die Energie eines

<sup>25</sup>Wir lassen von nun an die Anführungszeichen bei Teilchen, Mikroobjekt etc. weg.

linearen harmonischen Oszillators usw.

- Die Grundgesetze müssen es gestatten, für ein quantenmechanisches System bei Kenntnis der Präparation zu einem Anfangszeitpunkt  $t_0$  die Wahrscheinlichkeiten für das Erhalten der möglichen Messwerte einer beliebigen Observablen bei deren Messung zu einem Zeitpunkt  $t > t_0$  zu berechnen.



# Kapitel 4

## Grundkonzepte der Quantenmechanik

### 4.1 Unbestimmtheitsprinzip und Korrespondenzprinzip

Die Diskussion des Doppelspaltversuches mit materiellen Mikroobjekten hat gezeigt, dass der Begriff der Teilchenbahn mit der Interferenzverteilung unvereinbar ist, wofern man nicht die Konzepte einer „wahren“, aber prinzipiell „verborgenen“ Teilchenbahn und eines „wahren“, aber prinzipiell „verborgenen“ Führungsfeldes einführen will.

Das Unbestimmtheitsprinzip wird meist so ausgesprochen: „Ein Mikroteilchen besitzt nicht zugleich einen scharfen Ort und einen scharfen Impuls“. (Aus  $x(t)$ ,  $p(t)$  würde sich ein infinitesimales Bahnstück  $dx = x(t + dt) - x(t) = (p(t)/m)dt$  ergeben.) Alternativ dazu findet man auch die Aussage „Teilchenort und Teilchenimpuls sind bei einem Mikroobjekt nicht miteinander verträglich“. Diese Formulierungen kranken daran, dass der Impulsbegriff, der in der klassischen Teilchentheorie durch  $p(t) = m dx(t)/dt$  definiert ist, bei Aufgeben des Bahnbegriffes zunächst theoretisch „in der Luft hängt“, da es dann keine Funktion  $x(t)$  gibt, die man nach  $t$  ableiten kann. Wir müssen erst „erraten“, wie Teilchenort und Teilchenimpuls in der Quantenmechanik zu beschreiben sind. Wir ziehen deshalb die folgende Formulierung vor:

*Heuristisches Prinzip:* **Unbestimmtheitsprinzip**

Das Konzept der Bahnkurve ist für Mikroobjekte im Allgemeinen nicht brauchbar.

In Abschnitt 3.1 haben wir gesehen, dass es Erfahrungsbereiche gibt, in denen die klassische Teilchentheorie erfolgreich ist, Erfahrungsbereiche, in denen die klassische de Broglie-Schrödinger-Materiefeldtheorie erfolgreich ist und Erfahrungsbereiche, in denen beide versagen. Es ist nicht vorstellbar, dass eine neue Theorie *alle* diese Erfahrungsbereiche „überdecken“ kann, ohne gewisse strukturelle Ähnlichkeiten mit der klassischen Teilchentheorie einerseits und der klassischen Feldtheorie andererseits aufzuweisen. Diese begründete Vermutung sprechen wir als heuristisches Prinzip aus.

*Heuristisches Prinzip:* **Korrespondenzprinzip**

Es muss ein struktureller Zusammenhang zwischen der Quantenmechanik und der klassischen Teilchentheorie einerseits und zwischen der Quantenmechanik

und der klassischen Feldtheorie andererseits bestehen, welcher sich in formalen Analogien, in einer Korrespondenz von Begriffen und in Zuordnungsregeln zwischen Messgrößen und Präparations- bzw. Messapparaten manifestieren muss.

Die klassischen Theorien werden deshalb für die konventionelle Formulierung der Quantenmechanik als *Vortheorien* benötigt.<sup>1</sup> Dieser Umstand ergibt sich auch daraus, dass wir Mikrosystemen im Rahmen der konventionellen Formulierung grundsätzlich nur dadurch Attribute zuschreiben, indem wir sie mit Apparaten konfrontieren, deren Arbeitsweise mit den Begriffen der klassischen Physik beschrieben wird.

## 4.2 Grundgesetze und Korrespondenzregeln

Als *Grundgesetze* bezeichnen wir die logisch strengen Bausteine der Quantenmechanik. Die quantenmechanischen Grundgesetze lassen sich in einer abstrakten, allgemeinen, d. h. für quantenmechanische Systeme mit beliebig vielen Freiheitsgraden, gültigen Form anschreiben.<sup>2</sup> Um ein konkretes quantenmechanisches System beschreiben zu können, benötigt man darüber hinaus einen Übersetzungsmechanismus zwischen klassischen und quantenmechanischen Messgrößen. Da dieser Übersetzungsmechanismus im Allgemeinen weder eindeutig<sup>3</sup> noch vollständig<sup>4</sup> ist, klammert man ihn besser aus der eigentlichen Axiomatik aus und spricht von Übersetzungsregeln bzw. von Korrespondenzregeln, welche die Grundgesetze ergänzen. Die *Korrespondenzregeln* lassen sich nicht allgemein, sondern immer nur für eine spezielle Systemklasse formulieren. Eine *Systemklasse* ist dabei durch Art und Anzahl der Freiheitsgrade gekennzeichnet. Beispielsweise gehören das Wasserstoffatom und der Deuteriumkern zur selben Systemklasse. Beide Systeme bestehen aus zwei nichtidentischen Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen und besitzen sechs räumliche Freiheitsgrade und zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Freiheitsgrade.

Die einfachste Systemklasse bilden Systeme mit einem spinlosen Teilchen, welches sich nur in einer Raumdimension „bewegen“ kann (Beispiele: kräftefreies Teilchen, linearer harmonischer Oszillator, Teilchen bei Vorhandensein eines eindimensionalen Potentialgrabens oder Potentialwalles etc.). Systeme dieser Art besitzen nur einen einzigen, und zwar räumlichen, Freiheitsgrad. Die Zustandsbeschreibung erfolgt durch eine Zustandsfunktion, welche außer von der Zeit  $t$  nur von einer räumlichen Variablen  $x \in \mathbb{R}$  abhängt:  $\psi(x, t)$ . Die Korrespondenzregeln besitzen für diese Systemklasse

---

<sup>1</sup>Dagegen hätte man die relativistische Mechanik im Prinzip ohne Kenntnis der newtonschen Mechanik formulieren können.

<sup>2</sup>Die Anzahl der Freiheitsgrade muss natürlich *endlich* sein. Für Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden benötigt man eine *Quantenfeldtheorie*.

<sup>3</sup>Übersetzen einer kommutativen Algebra in eine nichtkommutative Algebra; s. Abschnitt 4.7.

<sup>4</sup>Auftreten so genannter „innerer Freiheitsgrade“ (z. B. Spinfreiheitsgrade), welche kein klassisches Analogon besitzen.



eine übersichtliche Form, die sich mithilfe des Unbestimmtheitsprinzips und des Korrespondenzprinzips plausibel machen lässt. Auch die Konkretisierung und Analyse der Grundgesetze führt man zweckmäßigerweise zuerst einmal für diese Systemklasse durch. Es ist klar, dass bei komplizierteren Systemen viele zusätzliche Facetten auftreten. Das Wasserstoffmolekül etwa ist ein System mit zwei Protonen und zwei Elektronen und besitzt daher zwölf räumliche Freiheitsgrade sowie vier Spin- $\frac{1}{2}$ -Freiheitsgrade. Die Zustandsfunktion hängt entsprechend außer von der Zeit  $t$  von sechzehn weiteren Veränderlichen ab,  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, t)$ , wobei die Spinvariablen  $\sigma_a$  jeweils zwei diskrete Werte (entsprechend „Spin auf“ und „Spin ab“) annehmen können. Die wesentlichen Aspekte der Quantenmechanik lassen sich aber schon anhand der im Folgenden fast ausschließlich betrachteten Systeme mit einem einzigen Freiheitsgrad erklären.

### 4.3 „Rateweg“ zur Quantenmechanik

Die Grundgesetze der Quantenmechanik besitzen in der Standardformulierung eine inhaltlich sehr dogmatische und mathematisch sehr abstrakte Form<sup>5</sup>, die wir nicht einfach „vom Himmel schneien lassen“ wollen. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass man für Systeme mit einem spinlosen Teilchen in einer Raumdimension mithilfe des Unbestimmtheitsprinzips und des Korrespondenzprinzips ausgehend von der Schrödingergleichung und der bornschen Interpretation des Absolutquadrates der Zustandsfunktion einige grundlegende Elemente der Theorie inklusive der mathematischen Strukturen „erraten“ kann. Erst danach gehen wir zur abstrakten deduktiven Darstellung für allgemeine Systeme über.

Wir schreiben zuerst die grundlegenden Beziehungen der klassischen Teilchentheorie für ein Teilchen in einer Raumdimension sowie der klassischen Materiefeldtheorie in einer Raumdimension an. Für die klassische Teilchentheorie verwenden wir dabei die hamiltonsche Formulierung, da sich diese als Ausgangspunkt besser eignet als die newtonsche oder lagrangesche Formulierung.

Grund dafür ist, dass die Hamiltonfunktion der klassischen Teilchentheorie dem Differentialoperator korrespondiert, welcher auf der „linken“ Seite der klassischen Materiefeldgleichung (3.9) vorkommt. Beide haben mit der jeweiligen Energie zu tun<sup>6</sup> und bestimmen die jeweilige Dynamik.

In der **klassischen hamiltonschen Mechanik** eines Punktteilchens der Masse  $m$ , welches sich in einer Raumdimension  $x \in \mathbb{R}$  bewegt, ist die grundlegende Größe die Hamiltonfunktion  $H(x, p)$ . Für ein Teilchen in einem zeitunabhängigen („konservativen“) Kraftfeld  $K(x)$ , das sich gemäß

$$K(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \quad (4.1)$$

<sup>5</sup>Manche Kritiker bezeichnen diese Gesetze deshalb etwas abschätzig als „Quantengrammatik“.

<sup>6</sup>Der besagte Differentialoperator geht – wie man zeigen kann – in den Ausdruck für die Energiedichte des Materiefeldes ein; s. Gl. (4.38).

aus einem Potential  $V(x)$  herleiten lässt, lautet die Hamiltonfunktion speziell

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x). \quad (4.2)$$

Teilchenort und Teilchenimpuls zu einem Zeitpunkt  $t > t_0$  können dann aus den **hamiltonschen kanonischen Bewegungsgleichungen**

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left. \frac{\partial H(x, p)}{\partial p} \right|_{\substack{x=x(t) \\ p=p(t)}} = \frac{p(t)}{m}, \quad (4.3)$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = \left. -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x(t) \\ p=p(t)}} = \left. -\frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x(t)} = K(x(t)) \quad (4.4)$$

bei vorgegebenen Anfangsbedingungen  $x(t_0)$ ,  $p(t_0)$  berechnet werden. Die Erhaltungsgröße

$$H(x(t), p(t)) = H(x(t_0), p(t_0)) = E \quad (4.5)$$

ist die (Gesamt-)Energie des Teilchens. Schreibt man statt  $T(p(t))$ ,  $V(x(t))$  einfach  $T(t)$ ,  $V(t)$ , so hat man

$$E(t) = T(t) + V(t) = E(t_0) = T(t_0) + V(t_0), \quad t \geq t_0. \quad (4.6)$$

Kinetische und potentielle Energie für sich sind keine Erhaltungsgrößen (Konstanten der Bewegung), außer es handelt sich um ein kräftefreies Teilchen. Für ein kräftefreies Teilchen ist  $V(x)$  konstant. Bei entsprechender Wahl des Energienullpunktes ist diese Konstante null und man hat  $H(x, p) = T(p)$ .

Beispiel: Linearer harmonischer Oszillator mit Kraftzentrum im Ursprung

Ist  $m$  die Teilchenmasse und  $f$  die Federkonstante, so gilt für die klassische Eigenfrequenz  $\omega_0 = (f/m)^{1/2}$ , und Potential bzw. Kraftgesetz sind durch

$$V(x) = \frac{m\omega_0^2}{2} x^2, \quad K(x) = -fx \quad (4.7)$$

gegeben. Hamiltonfunktion und kanonische Bewegungsgleichungen lauten dann

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2, \quad (4.8)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m}, \quad \frac{dp(t)}{dt} = -m\omega_0^2 x(t). \quad (4.9)$$

Wählt man  $t_0 = 0$ , so erhält man als Lösung der Bewegungsgleichungen

$$x(t) = x(0) \cos \omega_0 t + \frac{p(0)}{m\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad (4.10)$$

$$p(t) = p(0) \cos \omega_0 t - m\omega_0 x(0) \sin \omega_0 t. \quad (4.11)$$

In der **klassischen Materiefeldtheorie** beschreibt man ein Materiefeld, das einem äußeren Kraftfeld  $K(x)$  unterworfen ist, durch eine komplexwertige **Materiefeldstärke**  $\psi(x, t)$ , welche für  $t > t_0$  bei gegebener Anfangsbedingung  $\psi(x, t_0)$  aus der **de Broglie-Schrödinger-Materiefeldgleichung**

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right\} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (4.12)$$

folgt. Dabei wird

$$\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2 \quad (4.13)$$

als **Materiedichte** interpretiert. Voraussetzung dafür, dass dies eine vernünftige Interpretation ist, ist natürlich das Bestehen einer entsprechenden Kontinuitätsgleichung, welche sich aus Gl. (4.12) herleiten lassen muss. Schreiben wir Gl. (4.12) und die dazu konjugiert komplexe Gleichung an,

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi &= i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + V\psi^* &= -i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t}, \end{aligned}$$

multiplizieren wir die obere Gleichung mit  $\psi^*/i\hbar$ , die untere Gleichung mit  $-\psi/i\hbar$  und addieren wir die erhaltenen Beziehungen, so ergibt sich

$$-\frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right) = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$$

bzw.

$$-\frac{\hbar}{2mi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi).$$

Man sieht, dass man  $\rho$  Gl. (4.13) tatsächlich als Materiedichte und

$$\mathbf{j}(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^*(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - \psi(x, t) \frac{\partial \psi^*(x, t)}{\partial x} \right) \mathbf{e}_x \quad (4.14)$$

als **Materiestromdichte** interpretieren kann, da dann die **Kontinuitätsgleichung**

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.15)$$

gilt, welche physikalisch die *Erhaltung der Masse* ausdrückt.<sup>7</sup> Falls es keine Materiequellen bzw. -senken im Unendlichen gibt<sup>8</sup> streben  $\psi$  und  $\partial\psi/\partial x$  im Unendlichen gegen null und

<sup>7</sup>Siehe die analogen Überlegungen bezüglich der Ladungserhaltung in der klassischen Elektrodynamik.

<sup>8</sup>Dass es im *Endlichen* keine Materiequellen bzw. -senken gibt, sieht man aus der Differentialgleichung (4.12), welche *homogen* ist, also keine Quellterme enthält.

es folgt

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} dx \rho(x, t) = -\frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Die Gesamtmasse ist also zeitlich konstant:

$$\int_{\mathbb{R}} dx |\psi(x, t)|^2 = \int_{\mathbb{R}} dx |\psi(x, t_0)|^2 = M, \quad t \geq t_0. \quad (4.16)$$

Der strukturmäßige Anschluss der **Quantenmechanik** an die klassische Materiefeldtheorie erfolgt dadurch, dass man für *Einteilchensysteme* eine **Zustandsfunktion**  $\psi(x, t)$  einführt, welche derselben Differentialgleichung genügt wie die klassische Materiefeldstärke für die betreffende Materieart (z. B. Elektronmaterie). In der Quantenmechanik wird diese Differentialgleichung dann als **zeitabhängige Schrödingergleichung** bezeichnet. Es wird allerdings  $\psi(x, t)$  gemäß

$$\int_{\mathbb{R}} dx |\psi(x, t)|^2 = \int_{\mathbb{R}} dx |\psi(x, t_0)|^2 = 1, \quad t \geq t_0 \quad (4.17)$$

„umnormiert“<sup>9</sup> und  $\rho(x, t) \rightarrow W(x, t)$  als **Antreffwahrscheinlichkeitsdichte**<sup>10</sup>,  $\mathbf{j}(x, t)$  als **Antreffwahrscheinlichkeitsstromdichte** interpretiert (bornsche Interpretation). Die Kontinuitätsgleichung drückt dann die *Erhaltung der Antreffwahrscheinlichkeit* aus.

Nach Born gibt also

$$W(x, t) dx = |\psi(x, t)|^2 dx \quad (4.18)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür an, bei einer Messung des Teilchenortes bei einem Einzelsystem (= Teilchen) der durch die Zustandsfunktion  $\psi(x, t)$  charakterisierten Gesamtheit<sup>11</sup> einen Messwert aus  $dx$  um  $x$  zu finden.<sup>12</sup> Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zu einem festen Zeitpunkt an *irgendeinem* Ort längs der  $x$ -Achse anzutreffen, muss natürlich eins sein, was seinen mathematischen Ausdruck in Gl. (4.17) findet. Führt man die Ortsmessung zu dem betreffenden Zeitpunkt  $t$  an  $\mathcal{N}$  ( $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ ) Einzelsystemen der Gesamtheit durch, so erhält man eine durch  $\mathcal{N}W(x, t)$  gegebene Verteilung der Messwerte,

<sup>9</sup>Die Lösungen der Differentialgleichung (4.12) sind nur bis auf einen konstanten Faktor  $\alpha \in \mathbb{C}$  bestimmt.

<sup>10</sup>Ab nun verwenden wir wegen der geänderten Normierung und geänderten Interpretation statt  $\rho$  die Bezeichnung  $W$ .

<sup>11</sup>Die Zustandsfunktion  $\psi(x, t)$ ,  $t > t_0$ , folgt aus Gl. (4.12) bei gegebener Zustandsfunktion  $\psi(x, t_0)$ . Letztere wiederum kann in der Quantenmechanik angegeben werden, wenn man die vollständige Präparation spezifiziert, durch welche die betreffende Gesamtheit zum Zeitpunkt  $t_0$  hergestellt wurde; s. dazu Abschnitt 4.15.

<sup>12</sup>Diese Sprechweise ist üblich, obwohl ein Messapparat nur die Feststellung ermöglicht, dass ein Messwert in einem bestimmten *endlichen* Intervall liegt. Siehe dazu die Bemerkung 5 zum 3. Grundgesetz auf Seite 286.

d. h. man findet  $\mathcal{N}W(x, t) dx$ -mal einen Teilchenort aus  $dx$  um  $x$ . Im Mittel findet man entsprechend für den Teilchenort zum Zeitpunkt  $t$  den Wert

$$\bar{x}(t) = \int_{\mathbb{R}} dx x W(x, t) = \int_{\mathbb{R}} dx x |\psi(x, t)|^2. \quad (4.19)$$

Als nächstes wollen wir den strukturmäßigen Anschluss an die klassische Teilchentheorie herstellen. Bei unserer Vorgangsweise benützen wir im Sinne des Korrespondenzprinzips die folgende Strategie: Wir versuchen, von den Aussagen der klassischen Teilchentheorie so viel wie möglich beizubehalten, wir geben also „keinen Fußbreit Boden“ ohne Notwendigkeit auf. Die Notwendigkeit, doch etwas aufgeben zu müssen, ergibt sich natürlich aus dem Unbestimmtheitsprinzip. Ohne Bahnbegriff gibt es keine Funktionen  $x(t)$ ,  $p(t)$ , und die kanonischen Bewegungsgleichungen können daher nicht beibehalten werden. Damit es aber möglich ist, dass sich Wellenpakete im Einklang mit der Erfahrung zumindest unter bestimmten Voraussetzungen für das Kraftgesetz (z. B. im Fall der Kräftefreiheit) nach dem klassischen Bewegungsgesetz fortpflanzen können, muss zumindest die „erste“ kanonische Bewegungsgleichung, in welche das Kraftgesetz nicht eingeht, für die *Mittelwerte* in der Gesamtheit gültig bleiben, d. h. es muss

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \frac{\bar{p}(t)}{m} \quad (4.20)$$

gelten. Wir untersuchen deshalb, wie sich der Mittelwert (4.19) aufgrund der zeitabhängigen Schrödingergleichung zeitlich ändert. Ergibt sich dabei tatsächlich eine Beziehung der Form (4.20), so eröffnet sich damit zugleich eine Möglichkeit zu „erraten“, wie das Attribut Teilchenimpuls in der Quantenmechanik zu beschreiben ist. Wir formen also

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \int_{\mathbb{R}} dx x \frac{\partial}{\partial t} |\psi(x, t)|^2$$

mithilfe der zeitabhängigen Schrödingergleichung bzw. – einfacher – mithilfe der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(x, t)|^2 = -\frac{\hbar}{2mi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)$$

um und erhalten

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = -\frac{\hbar}{2mi} \int_{\mathbb{R}} dx x \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right). \quad (4.21)$$

Im weiteren Verlauf des „Rateweges“ werden wir öfter partiell integrieren und dabei stets ohne nähere Diskussion annehmen, dass  $\psi$  und alle auftretenden Ableitungen von  $\psi$  im Unendlichen hinreichend rasch verschwinden, sodass alle „Randterme“ für  $x = \pm\infty$  null sind und daher weggelassen werden können.<sup>13</sup>

<sup>13</sup>Die anzustellenden Überlegungen sind von folgender Art: Ist  $\psi$  Lösung von Gl. (4.12), so muss  $\psi$  und  $\partial\psi/\partial x$  stetig sein, wofern das Potential höchstens Sprungstellen besitzt. Damit das uneigentliche Integral in Gl. (4.19) existiert, muss  $\psi$  im Unendlichen stärker als  $\frac{1}{x}$  verschwinden usf.

Partielle Integration im Ausdruck (4.21) gibt dann

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \frac{\hbar}{2mi} \int_{\mathbb{R}} dx \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right).$$

Integriert man hier im zweiten Term nochmals partiell, so folgt weiter

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \frac{\hbar}{mi} \int_{\mathbb{R}} dx \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} dx \psi^*(x, t) \left( -i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right). \quad (4.22)$$

Damit haben wir tatsächlich eine Beziehung der Form (4.20) erhalten und wir interpretieren entsprechend das Integral in Gl. (4.22) als Mittelwert des Teilchenimpulses:

$$\bar{p}(t) = \int_{\mathbb{R}} dx \psi^*(x, t) \left( -i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right). \quad (4.23)$$

Bei einer Messung des Teilchenimpulses an  $\mathcal{N}$  ( $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ ) Einzelsystemen (= Teilchen) der durch  $\psi(x, t)$  charakterisierten Gesamtheit sollte sich also eine Verteilung der Messwerte ergeben, deren Mittelwert durch Gl. (4.23) gegeben ist.

Gehen wir im Einklang mit der Erfahrung von der Annahme aus, dass für den Teilchenimpuls als Messwerte wie in der klassischen Mechanik beliebige Werte  $p \in \mathbb{R}$  möglich sind (Messwertkontinuum)<sup>14</sup>, so muss es eine durch  $\psi(x, t)$  bestimmte kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung  $W(p, t)$  geben, für die gilt<sup>15</sup>:

$$1 = \int_{\mathbb{R}} dp W(p, t), \quad (4.24)$$

$$\bar{p}(t) = \int_{\mathbb{R}} dp p W(p, t). \quad (4.25)$$

Es stellt sich die Frage, welche Form die Integraltransformation besitzt, welche von der Ortsvariablen  $x$  auf die Impulsvariable  $p$  führt. Da der in Gl. (4.23) auftretende Differentialoperator  $-i\hbar \partial/\partial x$  auf die Exponentialfunktion  $e^{(i/\hbar)px}$  wirkend gerade den für Gl. (4.25) benötigten Faktor  $p$  „erzeugt“, liegt die Vermutung nahe, dass es sich dabei um die fouriersche Integraltransformation handelt. Die Fouriertransformation und ihre

<sup>14</sup>Die entsprechende Annahme, dass für den Teilchenort in der Quantenmechanik wie in der klassischen Mechanik als Messwerte beliebige Werte  $x \in \mathbb{R}$  möglich sind (Messwertkontinuum), wurde *implizit* durch die bornsche Interpretation eingeführt.

<sup>15</sup>Es ist üblich, für die Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich des Teilchenimpulses dasselbe Funktionssymbol zu verwenden wie für die Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich des Teilchenortes. Solange man für das Argument im ersteren Fall nur die Bezeichnungen  $p, p', p''$ , im anderen Fall nur die Bezeichnungen  $x, x', x''$  benützt, ist eine Verwechslung nicht möglich.

Umkehrtransformation<sup>16</sup> lauten für die Zustandsfunktion<sup>17</sup>

$$\tilde{\psi}(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-(i/\hbar)px} \psi(x, t), \quad (4.26)$$

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} dp e^{(i/\hbar)px} \tilde{\psi}(p, t). \quad (4.27)$$

Setzt man Transformation und Umkehrtransformation wechselweise ineinander ein, so erhält man die formalen Beziehungen

$$\delta(p' - p'') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dx e^{(i/\hbar)(p' - p'')x}, \quad (4.28)$$

$$\delta(x' - x'') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp e^{(i/\hbar)p(x' - x'')}, \quad (4.29)$$

welche die Orthogonalität und „Normierung“ bzw. die Vollständigkeit der fourierschen „Entwicklungsfunktionen“ ausdrücken.<sup>18</sup>

Einsetzen von Gl. (4.27) in Gl. (4.17) gibt

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dp' \int_{\mathbb{R}} dp e^{-(i/\hbar)p'x} \tilde{\psi}^*(p', t) e^{(i/\hbar)px} \tilde{\psi}(p, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dp' \int_{\mathbb{R}} dp \tilde{\psi}^*(p', t) \tilde{\psi}(p, t) \underbrace{\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dx e^{(i/\hbar)(p-p')x}}_{\delta(p-p')}, \end{aligned}$$

also

$$1 = \int_{\mathbb{R}} dp |\tilde{\psi}(p, t)|^2. \quad (4.30)$$

<sup>16</sup>Es wird hier die „symmetrische“ Schreibweise der fourierschen Integraltransformation verwendet. Der Faktor  $1/(2\pi\hbar)^{1/2}$  anstelle des gewohnten Faktors  $1/(2\pi)^{1/2}$  rührt daher, dass statt der Kreiswellenzahl  $k$  die Impulsvariable  $p = \hbar k$  als Integrationsveränderliche benützt wird.

<sup>17</sup>Die Zeitvariable  $t$  spielt dabei die Rolle eines Parameters. Es ist üblich für die Fouriertransformierte der Zustandsfunktion  $\psi$  ein anderes Funktionssymbol ( $\tilde{\psi}$  oder  $\varphi$ ) zu verwenden, obwohl auch hier keine Verwechslung möglich wäre, solange man als Argumente nur die Bezeichnungen  $p, p', p''$  bzw.  $x, x', x''$  benützt.

<sup>18</sup>Diese Terminologie wird in Abschnitt 4.7 ausführlich erklärt; siehe insbesondere Seite 276.

Analog erhält man durch Einsetzen von Gl. (4.27) in Gl. (4.23)

$$\begin{aligned}\bar{p}(t) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dp' \int_{\mathbb{R}} dp e^{-(i/\hbar)p'x} \tilde{\psi}^*(p', t) (-i\hbar) \frac{i}{\hbar} p e^{(i/\hbar)px} \tilde{\psi}(p, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dp' \int_{\mathbb{R}} dp p \tilde{\psi}^*(p', t) \tilde{\psi}(p, t) \underbrace{\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dx e^{(i/\hbar)(p-p')x}}_{\delta(p-p')},\end{aligned}$$

also

$$\bar{p}(t) = \int_{\mathbb{R}} dp p |\tilde{\psi}(p, t)|^2. \quad (4.31)$$

Die Beziehungen (4.30), (4.31) legen die Interpretation von  $|\tilde{\psi}(p, t)|^2$  als Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich des Teilchenimpulses nahe. Es gibt dann

$$W(p, t) dp = |\tilde{\psi}(p, t)|^2 dp = \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \int_{\mathbb{R}} dx e^{-(i/\hbar)px} \psi(x, t) \right|^2 dp \quad (4.32)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür an, bei einer Messung des Teilchenimpulses bei einem Einzelsystem (= Teilchen) der durch die Zustandsfunktion  $\psi(x, t)$  charakterisierten Gesamtheit einen Messwert aus  $dp$  um  $p$  zu finden.

Weitere wichtige Observablen der betrachteten Systemart sind die potentielle Energie, die kinetische Energie und die Gesamtenergie. Da sich das Unbestimmtheitsprinzip, d. h. die Nichtverträglichkeit von Teilchenort und Teilchenimpuls, nur bei Messgrößen bemerkbar machen kann, welche klassisch durch Funktionen von  $x$  und  $p$  beschrieben werden, können wir für potentielle und kinetische Energie im Einklang mit der Erfahrung annehmen, dass das Messwertspektrum dasselbe ist wie in der klassischen Mechanik. Die möglichen Messwerte der potentiellen Energie des Teilchens sind dann durch  $V(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , gegeben. (Bei stetigem nicht konstantem  $V(x)$  bedeutet dies ein Messwertkontinuum, z. B.  $[0, +\infty)$  bei  $V(x) = m\omega_0^2 x^2/2$ .) Mit dieser Annahme folgt, dass

$$\bar{V}(t) = \int_{\mathbb{R}} dx V(x) W(x, t) = \int_{\mathbb{R}} dx V(x) |\psi(x, t)|^2 \quad (4.33)$$

den Mittelwert der potentiellen Energie des Teilchens in der durch die Zustandsfunktion  $\psi(x, t)$  charakterisierten Gesamtheit darstellt.

Analog nehmen wir im Einklang mit der Erfahrung an, dass die möglichen Messwerte der kinetischen Energie des Teilchens durch  $T(p) = p^2/2m$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , gegeben sind (Messwertkontinuum  $[0, +\infty)$ ). Mit dieser Annahme folgt für den Mittelwert der kinetischen Energie in der durch die Zustandsfunktion  $\psi(x, t)$  charakterisierten Gesamtheit

$$\bar{T}(t) = \int_{\mathbb{R}} dp \frac{p^2}{2m} W(p, t) = \int_{\mathbb{R}} dp \frac{p^2}{2m} |\tilde{\psi}(p, t)|^2, \quad (4.34)$$



wobei  $\tilde{\psi}(p, t)$  durch Gl. (4.26) gegeben ist.

Setzt man Gl. (4.26) in den Ausdruck (4.34) ein und führt man eine analoge Rechnung wie beim Beweis der Gleichwertigkeit von Gl. (4.23) und Gl. (4.31) (nur in „umgekehrter Richtung“) durch, so erhält man als zu (4.34) gleichwertigen Ausdruck

$$\bar{T}(t) = \int_{\mathbb{R}} dx \psi^*(x, t) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \right). \quad (4.35)$$

Eine neue Situation ergibt sich aufgrund der Nichtverträglichkeit von Teilchenort und Teilchenimpuls, wenn wir die *Gesamtenergie* betrachten. Klassisch kann man die Gesamtenergie entweder als „Ganzes“ messen oder man kann kinetische und potentielle Energie *zugleich* messen und die Messwerte addieren. In der Quantenmechanik sind kinetische und potentielle Energie des Teilchens nicht verträglich, da Teilchenimpuls und Teilchenort nicht verträglich sind. Es kann also keinen Messapparat geben, der kinetische und potentielle Energie zugleich misst.<sup>19</sup> Die Gesamtenergie kann daher in der Quantenmechanik nur als „Ganzes“ gemessen werden. Der erhaltene Messwert kann *nicht* als Summe einer kinetischen und einer potentiellen Energie gedacht werden. (Gerade diese Tatsache macht es möglich, dass z. B. beim harmonischen Oszillator das Messwertspektrum der Gesamtenergie in der Quantenmechanik rein diskret ist, obwohl die Messwertspektren der kinetischen und der potentiellen Energie beide rein kontinuierlich sind.) Die klassische Beziehung (4.6), welche Messwerte von Gesamtenergie, kinetischer Energie und potentieller Energie verknüpft, kann also in der Quantenmechanik nicht beibehalten werden. Es liegt nahe zu versuchen, diese Beziehung für die zugehörigen Mittelwerte beizubehalten, d. h. die durch

$$\bar{E}(t) = \bar{T}(t) + \bar{V}(t) = \int_{\mathbb{R}} dx \psi^*(x, t) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right\} \psi(x, t) \quad (4.36)$$

definierte Größe als Mittelwert der Gesamtenergie zu interpretieren.

Wie kann man die Beziehung  $\bar{E}(t) = \bar{T}(t) + \bar{V}(t)$  *experimentell* überprüfen? Man präpariert  $\mathcal{N}$  Teilchen auf die gleiche Weise<sup>20</sup>, und zwar so, dass die Zustandsfunktion der Gesamtheit zum Zeitpunkt  $t$  durch  $\psi(x, t)$  gegeben ist. Diese Gesamtheit teilt man in drei (annähernd gleich große) Teilgesamtheiten. An der ersten dieser Teilgesamtheiten führt man zum Zeitpunkt  $t$  eine Messung der kinetischen Energie der Einzelsysteme (= Teilchen) durch und berechnet nach Abschluss der Messung „auf dem Papier“ den Mittelwert  $\bar{T}(t)$ . Analog bestimmt man mithilfe der zweiten Teilgesamtheit den Mittelwert  $\bar{V}(t)$  und mit der dritten Teilgesamtheit den Mittelwert  $\bar{E}(t)$ . Dann addiert man „auf dem Papier“  $\bar{T}(t)$  und  $\bar{V}(t)$  und vergleicht die erhaltene Summe mit  $\bar{E}(t)$ . – Beachte, dass bei diesem Vorgang an jedem Teilchen nur *eine* Messgröße, *entweder* die kinetische Energie *oder* die potentielle Energie *oder* die Gesamtenergie gemessen wird.

<sup>19</sup>In konventioneller Sprechweise: Ein Teilchen kann nicht zugleich einen „scharfen“ Wert der kinetischen Energie und einen „scharfen“ Wert der potentiellen Energie „besitzen“.

<sup>20</sup> $\mathcal{N}$  muss natürlich hinreichend groß sein.

Eine theoretische Stütze für die Richtigkeit der mit Gl. (4.36) verknüpften Annahme ist, dass die Größe  $\bar{E}(t)$  zeitlich konstant ist. Zunächst einmal folgt

$$\frac{d\bar{E}(t)}{dt} = \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right\} \psi + \int_{\mathbb{R}} dx \psi^* \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right\} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Zweimalige partielle Integration im ersten Term des zweiten Integrals gibt<sup>21</sup>

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbb{R}} dx \psi^* \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial t} = +\frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

und damit erhält man schließlich unter Benützung der zeitabhängigen Schrödingergleichung (4.12) und der dazu konjugiert komplexen Gleichung:

$$\frac{d\bar{E}(t)}{dt} = \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \underbrace{\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right\}}_{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}} \psi + \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\partial \psi}{\partial t} \underbrace{\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right\}}_{-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t}} \psi^* = 0.$$

Es gilt also tatsächlich

$$\bar{E}(t) = \bar{T}(t) + \bar{V}(t) = \bar{E}(t_0) = \bar{T}(t_0) + \bar{V}(t_0), \quad t \geq t_0. \quad (4.37)$$

Eine weitere theoretische Stütze für die Richtigkeit der Annahme bezüglich der Mittelwerte von kinetischer Energie, potentieller Energie und Gesamtenergie ist, dass der Ausdruck

$$u(x, t) = \psi^*(x, t) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right\} \psi(x, t) \quad (4.38)$$

in der de Broglie-Schrödinger-Materiefeldtheorie die Bedeutung der *Energiedichte des Materiefeldes* besitzt.

Um Hinweise zu finden, wie man die möglichen Messwerte der Energie (bei gegebenem  $V(x)$ ) berechnen kann und auf welche Weise man bei gegebener Zustandsfunktion  $\psi(x, t)$  die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Messwerte der Energie findet, lassen wir Revue passieren, was wir bisher „erraten“ haben.

Die Mittelwerte für Teilchenort, Teilchenimpuls, potentielle Energie, kinetische Energie und Gesamtenergie des Teilchens lassen sich alle in der Form

$$\int_{\mathbb{R}} dx \psi^*(x, t) \hat{A} \psi(x, t) \quad (4.39)$$

schreiben, wobei  $\hat{A}$  ein geeigneter „multiplikativer“ Operator oder Differentialoperator ist. Man bezeichnet  $\hat{A}$  als **Operator zur Observablen**  $\mathfrak{A}$ . Die Wirkung der entsprechenden Operatoren ist dabei gemäß Tabelle 4.1 definiert.

<sup>21</sup>Die auftretenden „Randterme“ sind null und werden daher weggelassen.

Tabelle 4.1: Beschreibung von Observablen durch Operatoren

Teilchenort $\mathfrak{x}$ :	Operator $\hat{x}$ : $(\hat{x}f)(x) := xf(x)$
Teilchenimpuls $\mathfrak{p}$ :	Operator $\hat{p}$ : $(\hat{p}f)(x) := -i\hbar \frac{df(x)}{dx}$
potentielle Energie $\mathfrak{B}$ :	Operator $\hat{V}$ : $(\hat{V}f)(x) := V(x)f(x)$
kinetische Energie $\mathfrak{Z}$ :	Operator $\hat{T}$ : $(\hat{T}f)(x) := -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2f(x)}{dx^2}$
(Gesamt-)Energie $\mathfrak{S}$ :	Operator $\hat{H}$ : $(\hat{H}f)(x) := \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right\} f(x)$

Die angeführten Operatoren bilden komplexwertige Funktionen einer reellen Variablen auf andere derartige Funktionen ab. Unterscheidet man in der Schreibweise sorgfältig zwischen dem Symbol  $f$  für eine *Funktion* und ihrem Funktionswert  $f(x)$  an der Stelle  $x$ , so schreibt sich die Abbildung der Funktion  $f$  auf die Funktion  $h$  durch den Operator  $\hat{A}$  in der Form  $h = \hat{A}f$ , woraus für den Funktionswert der Bildfunktion an der Stelle  $x$  die Beziehung  $h(x) = (\hat{A}f)(x)$  und für den Funktionswert an der Stelle  $x'$  die Beziehung  $h(x') = (\hat{A}f)(x')$  folgt. Physiker kümmern sich meist nicht um derartige „Haarspaltereien“. Sie schreiben  $h(x) = \hat{A}f(x)$  und verwenden anstelle der Formeln von Tabelle 4.1 die „schlampige“ Kurzschreibweise

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x, \\ \hat{p} &= -i\hbar \frac{d}{dx}, \\ \hat{V} &= V(x), \\ \hat{T} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}, \\ \hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x).\end{aligned}$$

Ist man sich der Problematik dieser Schreibweise bewusst, so kann nichts „passieren“. Beispielsweise wird man dann im Ausdruck  $\hat{x}f(x')$  für  $\hat{x}$  „automatisch“  $x'$  und *nicht*  $x$  einsetzen (Multiplikation mit dem *Argument*). Wir werden gelegentlich diese Kurzschreibweise benutzen.

An den Beziehungen von Tabelle 4.1 fällt auf, dass die Operatorgleichungen

$$\hat{V} = V(\hat{x}), \tag{4.40}$$

$$\hat{T} = T(\hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \tag{4.41}$$

$$\hat{H} = H(\hat{x}, \hat{p}) = \hat{T} + \hat{V} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \tag{4.42}$$

gelten, d. h. man erhält die Operatoren zu den Observablen  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{H}$ , indem man in den klassischen Ausdrücken  $T(p)$ ,  $V(x)$  und  $H(x, p)$  formal die Variablen  $x$ ,  $p$  durch die Operatoren  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$  ersetzt. Der Operator  $\hat{x}$  wird als **Ortsoperator**, der Operator  $\hat{p}$  als **Impulsoperator** und der Operator  $\hat{H}$  als **Hamiltonoperator** bezeichnet. Während die Hamiltonfunktion die klassische Dynamik bestimmt, bestimmt der Hamiltonoperator die quantenmechanische „Dynamik“. Die zeitabhängige Schrödingergleichung kann nämlich mit

$$\psi_t(x) \equiv \psi(x, t) \quad (4.43)$$

in der Form

$$\hat{H}\psi_t = i\hbar \frac{d\psi_t}{dt} \quad (4.44)$$

geschrieben werden. Die Schreibweise  $\psi_t(x)$  hat den Vorteil, dass sie zum Ausdruck bringt, dass die Zeit in der Quantenmechanik nur die Rolle eines Parameters spielt. (Siehe dazu Abschnitt 4.9.) Außerdem lässt sich mit ihrer Hilfe auch die Wirkung eines Operators auf die Zustandsfunktion mathematisch sauberer schreiben; z. B. hat man dann anstelle von Gl. (4.39)

$$\int_{\mathbb{R}} dx \psi_t^*(x) (\hat{A}\psi_t)(x).$$

Wir werden aus diesen Gründen in der Folge neben der konventionellen Schreibweise  $\psi(x, t)$  auch die Schreibweise  $\psi_t(x)$  verwenden.

Außerdem fällt auf, dass den nicht verträglichen Observablen  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{P}$  Operatoren zugeordnet sind, für die die Wirkung des Operatorproduktes  $\hat{x}\hat{p}$  von der Wirkung des Operatorproduktes  $\hat{p}\hat{x}$  *verschieden* ist, während es bei verträglichen Observablen wie  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{X}$  *nicht* auf die Reihenfolge der zugehörigen Operatoren ankommt. Wir kommen darauf später ausführlich zurück. Hier steht die Frage im Vordergrund, wie man die möglichen Messwerte der Energie und die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnen kann.

Beim Impuls haben wir gesehen, dass der Differentialoperator  $\hat{p} = -i\hbar \partial/\partial x$  auf die Exponentialfunktion  $e^{(i/\hbar)p x}$  wirkend das  $p$ -fache dieser Funktion ergibt, wobei  $p$  ein möglicher Messwert des Impulses ist. Die Funktion  $e^{(i/\hbar)p x}$  ist also eine so genannte *Eigenfunktion* des Impulsoperators. In der Absicht herauszufinden, ob auch bei den anderen Observablen die Eigenfunktionen der zugehörigen Operatoren eine Rolle spielen, fassen wir nochmals alles zusammen, was wir bezüglich des Impulses „erraten“ haben.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $W(p', t)$  erhält man aus dem Absolutquadrat des „Entwicklungskoeffizienten“  $\tilde{\psi}(p', t)$  in der „Entwicklung“ der Zustandsfunktion nach den Funktionen<sup>22</sup>

$$u_{p'}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{(i/\hbar)p'x}, \quad p' \in \mathbb{R}, \quad (4.45)$$

<sup>22</sup>Wir schreiben anstelle von  $p$  vorübergehend  $p'$ , weil dadurch der Vergleich mit den entsprechenden Formeln für die Observable  $\mathfrak{X}$  erleichtert wird.

welche die gemäß<sup>23</sup>

$$\int_{\mathbb{R}} dx u_{p'}^*(x) u_{p''}(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dx e^{(i/\hbar)(p''-p')x} = \delta(p' - p'') \quad (4.46)$$

„normierten“ Eigenfunktionen des Impulsoperators  $\hat{p}$  sind, d. h. es gilt

$$(\hat{p}u_{p'})(x) = p' u_{p'}(x), \quad p' \in \mathbb{R}. \quad (4.47)$$

Löst man also das *Eigenwertproblem* des Differentialoperators  $\hat{p}$ , d. h. die Differentialgleichung

$$-i\hbar \frac{du}{dx} = \lambda u, \quad (4.48)$$

wobei  $\lambda$  den so genannten *Eigenwertparameter* darstellt, so gibt die Gesamtheit der Eigenwerte  $\lambda = p' \in \mathbb{R}$  von  $\hat{p}$ , das *Eigenwertspektrum* von  $\hat{p}$ , das Messwertspektrum der Observablen  $p$ .

Weiters bilden die gemäß Gl. (4.46) „normierten“ Eigenfunktionen  $u = u_{\lambda} = u_{p'}$  ein vollständiges System, nach dem man aufgrund des fourierschen Integraltheorems eine beliebige Zustandsfunktion in der Form

$$\psi(x, t) = \int_{\mathbb{R}} dp' \tilde{\psi}(p', t) u_{p'}(x) \quad (4.49)$$

„entwickeln“ kann. Entwickelt man auf diese Weise die Zustandsfunktion  $\psi(x, t)$ , so gibt  $|\tilde{\psi}(p', t)|^2$ , d. h. das Absolutquadrat des „Entwicklungskoeffizienten“ der Zustandsfunktion in der „Entwicklung“ nach den gemäß Gl. (4.46) „normierten“  $u_{p'}$ , die Wahrscheinlichkeitsverteilung bezüglich des Teilchenimpulses  $p$ .

Probieren wir aus, ob derselbe „Schimmel“ auch für den Teilchenort  $x$  „funktioniert“. Das *Eigenwertproblem* von  $\hat{x}$  lautet

$$(\hat{x}u)(x) := x u(x) = \lambda u(x). \quad (4.50)$$

Dabei ist  $\lambda$  der Eigenwertparameter und  $x$  die Variable. Aus der Beziehung  $x \delta(x) = 0$  für die  $\delta$ -Funktion sieht man, dass

$$u_{\lambda}(x) = \delta(x - \lambda)$$

Lösung von Gl. (4.50) ist, und zwar für beliebiges  $\lambda = x' \in \mathbb{R}$ . Die *Lösung* des Eigenwertproblems von  $\hat{x}$  lautet also

$$\text{Eigenwertgleichung:} \quad (\hat{x}u_{x'})(x) = x' u_{x'}(x); \quad (4.51)$$

$$\text{Eigenfunktionen:} \quad u_{x'}(x) = \delta(x - x'), \quad (4.52)$$

$$\text{Eigenwerte:} \quad x' \in \mathbb{R}. \quad (4.53)$$

<sup>23</sup>Beachte, dass  $\delta(p' - p'') = \delta(p'' - p')$  gilt.

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} dx u_{x'}^*(x) u_{x''}(x) = \int_{\mathbb{R}} dx \delta(x - x') \delta(x - x'') = \delta(x' - x''), \quad (4.54)$$

d. h. die Eigenfunktionen sind bereits wie die Impulseigenfunktionen  $u_p$ , Gl. (4.45) „auf die  $\delta$ -Funktion normiert“. „Entwickeln“ wir die Zustandsfunktion nach den  $u_{x'}$ , so haben wir

$$\psi(x, t) = \int_{\mathbb{R}} dx' \delta(x - x') \psi(x', t) = \int_{\mathbb{R}} dx' \psi(x', t) u_{x'}(x), \quad (4.55)$$

wobei  $\psi(x', t)$  der „Entwicklungskoeffizient“ und  $u_{x'}$  die Eigenfunktion von  $\hat{x}$  zum Eigenwert  $x'$  ist. Nach der „Regel“, dass das Absolutquadrat des „Entwicklungskoeffizienten“ die Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt, folgt

$$W(x', t) = |\psi(x', t)|^2.$$

Die Anwendung des beim Teilchenimpuls  $p$  „erratenen“ mathematischen Schemas auf den Teilchenort  $x$  hat also auf das Messwertspektrum  $x' \in \mathbb{R}$  und die bornsche Interpretation von  $|\psi(x', t)|^2$ , den Ausgangspunkt des „Rateweges“, zurückgeführt.

Die Anwendung dieses Schemas „funktioniert“ auch bei der kinetischen Energie  $\mathfrak{K}$  und bei der potentiellen Energie  $\mathfrak{B}$ , da die Impulseigenfunktionen  $u_p$ , Eigenfunktionen des Operators  $\hat{T}$  zu den Eigenwerten  $p^2/2m$ , und die Ortseigenfunktionen  $u_{x'}$ , Eigenfunktionen des Operators  $\hat{V}$  zu den Eigenwerten  $V(x')$  sind. (Schreibe die Details selbst an.) Es liegt daher nahe, dieselbe Vorgangsweise auch für die Gesamtenergie  $\mathfrak{H}$  des Teilchens zu versuchen. Die mit dem *Eigenwertproblem* des Hamiltonoperators verbundene Differentialgleichung

$$(\hat{H}u)(x) := \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right\} u(x) = Eu(x) \quad (4.56)$$

wird als **zeitunabhängige Schrödingergleichung** bezeichnet.<sup>24</sup> Den Eigenwertparameter haben wir dabei – wie üblich – mit  $E$  bezeichnet. Die zeitunabhängige Schrödingergleichung kann man natürlich ohne Spezifizierung von  $V(x)$  nicht lösen. Wir untersuchen deshalb ein spezielles Beispiel, und zwar den *linearen harmonischen Oszillator*. Die Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 \right\} u(x) = Eu(x) \quad (4.57)$$

sehen wir als bekannt an.<sup>25</sup> Das zugehörige Eigenwertspektrum ist rein diskret, und die Eigenfunktionen sind daher auf eins normierbar. Die *Lösung* des Eigenwertproblems des

<sup>24</sup>Grund für die Bezeichnung ist, dass man zu dieser Differentialgleichung gelangen kann, indem man in der zeitabhängigen Schrödingergleichung die Zeit „absepariert“; s. dazu Abschnitt 4.9.

<sup>25</sup>Das Lösen dieses Eigenwertproblems wird in allen Lehrveranstaltungen und Lehrbüchern über die Mathematischen Methoden der Theoretischen Physik und in allen Quantenmechanik-Lehrbüchern ausführlich behandelt.

Hamiltonoperators  $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega_0^2 \hat{x}^2/2$  lautet:

$$\text{Eigenwertgleichung: } (\hat{H}u_n)(x) = E_n u_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0; \quad (4.58)$$

$$\text{Eigenfunktionen: } u_n(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{(\alpha x)^2}{2}\right] H_n(\alpha x), \quad (4.59)$$

$$\text{Eigenwerte: } E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0. \quad (4.60)$$

Dabei wurde zur Vereinfachung der Schreibweise der Eigenfunktionen die Größe

$$\alpha := \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} \quad (4.61)$$

eingeführt. Für die Eigenfunktionen gelten die „Orthonormierungsbeziehungen“

$$\int_{\mathbb{R}} dx u_{n'}^*(x) u_{n''}(x) = \delta_{n'n''}. \quad (4.62)$$

Als Eigenwerte von  $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega_0^2 \hat{x}^2/2$  erhält man also gerade jene diskreten Werte  $E_n$ , welche Planck für die Erklärung der spektralen Verteilung der Hohlraumstrahlung ad hoc für die „erlaubten“ Energiewerte des linearen harmonischen Oszillators annehmen musste.

Die Oszillatoreigenfunktionen  $u_n$  bilden ein vollständiges Funktionensystem, d. h. es lässt sich eine beliebige Zustandsfunktion gemäß

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) u_n(x) \quad (4.63)$$

entwickeln, wobei für die Entwicklungskoeffizienten wegen Gl. (4.62)

$$c_n(t) = \int_{\mathbb{R}} dx' u_n^*(x') \psi(x', t) \quad (4.64)$$

gilt. Nach dem „erratenen“ Schema müsste nun

$$W_n(t) = |c_n(t)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} dx u_n^*(x) \psi(x, t) \right|^2 \quad (4.65)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür angeben, dass man bei einer Messung der Energie eines Oszillators der durch die Zustandsfunktion  $\psi(x, t)$  charakterisierten Gesamtheit den Messwert  $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_0$  findet.

Um zu überprüfen, ob dies mit unseren bisher abgeleiteten Formeln konsistent ist, setzen wir die Entwicklung für  $\psi(x, t) \equiv \psi_t(x)$  von Gl. (4.63) in Gl. (4.17) und Gl. (4.36) ein:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}} dx \psi_t^*(x) \psi_t(x) \\ &= \sum_{n, n'=0}^{\infty} c_{n'}^*(t) c_n(t) \int_{\mathbb{R}} dx \overbrace{u_{n'}^*(x) u_n(x)}^{\delta_{nn'}} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(t)|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}(t) &= \int_{\mathbb{R}} dx \psi_t^*(x) (\hat{H} \psi_t)(x) \\ &= \sum_{n, n'=0}^{\infty} c_{n'}^*(t) c_n(t) \int_{\mathbb{R}} dx u_{n'}^*(x) \overbrace{(\hat{H} u_n)(x)}^{E_n u_n(x)} \\ &= \sum_{n, n'=0}^{\infty} c_{n'}^*(t) c_n(t) E_n \delta_{nn'} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n |c_n(t)|^2. \end{aligned}$$

Wie erforderlich ergibt sich also mit Gl. (4.65)

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t), \quad (4.66)$$

$$\bar{E}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n W_n(t). \quad (4.67)$$

## 4.4 Konzept des Hilbertraumes

Das auf dem „Rateweg“ gefundene Schema für die Berechnung von Messwertspektren, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Mittelwerten besitzt Eigenschaften, die aus der Mathematik wohl bekannt sind. Das mathematische Konzept des unitären Funktionenraumes erscheint geradezu „maßgeschneidert“ für eine ökonomische, die Strukturen hervorhebende Formulierung der Quantenmechanik.<sup>26</sup> Mit dem inneren Produkt<sup>27</sup>

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} dx f^*(x) g(x) \quad (4.68)$$

<sup>26</sup>Die Vertrautheit mit dem mathematischen Konzept des unitären Vektorraumes wird im Folgenden vorausgesetzt.

<sup>27</sup>In der Mathematik wird dafür meist die Schreibweise  $(f, g)$  verwendet.



zweier komplexwertiger Funktionen  $f, g$  der reellen Veränderlichen  $x \in \mathbb{R}$  hat man<sup>28</sup>:

und 
$$\langle \psi_t, \psi_t \rangle = \langle \psi_{t_0}, \psi_{t_0} \rangle = 1, \quad t \geq t_0 \quad (4.69)$$

$$\langle u_{x'}, u_{x''} \rangle = \delta(x' - x''), \quad (4.70)$$

$$\langle u_{p'}, u_{p''} \rangle = \delta(p' - p''), \quad (4.71)$$

$$\langle u_{n'}, u_{n''} \rangle = \delta_{n'n''}; \quad (4.72)$$

$$W(x, t) = |\langle u_x, \psi_t \rangle|^2, \quad (4.73)$$

$$W(p, t) = |\langle u_p, \psi_t \rangle|^2, \quad (4.74)$$

$$W_n = |\langle u_n, \psi_t \rangle|^2; \quad (4.75)$$

$$\bar{x}(t) = \langle \psi_t, \hat{x} \psi_t \rangle, \quad (4.76)$$

$$\bar{p}(t) = \langle \psi_t, \hat{p} \psi_t \rangle, \quad (4.77)$$

$$\bar{E}(t) = \langle \psi_t, \hat{H} \psi_t \rangle. \quad (4.78)$$

Die Beziehung (4.69) bedeutet, dass Zustandsfunktionen  $\psi_t$  für jeden festen Wert des Zeitparameters  $t$  Elemente des Funktionenraumes

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}} dx |f(x)|^2 < +\infty \right\} \quad (4.79)$$

sein müssen. Dieser Funktionenraum ist mit dem inneren Produkt (4.68) ein unitärer Raum. Er ist sogar ein *separabler Hilbertraum*<sup>29</sup>, d. i. ein vollständiger und separabler unitärer Raum. Ein unitärer Raum heißt vollständig in der Norm

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}, \quad (4.80)$$

wenn jede Folge  $\{f_n, n = 1, 2, \dots\}$  von Vektoren, für die

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\| = 0 \quad (4.81)$$

gilt<sup>30</sup>, ein Grenzelement im Raum selbst besitzt. Ein unitärer Raum heißt separabel, wenn er ein vollständiges Orthonormalsystem von abzählbar vielen Vektoren besitzt. Für den Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R})$  stellen die  $u_n$  von Gl. (4.59) ein solches vollständiges Orthonormalsystem dar. Ganz allgemein gilt der folgende mathematische Satz.

<sup>28</sup>Im Symbol für das innere Produkt dürfen nur Symbole für *Funktionen* (Vektoren) des unitären Raumes und *nicht* Symbole für Funktionswerte aufscheinen. Will man also die Schreibweise  $\psi_t(x)$  nicht benutzen – das Funktionssymbol der Zustandsfunktion zum Zeitpunkt  $t$  ist dann  $\psi_t$  –, so hat man anstelle von Gl. (4.69)  $\langle \psi(t), \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0), \psi(t_0) \rangle = 1, t \geq t_0$ , zu schreiben. Das Argument  $x$  muss also „weggelassen“ werden.

<sup>29</sup>Da wir es ausschließlich mit separablen Hilberträumen zu tun haben werden, lassen wir in der Folge das Attribut separabel weg.

<sup>30</sup>Eine solche Folge heißt *Cauchyfolge*.

**Satz:** Ist  $\{e_n, n = 1, 2, \dots\}$ ,  $\langle e_{n'}, e_{n''} \rangle = \delta_{n'n''}$ , ein vollständiges Orthonormalsystem eines Hilbertraumes  $\mathcal{H}$ , so gelten die folgenden Aussagen und sind einander gleichwertig:

$$(\alpha) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - s_N[f]\| = 0, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (4.82)$$

$$\text{mit } s_N[f] := \sum_{n=1}^N \langle e_n, f \rangle e_n;$$

$$(\beta) \quad \|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, f \rangle|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}; \quad (4.83)$$

$$(\gamma) \quad \langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \langle e_n, g \rangle, \quad \forall f, g \in \mathcal{H}. \quad (4.84)$$

Die Gleichung (4.84) heißt *parsevalsche Gleichung*<sup>a</sup>, und die Ungleichung

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=1}^N |\langle e_n, f \rangle|^2, \quad N \in \mathbb{N} \text{ (fest)}$$

heißt *besselsche Ungleichung*.

Symbolisch schreibt man den *Entwicklungssatz* (4.82) in der Form

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, f \rangle e_n, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (4.85)$$

<sup>a</sup>Mitunter wird diese Bezeichnung auch für Gl. (4.83) benutzt.

In Gl. (4.63) wurde bereits ein Beispiel für eine solche Entwicklung angeschrieben. Aufgrund des obigen mathematischen Satzes ist klargestellt, in welchem Sinne die Konvergenz der unendlichen Summe zu verstehen ist: Es handelt sich *nicht* um *punktweise* Konvergenz, sondern um Konvergenz im Sinne der Norm des Hilbertraumes  $L^2(\mathbb{R})$ , also um Konvergenz *im Mittel*. Es ist deshalb auch mathematisch sauberer, wenn man anstelle von Gl. (4.63)

$$\psi_t = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) u_n$$

schreibt.

Eine lineare Vektorabbildung in einem Hilbertraum bezeichnet man als *linearen Operator*. Für die Quantenmechanik besonders wichtig ist der Begriff des linearen *selbstadjungierten* bzw. hermiteschen Operators.<sup>31</sup> Ein linearer Operator heißt selbstadjungiert (hermitesch), falls

$$\langle f, \hat{A}g \rangle = \langle \hat{A}f, g \rangle, \quad \forall f, g \in \mathcal{H} \quad (4.86)$$

<sup>31</sup>Die Gleichsetzung von selbstadjungiert und hermitesch ist mathematisch unexakt. Um diese Begriffe unterscheiden zu können, muss man auf die Frage der Definitionsbereiche von Operatoren eingehen, was mathematisch subtile Untersuchungen erfordert und den Rahmen einer elementaren Darstellung sprengt.

gilt. Im Falle des Hilbertraumes  $L^2(\mathbb{R})$  bedeutet dies die Forderung

$$\int_{\mathbb{R}} dx f^*(x) (\hat{A}g)(x) = \int_{\mathbb{R}} dx (\hat{A}f)^*(x) g(x), \quad \forall f, g. \quad (4.87)$$

Der Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R})$  heißt Hilbertraum der komplexwertigen über  $\mathbb{R}$  absolut quadratisch integrierbaren Funktionen.

Siehe die Aufgaben Q1, Q2.

## 4.5 Was Grundgesetze und Korrespondenzregeln leisten müssen

Wir gehen nun zur deduktiven Darstellung über. Die **Grundgesetze**<sup>32</sup> formulieren wir dabei für so genannte **reine Gesamtheiten** von Systemen, wobei es sich um **beliebige Systemklassen** handeln kann. Die einzigen Voraussetzungen sind, dass die Systeme *nichtrelativistisch* behandelt werden können und *endlich viele Freiheitsgrade* besitzen.

Eine quantenmechanische *Gesamtheit gleich präparierter Systeme* bezeichnet man als „rein“, wenn die *Präparation* im Sinne der Quantenmechanik *vollständig* ist, d. h. wenn sie so vollständig ist, wie es das Unbestimmtheitsprinzip zulässt.<sup>33</sup> Wir werden – sobald wir dazu in der Lage sind – präzise Kriterien dafür festlegen, wann eine Präparation vollständig ist. Vorläufig können wir sagen: Sie ist es, wenn den Systemen der Gesamtheit nach der Präparation wohl definierte Werte von so vielen unabhängigen Observablen wie maximal möglich zugeschrieben werden können. Wegen des Unbestimmtheitsprinzips sind dies weniger Größen als in der klassischen Mechanik. Ein Beispiel: Werden lineare harmonische Oszillatoren mit einer wohl definierten Energie, etwa mit der Energie  $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$ , präpariert, so ist diese Präparation im Sinne der Quantenmechanik vollständig. In der klassischen Mechanik müsste man neben der Energie noch weitere Größen festlegen, etwa den Anfangsort und die Richtung des Anfangsimpulses. In der Quantenmechanik jedoch sind Teilchenenergie und Teilchenort nicht verträglich und können nicht zugleich wohl definierte („scharfe“) Werte haben.

Die neben den eigentlichen Grundgesetzen benötigten **Korrespondenzregeln** geben wir nur für die allereinfachste Systemklasse, nämlich für **Systeme mit einem einzigen spinlosen Teilchen in einer Raumdimension** (Systeme mit einem einzigen, und zwar räumlichen, Freiheitsgrad) *in systematischer Weise* an. Für kompliziertere Systemklassen

<sup>32</sup>Zu der hier benützten Terminologie, bei der zwischen Grundgesetzen und Korrespondenzregeln unterschieden wird, siehe Seite 240.

<sup>33</sup>Hat man es in der Quantenmechanik mit einer nicht reinen (so genannten gemischten) Gesamtheit zu tun, so muss man *Quantenstatistik* betreiben, so wie man in der klassischen Mechanik statistische Mechanik betreiben muss, wenn man keine optimale Kenntnis der Systeme hat, beispielsweise wenn man Anfangslagen und -impulse nicht präzise kennt.

werden wir die Korrespondenzregeln nur soweit angeben, dass erkennbar wird, „wohin der Hase läuft“.

Was müssen Grundgesetze und Korrespondenzregeln zusammen leisten? Nach den Einblicken, die wir beim „Rateweg“ gewonnen haben, können wir dies schon wesentlich präziser sagen, als es auf Seite 236 möglich war. Zugleich wird angemerkt, welche Grundgesetze das Gewünschte (zusammen mit den Korrespondenzregeln) leisten werden.

Die Theorie muss uns sagen:

- wie der „Zustand“ einer reinen Gesamtheit zu einem vorgegebenen festen Zeitpunkt mathematisch beschrieben wird;  
**1. Grundgesetz: „Zustandsbeschreibung“**
- nach welchem Gesetz sich der „Zustand“ einer sich selbst überlassenen (d. h. nicht durch Umpräparationen gestörten) reinen Gesamtheit im Laufe der Zeit ändert (statistische Kausalität);  
**5. Grundgesetz: „Dynamik“ (Schrödingergleichung)**
- wie die Observablen eines Systems mathematisch beschrieben werden und wie man die möglichen Messwerte berechnet;  
**2. Grundgesetz: „Observablen und Messwertspektren“**
- wie man den einer bestimmten Messung einer Observablen zugeordneten Messapparat mathematisch beschreibt und wie man bei bekanntem „Zustand“ einer reinen Gesamtheit die Wahrscheinlichkeit für das Erhalten eines Messwertes oder eines Messwertes aus einem Intervall bei einer Messung an einem Einzelsystem berechnet;  
**3. Grundgesetz: „Messung einer Observablen“**
- wie man den einer bestimmten Umpräparation bezüglich einer Observablen zugeordneten Präparationsapparat mathematisch beschreibt und wie sich der „Zustand“ einer reinen Gesamtheit durch Umpräparation ändert;  
**4. Grundgesetz: „Umpräparation bezüglich einer Observablen“**
- welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit zwei Observablen verträglich sind, also eine Messung beider zugleich oder eine Umpräparation bezüglich beider zugleich möglich ist;  
3. + 4. Grundgesetz
- wie eine Präparation beschaffen sein muss, damit sie vollständig ist, also eine reine Gesamtheit herstellt, und wie der „Zustand“ der so hergestellten Gesamtheit zu beschreiben ist.  
1. + 3. + 4. Grundgesetz

## 4.6 Darstellung der Zustände durch Hilbertraum-Vektoren

### 1. Grundgesetz: Zustandsbeschreibung (t „fest“)

Der Zustand einer reinen Gesamtheit wird zu einem festen Zeitpunkt durch einen Einheitsvektor  $\psi$  eines komplexen Hilbertraumes  $\mathcal{H}$  beschrieben; dabei ist  $e^{i\gamma}\psi$ ,  $\gamma \in [0, 2\pi)$ , äquivalent zu  $\psi$ :

$$\begin{aligned}\psi &\in \mathcal{H}, & \|\psi\| &= 1; \\ e^{i\gamma}\psi &\hat{=} \psi, & \gamma &\in [0, 2\pi).\end{aligned}$$

$\psi$  wird als *Zustandsvektor* der Gesamtheit und  $\mathcal{H}$  als *Zustandsraum* der betreffenden Systemklasse bezeichnet.

Die Wahl des zur betreffenden Systemklasse gehörigen Zustandsraumes  $\mathcal{H}$  liegt außerhalb der eigentlichen Axiomatik, sie ist Bestandteil der *Korrespondenzregeln*.

In der *schrödingerschen Formulierung* der Quantenmechanik (historisch als *Wellenmechanik* bezeichnet)<sup>34</sup> wählt man für **Systeme mit einem spinlosen Teilchen in einer Raumdimension** als Zustandsraum

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}} dx |f(x)|^2 < +\infty \right\}, \quad (4.88)$$

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} dx f^*(x) g(x). \quad (4.89)$$

Die Zustandsvektoren sind im Falle  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  Funktionen, weshalb man sie auch als *Zustandsfunktionen* bezeichnet.<sup>35</sup>

Die *Norm* ist in einem Hilbertraum allgemein durch die Beziehung (4.80) definiert. Im speziellen Fall  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  gilt also

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} dx |f(x)|^2. \quad (4.90)$$

<sup>34</sup>Eine zur schrödingerschen Formulierung der Quantenmechanik mathematisch äquivalente Formulierung stellt die heisenbergsche Matrizenmechanik dar, bei der man statt mit Funktionen mit unendlichen Spalten- und Zeilenmatrizen und statt mit multiplikativen Operatoren, Differentialoperatoren und Integraloperatoren mit unendlichen quadratischen Matrizen arbeitet.

<sup>35</sup>Die historische Bezeichnung *Wellenfunktion* wird im Folgenden vermieden, da sie missverständlich ist. Stattdessen sprechen wir von der *Zustandsfunktion*.

Die im 1. Grundgesetz erhobene Forderung  $\|\psi\| = 1$  bedeutet daher

$$\int_{\mathbb{R}} dx |\psi(x)|^2 = 1. \quad (4.91)$$

Ein Beispiel für einen möglichen Zustandsvektor ist (verifiziere dies selbst)

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{[\alpha(x-a)]^2}{2}\right], \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad a \in \mathbb{R} \quad (\alpha, a \text{ fest}). \quad (4.92)$$

Der Zustandsvektor

$$\varphi(x) = e^{i\gamma} \psi(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} \exp\left[i\gamma - \frac{[\alpha(x-a)]^2}{2}\right] \quad (4.93)$$

mit beliebigem festem  $\gamma \in [0, 2\pi)$  beschreibt nach dem 1. Grundgesetz denselben Zustand wie  $\psi$ .

Natürlich haben wir vom „Rateweg“ einiges über die Bedeutung der Größen und die Interpretation der Formeln „im Kopf“. Dieses „Wissen“ soll dazu dienen, dass die nun deduktiv formulierten Grundgesetze und Korrespondenzregeln nicht als völlig willkürlich empfunden werden. Beispielsweise „wissen“ wir vom „Rateweg“ wie Gl. (4.91) zu interpretieren ist. Desgleichen „wissen“ wir, dass  $\gamma$  in Gl. (4.93) tatsächlich nicht von  $x$  abhängen darf, weil sonst zwar  $|\varphi(x)|^2 = |\psi(x)|^2$ , aber  $|\tilde{\varphi}(p)|^2 \neq |\tilde{\psi}(p)|^2$  gelten würde.<sup>36</sup> Es ist jedoch wichtig, „Rateweg“ und deduktive Darstellung auseinander zu halten. Im Rahmen der deduktiven Darstellung können wir Gl. (4.91) noch nicht interpretieren, weil wir noch nichts über die Bedeutung von  $|\psi(x)|^2$  gesagt haben. Der Leser achte in den folgenden deduktiven Abschnitten darauf, jeweils sauber zu unterscheiden, was er vom „Rateweg“ weiß und was bis zur betreffenden Stelle im deduktiven Teil ausgesagt bzw. noch nicht ausgesagt wurde.

Wie sehen die Zustandsräume für kompliziertere Systemklassen aus?

### Zustandsraum für Systeme mit einem spinlosen Teilchen in drei Raumdimensionen

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) = \left\{ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}^3} d^3r |f(\mathbf{r})|^2 < +\infty \right\}, \quad (4.94)$$

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^3} d^3r f^*(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}). \quad (4.95)$$

<sup>36</sup>Es wären dann zwar die Wahrscheinlichkeitsverteilungen bezüglich des Teilchenortes gleich, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen bezüglich des Teilchenimpulses wären aber verschieden.

### Zustandsraum für Systeme mit einem Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in drei Raumdimensionen

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \\ &= \left\{ f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix}; f_+, f_- : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}^3} d^3r [ |f_+(\mathbf{r})|^2 + |f_-(\mathbf{r})|^2 ] < +\infty \right\}, \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^3} d^3r [ f_+^*(\mathbf{r}) g_+(\mathbf{r}) + f_-^*(\mathbf{r}) g_-(\mathbf{r}) ]. \quad (4.97)$$

Man schreibt dann

$$f(\mathbf{r}, \sigma) \equiv f_\sigma(\mathbf{r}) \quad (4.98)$$

und bezeichnet  $\sigma$  als *Spinvariable*. Die Spinvariable ist eine diskrete Variable, welche für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen nur zwei Werte annehmen kann:  $\sigma = -, +$  steht dabei für  $\sigma = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ , wobei die Werte von  $\sigma\hbar$  (also  $-\frac{\hbar}{2}, +\frac{\hbar}{2}$ ) die möglichen Messwerte der Spinkomponente für eine feste Raumrichtung (die meist als  $z$ -Richtung gewählt wird) darstellen. Für das innere Produkt (4.97) hat man in dieser Schreibweise

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r f^*(\mathbf{r}, \sigma) g(\mathbf{r}, \sigma). \quad (4.99)$$

### Zustandsraum für Systeme mit einem Spin- $s$ -Teilchen in drei Raumdimensionen

Für Spin- $s$ -Teilchen ( $s = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ ) kann die Spinvariable  $\sigma$  die  $2s + 1$  Werte  $-s, -s + 1, \dots, +s$  annehmen, und der Zustandsraum ist durch  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2s+1})$  gegeben. Ist  $s = \frac{1}{2}$ , so hat man den bereits oben besprochenen Spezialfall. In den Fällen  $s = 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$  ist alles vollkommen analog zum Fall  $s = \frac{1}{2}$  – insbesondere ist die Formel für das innere Produkt in allen Fällen durch (4.99) gegeben –, nur nimmt die diskrete Variable  $\sigma$  drei bzw. vier bzw. fünf ... Werte an.

Formal kann man auch spinlose Teilchen einbeziehen, indem man diesen  $s = 0$  zuschreibt und sie als „Spin-0-Teilchen“ bezeichnet. Die diskrete Spinvariable  $\sigma$  kann dann nur einen Wert annehmen, ist also entbehrlich, und für den Zustandsraum gilt entsprechend  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^1) \equiv L^2(\mathbb{R}^3)$ .

### Zustandsraum für Systeme mit $N$ Teilchen in drei Raumdimensionen. Boseteilchen und Fermiteilchen

Bei Mehrteilchensystemen muss man unterscheiden, ob es sich um Systeme mit lauter verschiedenartigen („nichtidentischen“) Teilchen handelt, oder ob gleichartige („identische“) Teilchen vorhanden sind.

*Identischen Teilchen* kommt in der Quantenmechanik keine Individualität zu, sie sind *prinzipiell nicht identifizierbar* („ununterscheidbar“). Dies wird im mathematischen Formalismus durch geeignete Wahl des Zustandsraumes berücksichtigt. Diese Wahl wird für identische Teilchen mit „ganzzahligem“ Spin  $s = 0, 1, 2, \dots$  (*Boseteilchen*) durch das so genannte *Symmetrisierungsprinzip*, für identische Teilchen mit „halbzahligem“ Spin  $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$  (*Fermiteilchen*) durch das so genannte *Antisymmetrisierungsprinzip* („Pauliverbot“) bestimmt.

### Spinlose Teilchen

Betrachten wir zunächst den allereinfachsten Fall, nämlich den Fall von Systemen mit  $N$  *spinlosen Teilchen* („Spin-0-Teilchen“).

Enthält das System  $N$  *nichtidentische spinlose Teilchen*, so gilt

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{3N}) = \left\{ f : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^3r_1 \cdots d^3r_N |f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 < +\infty \right\}, \quad (4.100)$$

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^3r_1 \cdots d^3r_N f^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) g(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (4.101)$$

Enthält das System  $N$  *identische spinlose Teilchen*, so gilt hingegen  $\mathcal{H} = L^2_{\text{sym}}(\mathbb{R}^{3N})$ , wobei  $L^2_{\text{sym}}(\mathbb{R}^{3N})$  jener Teilraum von  $L^2(\mathbb{R}^{3N})$  ist, der von den bezüglich *beliebigen* Permutationen  $(1, 2, \dots, N) \rightarrow (i_1, i_2, \dots, i_N)$  der Teilchenindizes symmetrischen Vektoren  $f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$  aufgespannt wird (Symmetrisierungsprinzip), d. h. für alle  $N!$  derartigen Permutationen muss gelten:

$$f(\mathbf{r}_{i_1}, \mathbf{r}_{i_2}, \dots, \mathbf{r}_{i_N}) = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (4.102)$$

Es kann natürlich auch sein, dass es sich um ein System handelt, bei dem nur *ein Teil* der Teilchen untereinander identisch ist. Ein Beispiel: Das System enthalte *zwei identische* Teilchen (Indizes 1, 2) und  $N - 2$  mit diesen und untereinander *nichtidentische* Teilchen. Dann verlangt das Symmetrisierungsprinzip  $\mathcal{H} = L^2_{\text{sym}1,2}(\mathbb{R}^{3N})$ , wobei  $L^2_{\text{sym}1,2}(\mathbb{R}^{3N})$  jener Teilraum von  $L^2(\mathbb{R}^{3N})$  ist, der von jenen  $f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$  aufgespannt wird, welche die folgende Eigenschaft besitzen:

$$f(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (4.103)$$

### Teilchen mit Spin

Bei Systemen von  $N$  *nichtidentischen Teilchen mit Spin* ist alles analog wie bei nicht-identischen spinlosen Teilchen, nur hängen die Vektoren  $f$  des Zustandsraumes außer von den kontinuierlichen Vektorvariablen  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  noch von diskreten Spinvariablen  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$  ab ( $\sigma_a = -s_a, -s_a + 1, \dots, +s_a$ ), und in der Formel für das innere Produkt kommen noch Summen über  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$  hinzu:

$$\langle f, g \rangle := \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_N} \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^3r_1 \cdots d^3r_N f^*(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \dots, \mathbf{r}_N, \sigma_N) g(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \dots, \mathbf{r}_N, \sigma_N). \quad (4.104)$$



Handelt es sich um  $N$  identische Teilchen mit ganzzahligem Spin ( $s_1 = s_2 = \dots = s_N = 1, 2, 3, \dots$ ), so muss analog zu (4.102) für alle  $N!$  Permutationen  $(1, 2, \dots, N) \rightarrow (i_1, i_2, \dots, i_N)$  der Teilchenindizes

$$f(\mathbf{r}_{i_1}, \sigma_{i_1}, \mathbf{r}_{i_2}, \sigma_{i_2}, \dots, \mathbf{r}_{i_N}, \sigma_{i_N}) = f(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2, \dots, \mathbf{r}_N, \sigma_N) \quad (4.105)$$

gelten (Symmetrisierungsprinzip).

Handelt es sich hingegen um  $N$  identische Teilchen mit halbzahligem Spin ( $s_1 = s_2 = \dots = s_N = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ ), so müssen die Vektoren  $f$  des Zustandsraumes bei einer beliebigen *Transposition* von Teilchenindizes das Vorzeichen *ändern* (Antisymmetrisierungsprinzip); z. B.

$$f(\mathbf{r}_2, \sigma_2, \mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_3, \sigma_3, \dots, \mathbf{r}_N, \sigma_N) = -f(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2, \mathbf{r}_3, \sigma_3, \dots, \mathbf{r}_N, \sigma_N). \quad (4.106)$$

Dies bedeutet, dass sich bei einer *ungeraden Permutation* der Teilchenindizes, d. h. bei einer Permutation, die sich aus einer ungeraden Anzahl von Transpositionen zusammensetzen lässt, das Vorzeichen der Vektoren  $f$  des Zustandsraumes ändern muss, während sich das Vorzeichen bei einer *geraden Permutation* der Teilchenindizes, d. h. bei einer Permutation, die sich aus einer geraden Anzahl von Transpositionen zusammensetzen lässt, nicht ändern darf. Führt man die so genannte Parität  $\eta_p$  der Permutation  $p: (1, 2, \dots, N) \rightarrow (i_1, i_2, \dots, i_N)$  ein, wobei  $\eta_p = +1$  gilt, falls  $p$  eine gerade Permutation ist, und  $\eta_p = -1$  gilt, falls  $p$  eine ungerade Permutation ist, so hat man die Forderung

$$f(\mathbf{r}_{i_1}, \sigma_{i_1}, \mathbf{r}_{i_2}, \sigma_{i_2}, \dots, \mathbf{r}_{i_N}, \sigma_{i_N}) = \eta_p f(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2, \dots, \mathbf{r}_N, \sigma_N). \quad (4.107)$$

Die obigen Ausführungen über die Zustandsräume quantenmechanischer Systemklassen vermitteln den Eindruck, dass sich dahinter ein allgemeines Konstruktionsprinzip verbirgt. In der Tat lassen sich mithilfe des mathematischen Konzeptes des *direkten Produktes von Hilberträumen* und des Symmetrisierungs- bzw. Antisymmetrisierungsprinzips die Zustandsräume *beliebiger Systemklassen* aus dem Hilbertraum zu einem räumlichen Freiheitsgrad und dem Hilbertraum zu einem Spin- $s$ -Freiheitsgrad ( $s = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ ) konstruieren. So ist der Zustandsraum für Systeme mit einem spinlosen Teilchen in drei Raumdimensionen das direkte Produkt von drei zu *einem* räumlichen Freiheitsgrad gehörigen Hilberträumen:  $L^2(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ . Kommt zu den drei räumlichen Freiheitsgraden noch ein Spin- $s$ -Freiheitsgrad dazu, so ist zusätzlich das direkte Produkt mit dem  $(2s + 1)$ -dimensionalen Hilbertraum  $\mathbb{C}^{2s+1}$  zu bilden:  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2s+1}) = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^{2s+1} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2s+1}$ ; usf.

## 4.7 Darstellung der Observablen durch Hilbertraum-Operatoren

### 2. Grundgesetz: Observablen und Messwertspektren

Einer Observablen  $\mathfrak{A}$  wird ein linearer selbstadjungierter Operator  $\hat{A}$  im Zustandsraum  $\mathcal{H}$  zugeordnet. Das Messwertspektrum der Observablen  $\mathfrak{A}$  ist durch das Eigenwertspektrum  $\sigma(\hat{A})$  des Operators  $\hat{A}$  gegeben:

$$\begin{aligned} \text{Observable } \mathfrak{A} &\longrightarrow \text{selbstadjungierter Operator } \hat{A} \text{ in } \mathcal{H} \\ \text{Messwertspektrum von } \mathfrak{A} &= \text{Eigenwertspektrum } \sigma(\hat{A}) \end{aligned}$$

#### Mathematische Hilfsmittel

Im Zusammenhang mit diesem Grundgesetz sowie mit den weiteren Grundgesetzen benötigen wir einige mathematische Aussagen über Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume selbstadjungierter Operatoren. Beweise werden nur gebracht, wenn sie mathematisch einfach sind.<sup>37</sup>

Da wir ausschließlich *lineare Operatoren* betrachten, lassen wir das Attribut „linear“ in Hinkunft weg. Der Begriff des selbstadjungierten Operators wurde bereits auf Seite 258 definiert und in Gl. (4.87) für den Spezialfall  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  konkretisiert.

*Eigenwertproblem:*<sup>38</sup>

$$\hat{A}u = \lambda u, \quad u \neq \theta. \quad (4.108)$$

Dabei stellt  $\lambda$  den Eigenwertparameter dar.

#### Satz 1

Die Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators sind reell, Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Jene  $\lambda$ -Werte, für die das Eigenwertproblem eine Lösung besitzt, werden als *Eigenwerte*, die zugehörigen Lösungen als *Eigenvektoren* von  $\hat{A}$  bezeichnet. Ein Eigenwert heißt  $\nu$ -fach, wenn es  $\nu$  linear unabhängige Eigenvektoren zu diesem Eigenwert gibt. Ist  $\nu = 1$ , so bezeichnet man den Eigenwert als *nicht entartet*, ist  $\nu > 1$ , so bezeichnet man ihn als *entartet*. Die Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators  $\hat{A}$  sind reell. Die Menge der Eigenwerte wird *Eigenwertspektrum* bzw. *Spektrum*  $\sigma(\hat{A})$  genannt. Das Spektrum kann rein diskret sein, dann gilt  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_d(\hat{A})$ , es kann rein kontinuierlich sein, dann gilt  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_k(\hat{A})$  oder es kann teils diskret, teils kontinuierlich sein, dann gilt  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_d(\hat{A}) \cup \sigma_k(\hat{A})$ .

<sup>37</sup>Bezüglich der fehlenden Beweise siehe z. B. Großmann, S.: Funktionalanalysis im Hinblick auf Anwendungen in der Physik. AULA-Verlag, Wiesbaden 1988.

<sup>38</sup>Zur Unterscheidung von 0, der *Zahl* Null, bezeichnen wir den *Nullvektor* mit  $\theta$  und den *Nulloperator* mit  $\hat{0}$ . Für alle  $f$  in  $\mathcal{H}$  gelten die Beziehungen  $f + \theta = f$ ,  $0f = \theta$  und  $\hat{0}f = \theta$ .

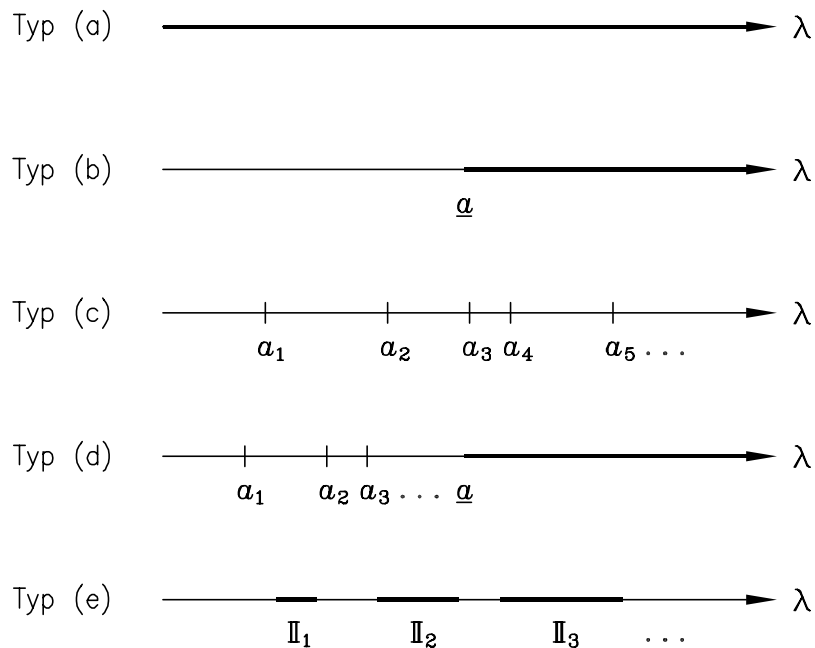


Abbildung 4.1: Beispiele für Spektren selbstadjungierter Operatoren  
(Varianten zu Typ (c): siehe Text auf Seite 267)

Die Abbildung 4.1 zeigt jene Typen von Spektren, die in der Quantenmechanik *am häufigsten* vorkommen.<sup>39</sup> Wir werden in der Folge auf diese Beispiele Bezug nehmen, indem wir von Typ (a), Typ (b) etc. sprechen. Bei Typ (a) gilt  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_k(\hat{A}) = \mathbb{R}$ . Dieser Fall liegt bei Orts- und Impulskomponenten von Teilchen vor. Bei Typ (b) gilt  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_k(\hat{A}) = [\underline{a}, +\infty)$ . Dieser Fall liegt bei der kinetischen Energie eines Teilchens vor. (Es ist dann  $\underline{a} = 0$ .) Bei Typ (c) gilt  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_d(\hat{A}) = \{a_1, a_2, \dots\}$  (*endlich viele* oder *abzählbar unendlich viele* Eigenwerte). Endlich viele Eigenwerte gibt es bei Spinkomponenten, ein Beispiel für den Fall von abzählbar unendlich vielen Eigenwerten ist die Gesamtenergie eines linearen harmonischen Oszillators. Eine Abart von Typ (c) ist, wenn es keinen endlichen kleinsten Eigenwert gibt. Man indiziert dann die Eigenwerte gemäß  $\dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$ . Ein Beispiel dafür stellen die Bahndrehimpulskomponenten eines Teilchens dar. Bei Typ (d) gilt  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_d(\hat{A}) \cup \sigma_k(\hat{A}) = \{a_1, a_2, \dots\} \cup [\underline{a}, +\infty)$ . Dabei gibt es entweder *endlich viele* diskrete Eigenwerte (wobei der größte diskrete Eigenwert kleiner als  $\underline{a}$  ist) oder *abzählbar unendlich viele* diskrete Eigenwerte (wobei diese  $\underline{a}$  als Häufungspunkt besitzen). Ersterer Fall liegt bei der Gesamtenergie eines Teilchens in einem endlich tiefen Kastenpotential, letzterer Fall bei der Gesamtenergie des Wasserstoffatoms vor. (Bei der üblichen Festlegung des Energienullpunktes gilt dann  $\underline{a} = 0$ .)

<sup>39</sup>Daneben gibt es noch weitere Typen; beispielsweise kann es im kontinuierlichen Spektrum eingebettete diskrete Eigenwerte geben. Letzterer Fall tritt beim Energiespektrum des Heliumatoms auf.

Bei Typ (e) gilt  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_k(\hat{A}) = \mathbb{I}_1 \cup \mathbb{I}_2 \cup \dots$  (durch „Lücken“ getrennte kontinuierliche [„erlaubte“] Bereiche). Dieser Fall liegt bei der Gesamtenergie eines Teilchens in einem räumlich periodischen Potential vor („Energiebänder“).

Die folgenden Formeln sind formal für den Fall angeschrieben, dass  $\hat{A}$  sowohl ein diskretes als auch ein kontinuierliches Spektrum besitzt. Liegt ein rein diskretes oder ein rein kontinuierliches Spektrum vor, so sind einfach die „nichtzutreffenden Zeilen“ wegzulassen.

Lösung des Eigenwertproblems:

Fall 1: alle Eigenwerte einfach (nicht entartet)

$$\hat{A}u_n = a_n u_n, \quad a_n \in \sigma_d(\hat{A}) \quad (\text{falls } \sigma_d(\hat{A}) \neq \{\}); \quad (4.109)$$

$$\hat{A}u_a = a u_a, \quad a \in \sigma_k(\hat{A}) \quad (\text{falls } \sigma_k(\hat{A}) \neq \{\}). \quad (4.110)$$

Die Eigenvektoren zu diskreten Eigenwerten sind Elemente von  $\mathcal{H}$  und können auf eins normiert werden.<sup>40</sup> Man bezeichnet sie als „eigentliche“ Eigenvektoren. Die Eigenvektoren zu Eigenwerten aus dem kontinuierlichen Spektrum sind *nicht* Elemente von  $\mathcal{H}$  und können daher *nicht* auf eins normiert werden. Sie lassen sich jedoch „auf die  $\delta$ -Funktion“ normieren (s. den folgenden Beweis). Man bezeichnet sie als „uneigentliche“ Eigenvektoren. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal, und bei entsprechender Normierung gilt

$$\langle u_{n'}, u_{n''} \rangle = \delta_{n'n''}, \quad (4.111)$$

$$\langle u_{a'}, u_{a''} \rangle = \delta(a' - a''), \quad (4.112)$$

$$\langle u_n, u_a \rangle = 0. \quad (4.113)$$

Beweis von Satz 1:

Eigenwerte reell.<sup>41</sup>

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} \text{ selbstadjungiert} \\ \hat{A}u = \lambda u \end{array} \right\} \implies \underbrace{\langle u, \hat{A}u \rangle}_{\in \mathbb{R}} = \lambda \underbrace{\langle u, u \rangle}_{\in \mathbb{R}} \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

<sup>40</sup>Mit  $u$  ist auch  $\alpha u$  Lösung von Gleichung (4.108). Durch die Normierung auf eins ist  $u_n$  bis auf einen konstanten unimodularen Faktor bestimmt.

<sup>41</sup>Der folgende Beweis ist nur unter der Voraussetzung  $\|u\| < +\infty$  streng gültig. Es ist also damit eigentlich nur bewiesen, dass *diskrete* Eigenwerte reell sind. Man kann aber zeigen, dass die Aussage für *alle* Eigenwerte gültig ist.

Eigenvektoren orthogonal:

$$\begin{aligned}
 \text{Gl. (4.111): } \left. \begin{array}{l} \hat{A} \text{ selbstadjungiert} \\ \hat{A}u_{n'} = a_{n'}u_{n'} \\ \hat{A}u_{n''} = a_{n''}u_{n''} \end{array} \right\} & \Rightarrow \langle \underbrace{\hat{A}u_{n'}}_{a_{n'}u_{n'}}, u_{n''} \rangle = \langle u_{n'}, \underbrace{\hat{A}u_{n''}}_{a_{n''}u_{n''}} \rangle \\
 & \Rightarrow a_{n'}^* \langle u_{n'}, u_{n''} \rangle = a_{n''} \langle u_{n'}, u_{n''} \rangle \\
 & \quad \parallel \\
 & \quad a_{n'} \\
 & \quad \underbrace{(a_{n'} - a_{n''}) \langle u_{n'}, u_{n''} \rangle}_{\neq 0 \text{ f\"ur } n' \neq n''} = 0 \\
 (\alpha) & \quad \neq 0 \text{ f\"ur } n' \neq n'' \quad \Rightarrow \quad 0 \text{ f\"ur } n' \neq n'' \\
 (\beta) & \quad 0 \cdot \langle u_{n'}, u_{n'} \rangle = 0 \\
 & \quad \text{endlich, durch} \\
 & \quad \text{geeignete Normierung} \\
 & \quad \text{zu 1 gemacht}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Gl. (4.112):} \quad \text{analog: } & (a' - a'') \langle u_{a'}, u_{a''} \rangle = 0 \\
 & \propto \delta(a' - a''), \text{ durch} \\
 & \text{geeignete Normierung} \\
 & \text{zu } \delta(a' - a'') \text{ gemacht}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Gl. (4.113):} \quad \text{analog: } & \underbrace{(a_n - a)}_{\neq 0} \langle u_n, u_a \rangle = 0 \\
 & \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 0
 \end{aligned}$$

Fall 2: *Eigenwerte mit Vielfachheiten größer als eins* (entartete Eigenwerte) existieren

Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind dann wieder zueinander orthogonal (Beweis wie oben), linear unabhängige Eigenvektoren zu einem mehrfachen Eigenwert müssen nicht paarweise orthogonal sein. Sind sie es nicht, so können sie aber stets durch gleichviele orthogonale Eigenvektoren ersetzt werden, welche denselben Teilraum von  $\mathcal{H}$  aufspannen.<sup>42</sup> Man kann also zu einem mehrfachen Eigenwert immer orthogonale Eigenvektoren finden, und wir nehmen in der Folge stets an, dass solche Eigenvektoren gewählt wurden. Die *Vielfachheit* eines Eigenwertes kann *abzählbar* (endlich oder unendlich) oder auch *nicht abzählbar* sein, d. h. die linear unabhängigen (orthogonalen) Eigenvektoren zum selben Eigenwert können entweder durch einen diskreten Index oder einen kontinuierlichen „Index“ „durchnummeriert“ sein. Um die Schreibweise zu vereinfachen, nehmen wir für die Formeln immer Ersteres an. Bei nicht abzählbarer Vielfachheit eines Eigenwertes wäre lediglich der diskrete Index  $\nu$  durch einen kontinuierlichen „Index“  $\nu \in I$ , und  $\sum_{\nu} \dots$  durch  $\int_I d\nu \dots$ , sowie  $\delta_{\nu\nu'}$  durch  $\delta(\nu - \nu')$  zu ersetzen.

<sup>42</sup>Orthogonale Eigenvektoren zum selben Eigenwert können z. B. mithilfe des schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens gewonnen werden.

Führen wir noch für den Fall, dass ein Eigenwert  $a_n$  nicht entartet ist, formal einen Index  $\nu$  ein, der nur *einen* Wert, nämlich  $\nu = 1$ , annehmen kann, und setzen wir in diesem Fall  $u_n \equiv u_{n1}$ , so können wir *allgemein* schreiben:

$$\begin{aligned} \hat{A}u_{n\nu} &= a_n u_{n\nu}, & a_n &\in \sigma_d(\hat{A}) \quad (\text{falls } \sigma_d(\hat{A}) \neq \{\}), \\ & & \nu &= 1, 2, \dots, g_n, \\ & & g_n &\geq 1 \quad (\text{Vielfachheit von } a_n); \end{aligned} \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}u_{a\alpha} &= a u_{a\alpha}, & a &\in \sigma_k(\hat{A}) \quad (\text{falls } \sigma_k(\hat{A}) \neq \{\}), \\ & & \alpha &= 1, 2, \dots, g(a), \\ & & g(a) &\geq 1 \quad (\text{Vielfachheit von } a); \end{aligned} \quad (4.115)$$

$$\langle u_{n'\nu'}, u_{n''\nu''} \rangle = \delta_{n'n''} \delta_{\nu'\nu''}, \quad (4.116)$$

$$\langle u_{a'\alpha'}, u_{a''\alpha''} \rangle = \delta(a' - a'') \delta_{\alpha'\alpha''}, \quad (4.117)$$

$$\langle u_{n\nu}, u_{a\alpha} \rangle = 0. \quad (4.118)$$

**Satz 2**

Die Eigenvektoren eines selbstadjungierten Operators bilden ein vollständiges Vektorsystem (ein Basissystem) in  $\mathcal{H}$ .

Wir schreiben die allgemeinen Formeln hier und in der Folge formal für den Fall an, dass  $\hat{A}$  sowohl ein diskretes als auch ein kontinuierliches Spektrum besitzt. Liegt ein rein diskretes oder ein rein kontinuierliches Spektrum vor, so sind einfach die „nichtzutreffenden Terme“ wegzulassen.

Die Vollständigkeit des Eigenvektorsystems von  $\hat{A}$  bedeutet, dass es einen entsprechenden *Entwicklungssatz* gibt. Sind *alle Eigenwerte einfach* (nicht entartet), so lautet dieser

$$f = \sum_{n: a_n \in \sigma_d(\hat{A})} \langle u_n, f \rangle u_n + \int da \langle u_a, f \rangle u_a, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (4.119)$$

existieren *Eigenwerte mit Vielfachheiten größer als eins*, so lautet er

$$f = \sum_{n: a_n \in \sigma_d(\hat{A})} \sum_{\nu=1}^{g_n} \langle u_{n\nu}, f \rangle u_{n\nu} + \int da \sum_{\alpha=1}^{g(a)} \langle u_{a\alpha}, f \rangle u_{a\alpha}, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (4.120)$$

Für die Spektrumstypen (a), (c) und (d) von Seite 267f hat man beispielsweise:<sup>43</sup>

<sup>43</sup>Bei Typ (c) und (d) kann die Summe über  $n$  eine *endliche* oder eine *unendliche* Summe sein, bei Typ (c) kann sie auch von  $-\infty$  bis  $+\infty$  laufen.

Fall 1: *alle Eigenwerte einfach* (nicht entartet)

$$\text{Typ (a): } f = \int_{\mathbb{R}} da \langle u_a, f \rangle u_a, \quad \forall f \in \mathcal{H}; \quad (4.121)$$

$$\text{Typ (c): } f = \sum_{n: a_n \in \sigma_d(\hat{A})} \langle u_n, f \rangle u_n, \quad \forall f \in \mathcal{H}; \quad (4.122)$$

$$\text{Typ (d): } f = \sum_{n=1}^{g_n} \langle u_n, f \rangle u_n + \int_{\underline{a}}^{+\infty} da \langle u_a, f \rangle u_a, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (4.123)$$

Fall 2: *Eigenwerte mit Vielfachheiten größer als eins* (entartete Eigenwerte) existieren

$$\text{Typ (a): } f = \int_{\mathbb{R}} da \sum_{\alpha=1}^{g(a)} \langle u_{a\alpha}, f \rangle u_{a\alpha}, \quad \forall f \in \mathcal{H}; \quad (4.124)$$

$$\text{Typ (c): } f = \sum_{n: a_n \in \sigma_d(\hat{A})} \sum_{\nu=1}^{g_n} \langle u_{n\nu}, f \rangle u_{n\nu}, \quad \forall f \in \mathcal{H}; \quad (4.125)$$

$$\text{Typ (d): } f = \sum_{n=1}^{g_n} \sum_{\nu=1}^{g_n} \langle u_{n\nu}, f \rangle u_{n\nu} + \int_{\underline{a}}^{+\infty} da \sum_{\alpha=1}^{g(a)} \langle u_{a\alpha}, f \rangle u_{a\alpha}, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (4.126)$$

Im Prinzip haben wir damit alle benötigten mathematischen Hilfsmittel zusammengestellt. Es vereinfacht jedoch die Schreibweise der noch ausstehenden Grundgesetze erheblich und erleichtert auch deren Verständnis, wenn wir den Begriff des Projektionsoperators einführen.

Ein selbstadjungierter Operator  $\hat{P}$  heißt *Projektionsoperator*, falls er die Eigenschaft  $\hat{P}^2 = \hat{P}$  besitzt. Die letztere Eigenschaft wird als *Idempotenz* bezeichnet.<sup>44</sup> Ein Projektionsoperator kann nur die Eigenwerte 1 und (oder) 0 besitzen (s. Aufgabe Q3). Im Falle eines unendlich dimensionalen Hilbertraumes muss die Vielfachheit eines dieser Eigenwerte oder beider Eigenwerte abzählbar unendlich sein. Ein Projektionsoperator projiziert Vektoren auf einen bestimmten Teilraum des Hilbertraumes, d. h. er „nimmt ihnen alle nicht zu diesem Teilraum gehörigen Komponenten weg“. Triviale Projektionsoperatoren sind der Einheitsoperator und der Nulloperator. Der Einheitsoperator besitzt nur den Eigenwert 1, dessen Vielfachheit entsprechend gleich der Dimension des betreffenden Hilbertraumes ist, und projiziert auf den Gesamttraum, verändert also Vektoren nicht. Der Nulloperator besitzt nur den Eigenwert 0, dessen Vielfachheit entsprechend gleich der Dimension des betreffenden Hilbertraumes ist, und macht jeden Vektor zum Nullvektor.

---

<sup>44</sup>Idempotenz ist charakteristisch für jede Projektion. Man denke etwa an die Projektion eines Objektes im dreidimensionalen reellen Raum auf eine Ebene. Hat man das Objekt auf die Ebene projiziert, so gibt die neuerliche Anwendung der Operation Projektion auf das erhaltene Bild „nichts Neues“.

Im Zusammenhang mit dem Eigenwertproblem eines selbstadjungierten Operators  $\hat{A}$  sind jene Projektionsoperatoren von Interesse, welche auf die so genannten Eigenräume bezüglich  $\hat{A}$  und auf so genannte direkte Summen von Eigenräumen projizieren. Was damit gemeint ist, wird im Folgenden erklärt.

Ist  $a_n$  ein *einfacher Eigenwert* von  $\hat{A}$ , so ist der durch

$$\hat{P}_n f := \langle u_n, f \rangle u_n, \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad (4.127)$$

definierte Operator  $\hat{P}_n$  selbstadjungiert und idempotent, also ein Projektionsoperator:

$$\begin{aligned} \langle f, \hat{P}_n g \rangle &= \langle f, \langle u_n, g \rangle u_n \rangle = \langle u_n, g \rangle \langle f, u_n \rangle, \\ \langle \hat{P}_n f, g \rangle &= \langle \langle u_n, f \rangle u_n, g \rangle = \langle u_n, f \rangle^* \langle u_n, g \rangle = \langle u_n, g \rangle \langle f, u_n \rangle; \\ \hat{P}_n^2 f &= \langle u_n, \langle u_n, f \rangle u_n \rangle u_n = \langle u_n, f \rangle \langle u_n, u_n \rangle u_n = \langle u_n, f \rangle u_n = \hat{P}_n f. \end{aligned}$$

Der Operator  $\hat{P}_n$  projiziert auf den von  $u_n$  aufgespannten eindimensionalen Teilraum von  $\mathcal{H}$ , den *Eigenraum*  $\mathcal{H}(a_n)$  zum Eigenwert  $a_n$ , denn er „lässt“ einem Vektor  $f \in \mathcal{H}$  nur seine Komponente in  $\mathcal{H}(a_n)$ , wie Gl. (4.127) zeigt. *Symbolisch* kann man statt Gl. (4.127) auch

$$\hat{P}_n = \langle u_n, \cdot \rangle u_n \quad (4.128)$$

schreiben, wobei der Punkt die Rolle eines „Platzhalters“ spielt.

Beachte: Während  $u_n$  nur bis auf einen unimodularen Faktor bestimmt ist, ist  $\hat{P}_n$  *eindeutig* bestimmt.

Allgemeiner: Ist  $a_n$  ein  $g_n$ -*facher Eigenwert* von  $\hat{A}$  ( $g_n \geq 1$ ), so ist der von den Eigenvektoren  $u_{n\nu}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, g_n$ , aufgespannte Eigenraum  $\mathcal{H}(a_n)$  von  $\hat{A}$  zum Eigenwert  $a_n$   $g_n$ -dimensional, und der zugehörige Projektionsoperator lautet

$$\hat{P}_n = \sum_{\nu=1}^{g_n} \langle u_{n\nu}, \cdot \rangle u_{n\nu}. \quad (4.129)$$

Analog kann man Projektionsoperatoren für Teilräume definieren, welche von *uneigentlichen Eigenvektoren* aufgespannt werden. Der Projektionsoperator für den Teilraum, der von den uneigentlichen Eigenvektoren zu Eigenwerten  $a \in \mathbb{I} \subseteq \sigma_k(\hat{A})$  ( $g(a) \geq 1$ ) aufgespannt wird, ist durch

$$\hat{P}_{\mathbb{I}} = \int_{\mathbb{I}} d\hat{P}(a), \quad (4.130)$$

$$d\hat{P}(a) := da \sum_{\alpha=1}^{g(a)} \langle u_{a\alpha}, \cdot \rangle u_{a\alpha} \quad (4.131)$$

gegeben. Das Symbol  $d\hat{P}(a)$  wurde dabei zur Vereinfachung der Schreibweise künftiger Formeln als *Abkürzung* eingeführt. Es ist zu beachten, dass  $d\hat{P}(a)$  *kein* Projektionsoperator ist.



Aus den Gleichungen (4.111) bis (4.113) bzw. (4.116) bis (4.118) folgen für die Projektionsoperatoren  $\hat{P}_n, \hat{P}_\mathbb{I}$  die *Orthogonalitätsbeziehungen*

$$\hat{P}_{n'}\hat{P}_{n''} = \hat{0}, \quad \text{falls } n' \neq n'', \quad (4.132)$$

$$\hat{P}_{\mathbb{I}'}\hat{P}_{\mathbb{I}''} = \hat{0}, \quad \text{falls } \mathbb{I}' \cap \mathbb{I}'' = \{\}, \quad (4.133)$$

$$\hat{P}_n\hat{P}_\mathbb{I} = \hat{0}, \quad \forall n, \quad \forall \mathbb{I} \subseteq \sigma_k(\hat{A}). \quad (4.134)$$

Aus diesen Beziehungen folgt aber (zusammen mit der Eigenschaft der Operatoren  $\hat{P}_n, \hat{P}_\mathbb{I}$ , Projektionsoperatoren zu sein), dass auch eine beliebige Summe von Operatoren  $\hat{P}_n$  mit verschiedenen  $n$  und (oder) Operatoren  $\hat{P}_\mathbb{I}$  mit elementfremden Teilmengen  $\mathbb{I}$  ebenfalls Projektionsoperator ist (s. Aufgabe Q4). Ist  $\tau(\hat{A})$  eine beliebige (echte oder unechte) Teilmenge von  $\sigma(\hat{A})$ , so ist

$$\hat{P} = \sum_{n: a_n \in \tau(\hat{A})} \hat{P}_n + \int_{a \in \tau(\hat{A})} d\hat{P}(a) \quad (4.135)$$

Projektionsoperator zu jenem Teilraum von  $\mathcal{H}$ , welcher von den eigentlichen Eigenvektoren zu Eigenwerten  $a_n \in \tau(\hat{A})$ , und den uneigentlichen Eigenvektoren zu Eigenwerten  $a \in \tau(\hat{A})$  aufgespannt wird. Dieser Teilraum wird als *direkte Summe* der entsprechenden Eigenräume bezeichnet.

Der Entwicklungssatz Gl. (4.119) bzw. (4.120) lässt sich mithilfe der Projektionsoperatoren, welche sich durch Lösen des Eigenwertproblems von  $\hat{A}$  ergeben haben, in der Form

$$f = \sum_{n: a_n \in \sigma_d(\hat{A})} \hat{P}_n f + \int_{a \in \sigma_k(\hat{A})} d\hat{P}(a) f, \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad (4.136)$$

schreiben. Mathematisch gleichwertig zum Entwicklungssatz ist daher die Operatorgleichung

$$\hat{1} = \sum_{n: a_n \in \sigma_d(\hat{A})} \hat{P}_n + \int_{a \in \sigma_k(\hat{A})} d\hat{P}(a), \quad (4.137)$$

die man als *Vollständigkeitsbeziehung* für die Projektionsoperatoren bezeichnet.<sup>45</sup> Für die Spektrumstypen (a), (c) und (d) hat man beispielsweise:

$$\text{Typ (a):} \quad \hat{1} = \int_{\mathbb{R}} d\hat{P}(a), \quad (4.138)$$

$$\text{Typ (c):} \quad \hat{1} = \sum_{n: a_n \in \sigma_d(\hat{A})} \hat{P}_n, \quad (4.139)$$

$$\text{Typ (d):} \quad \hat{1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{P}_n + \int_{\underline{a}} d\hat{P}(a). \quad (4.140)$$

<sup>45</sup>Man sagt auch, dass man durch Lösen des Eigenwertproblems des Operators  $\hat{A}$  eine *Zerlegung der Einheit* gefunden hat.

Zur Veranschaulichung der bisher angeschriebenen Beziehungen im Fall des dreidimensionalen reellen Vektorraumes s. die Aufgabe Q5.

Ein selbstadjungierter Operator lässt sich durch seine Eigenwerte und die Projektionsoperatoren, welche zu den Eigenräumen gehören, ausdrücken. Die allgemeine Formel lautet (s. Aufgabe Q6)

$$\hat{A} = \sum_{n: a_n \in \sigma_d(\hat{A})} a_n \hat{P}_n + \int_{a \in \sigma_k(\hat{A})} a d\hat{P}(a). \quad (4.141)$$

Man nennt dies die *Spektralform* von  $\hat{A}$ . Für die Spektrumstypen (a), (c) und (d) hat man beispielsweise:

$$\text{Typ (a):} \quad \hat{A} = \int_{\mathbb{R}} a d\hat{P}(a), \quad (4.142)$$

$$\text{Typ (c):} \quad \hat{A} = \sum_{n: a_n \in \sigma_d(\hat{A})} a_n \hat{P}_n, \quad (4.143)$$

$$\text{Typ (d):} \quad \hat{A} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \hat{P}_n + \int_{\underline{a}} a d\hat{P}(a). \quad (4.144)$$

In der Quantenmechanik werden – wie wir in Abschnitt 4.8 sehen werden – Projektionsoperatoren zur mathematischen Beschreibung von Mess- und Präparationsapparaten verwendet. Der Eigenwert 1 wird mit der Antwort „Ja, die gefragte Eigenschaft liegt beim System vor“ und der Eigenwert 0 mit der Antwort „Nein, die gefragte Eigenschaft liegt beim System nicht vor“ verknüpft. Der Projektionsoperator  $\hat{P}$  von Gl. (4.135) wird dann der Frage „Liegt bezüglich der Observablen  $\mathfrak{A}$  ein Messwert aus der Teilmenge  $\tau(\hat{A})$  des Messwertspektrums vor?“ zugeordnet. Im Falle  $\tau(\hat{A}) = \sigma(\hat{A})$  gilt nach Gl. (4.137)  $\hat{P} = \hat{1}$ , der betreffende Projektionsoperator besitzt also nur den Eigenwert 1, im Einklang mit der Tatsache, dass die Antwort auf die Frage „Liegt bezüglich der Observablen  $\mathfrak{A}$  *irgend-ein* Messwert aus dem Messwertspektrum vor“ nur „Ja“ lauten kann. (Siehe auch die Bemerkung 7 auf Seite 287.)

Nachdem wir die erforderlichen mathematischen Hilfsmittel bereitgestellt haben, befassen wir uns mit den *Korrespondenzregeln* zum 2. Grundgesetz in der schrödingerschen Formulierung der Quantenmechanik („Wellenmechanik“). Rechnungen, die wir bereits beim „Rateweg“ durchgeführt haben, wiederholen wir dabei nicht, doch schreiben wir der Übersichtlichkeit halber nochmals die Ergebnisse zusammen.

Für **Systeme mit einem spinlosen Teilchen in einer Raumdimension** hat man als fundamentale Größen den Teilchenort und den Teilchenimpuls. In der klassischen Mechanik beschreibt eine beliebige Funktion der Orts- und Impulsvariablen eine Observable eines derartigen Systems. Man könnte deshalb meinen, dass die Korrespondenzregeln einer *beliebigen* Funktion  $F(x, p)$  einen selbstadjungierten Operator  $\hat{F}$  im Zustandsraum  $L^2(\mathbb{R})$  zuordnen müssten. Wie wir sehen werden, sind jedoch dem Übersetzen durch die Nichtverträglichkeit von Ort und Impuls in der Quantenmechanik Grenzen gesetzt.

Den *fundamentalen Observablen* Teilchenort  $\mathfrak{x}$  und Teilchenimpuls  $\mathfrak{p}$  werden die folgenden Operatoren zugeordnet:

$$\mathfrak{x} \longrightarrow \hat{x}: \quad (\hat{x}f)(x) := xf(x), \quad (4.145)$$

$$\mathfrak{p} \longrightarrow \hat{p}: \quad (\hat{p}f)(x) := -i\hbar \frac{df(x)}{dx}. \quad (4.146)$$

Wie man unmittelbar sieht<sup>46</sup>, gilt  $\hat{x}\hat{p} \neq \hat{p}\hat{x}$ . Man sagt, die Operatoren  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$  seien „nicht vertauschbar“.

Definiert man für zwei Operatoren  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  allgemein den so genannten *Kommutator* von  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$ ,

$$[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \quad (4.147)$$

so zeigt man leicht, dass

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \hat{1} \quad (4.148)$$

gilt (s. Aufgabe Q7). Diese Beziehung wird als *kanonische Vertauschungsbeziehung* bezeichnet.<sup>47</sup> Sie ist der mathematische Ausdruck für die Nichtverträglichkeit der Observablen Teilchenort und Teilchenimpuls und führt auf die in Abschnitt 4.14 besprochene heisenbergsche Unbestimmtheitsbeziehung  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ .

*Lösung des Eigenwertproblems von  $\hat{x}$ :*

$$\text{Eigenwertgleichung:} \quad (\hat{x}u_{x'})(x) = x' u_{x'}(x); \quad (4.149)$$

$$\text{Spektrum:} \quad \sigma(\hat{x}) = \sigma_k(\hat{x}) = \mathbb{R}, \quad (4.150)$$

$$\text{Eigenfunktionen:} \quad u_{x'}(x) = \delta(x - x'). \quad (4.151)$$

Orthogonalität und „Normierung“ (s. Gl. (4.112)):

$$\langle u_{x'}, u_{x''} \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx u_{x'}^*(x) u_{x''}(x) = \delta(x' - x''). \quad (4.152)$$

Entwicklungssatz (s. Gl. (4.121)):

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} dx' \langle u_{x'}, f \rangle u_{x'}(x), \quad \forall f \quad (4.153a)$$

$$\text{mit} \quad \langle u_{x'}, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx u_{x'}^*(x) f(x) = f(x'), \quad (4.153b)$$

<sup>46</sup>Beachte: Die Wirkung des Produktoperators  $\hat{A}\hat{B}$  ist durch  $(\hat{A}\hat{B})f := \hat{A}(\hat{B}f)$  definiert.

<sup>47</sup>Da die Vertauschungsbeziehungen aller übrigen Observablen der betrachteten Systemklasse auf sie zurückgeführt werden können, heißt sie auch *fundamentale Vertauschungsbeziehung*.

also

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} dx' f(x') u_{x'}(x) = \int_{\mathbb{R}} dx' f(x') \delta(x - x'), \quad \forall f. \quad (4.153c)$$

Lösung des Eigenwertproblems von  $\hat{p}$ :

$$\text{Eigenwertgleichung: } (\hat{p} u_{p'})(x) = p' u_{p'}(x); \quad (4.154)$$

$$\text{Spektrum: } \sigma(\hat{p}) = \sigma_k(\hat{p}) = \mathbb{R}, \quad (4.155)$$

$$\text{Eigenfunktionen: } u_{p'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{(i/\hbar)p'x}. \quad (4.156)$$

Orthogonalität und „Normierung“:

$$\langle u_{p'}, u_{p''} \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx u_{p'}^*(x) u_{p''}(x) = \delta(p' - p''). \quad (4.157)$$

Entwicklungssatz (fouriersches Integraltheorem):

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} dp' \langle u_{p'}, f \rangle u_{p'}(x), \quad \forall f \quad (4.158a)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \langle u_{p'}, f \rangle &= \int_{\mathbb{R}} dx u_{p'}^*(x) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-(i/\hbar)p'x} f(x) \\ &=: \tilde{f}(p'), \quad \tilde{f} \text{ Fouriertransformierte von } f, \end{aligned} \quad (4.158b)$$

also

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} dp' \tilde{f}(p') u_{p'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} dp' \tilde{f}(p') e^{(i/\hbar)p'x}, \quad \forall f. \quad (4.158c)$$

Bei der Übersetzung von Funktionen (wir verwenden dafür das Symbol  $\rightsquigarrow$ ) sind Summen von Funktionen in Summen von Operatoren überzuführen. Die Korrespondenzregeln für *allgemeine Funktionen* von  $x$  allein sowie für *Polynome* in  $p$  allein sind sehr einfach und liefern „automatisch“ selbstadjungierte Operatoren:

$$A(x) \rightsquigarrow \hat{A}: \quad \hat{A} := A(\hat{x}), \quad (4.159)$$

$$B(p) \rightsquigarrow \hat{B}: \quad \hat{B} := B(\hat{p}). \quad (4.160)$$

(Polynom)

Aus einem Polynom in  $p$  wird dabei ein Differentialoperator.

Für *allgemeine Funktionen* von  $p$  findet man die Korrespondenzregel durch folgende Überlegung: Da die Transformation zwischen der Ortsvariablen  $x$  und der Impulsvariablen  $p$  durch das Fourierintegral (4.158) vermittelt wird, ist es naheliegend anzunehmen, dass analog zu

$$(\hat{A}f)(x) = A(x) f(x) \quad (4.161)$$

die Beziehung

$$(\widetilde{\hat{B}f})(p) = B(p) \tilde{f}(p) \quad (4.162)$$

gelten muss. Fouriertransformation von  $(\widetilde{\hat{B}f})(p)$  (analog zur Transformation (4.158c) mit  $p'$  ersetzt durch  $p$ ) und Benützung von (4.162) gibt dann

$$(\hat{B}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} dp (\widetilde{\hat{B}f})(p) e^{(i/\hbar)px} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} dp B(p) \tilde{f}(p) e^{(i/\hbar)px}.$$

Setzt man hier noch für  $\tilde{f}(p)$  die Transformation (4.158b) (mit  $p'$  ersetzt durch  $p$  und  $x$  ersetzt durch  $x'$ ) ein, so erhält man die *Korrespondenzregel*

$$B(p) \rightsquigarrow \hat{B}: \quad (\hat{B}f)(x) := \int_{\mathbb{R}} dx' K_B(x - x') f(x') \quad (4.163)$$

$$\text{mit } K_B(x - x') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp B(p) e^{(i/\hbar)p(x-x')}.$$

Ist  $B$  ein *Polynom*, so wird die Kernfunktion  $K_B$  proportional zu  $\delta(x - x')$ , und es resultiert wieder der *Differentialoperator*  $B(\hat{p})$  von Gl. (4.160), ist  $B$  *kein Polynom*, so ist der zugehörige Operator ein *Integraloperator*.

Damit können auch Funktionen von  $x$  und  $p$  der Bauart  $F(x, p) = A(x) + B(p)$  übersetzt werden. Speziell erhält man für die Wirkung der Operatoren der Observablen potentielle Energie  $\mathfrak{B}$ , kinetische Energie  $\mathfrak{Z}$  und (Gesamt-)Energie  $\mathfrak{E} \equiv \mathfrak{H}$  eines Teilchens in einem konservativen Kraftfeld:

$$(\hat{V}f)(x) := V(x) f(x), \quad (4.164)$$

$$(\hat{T}f)(x) := -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad (4.165)$$

$$(\hat{H}f)(x) := \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right\} f(x). \quad (4.166)$$

Da  $\hat{T}$  eine gegebene Operatorfunktion von  $\hat{p}$  ist, kann man die Lösung des Eigenwertproblems von  $\hat{T}$  unmittelbar auf die Lösung des Eigenwertproblems von  $\hat{p}$  zurückführen.<sup>48</sup>

<sup>48</sup>Wir betrachten zuerst das Eigenwertproblem von  $\hat{T}$ , da  $\hat{V}$  und  $\hat{H}$  systemspezifisch sind.

Lösung des Eigenwertproblems von  $\hat{T}$ :

$$\text{Eigenwertgleichung: } (\hat{T}u_{\pm p'})(x) = \frac{p'^2}{2m} u_{\pm p'}(x); \quad (4.167)$$

$$\text{Spektrum: } \sigma(\hat{T}) = \sigma_k(\hat{T}) = \left\{ \frac{p'^2}{2m}, p' \in \mathbb{R} \right\}, \quad (4.168)$$

$$\text{Eigenfunktionen: } u_{p'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{(i/\hbar)p'x}. \quad (4.169)$$

Die Eigenfunktionen sind gemäß Gl. (4.157) „normiert“, und es gilt der Entwicklungssatz von Gl. (4.158a) bis (4.158c). Während  $\hat{x}$  und  $\hat{p}$  nur nichtentartete Eigenwerte besitzen, besitzt  $\hat{T}$  zweifache Eigenwerte. In der Schreibweise von Gl. (4.115) hat man:

$$\text{Eigenwertgleichung: } (\hat{T}u_{T\tau})(x) = Tu_{T\tau}(x), \quad \tau = 1, 2; \quad (4.170)$$

$$\text{Spektrum: } \sigma(\hat{T}) = \sigma_k(\hat{T}) = \mathbb{R}_0^+, \quad (4.171)$$

$$\text{Eigenfunktionen: } u_{T1}(x) = \left(\frac{m}{2T}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{(i/\hbar)\sqrt{2mTx}}, \quad (4.172)$$

$$u_{T2}(x) = \left(\frac{m}{2T}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-(i/\hbar)\sqrt{2mTx}}.$$

Die „Normierung“ wurde im Einklang mit Gl. (4.117) geändert. Orthogonalität und „Normierung“ drücken sich entsprechend folgendermaßen aus:

$$\langle u_{T'\tau'}, u_{T''\tau''} \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx u_{T'\tau'}^*(x) u_{T''\tau''}(x) = \delta(T' - T'') \delta_{\tau'\tau''}. \quad (4.173)$$

Auch der Entwicklungssatz nimmt eine neue Form an (s. Aufgabe Q8).

Die Operatoren  $\hat{V}$  und  $\hat{H}$  sind systemspezifisch und können entweder nur nicht-entartete oder nur entartete oder sowohl nichtentartete als auch entartete Eigenwerte besitzen. Konkrete Aussagen kann man erst machen, wenn man das Potential spezifiziert.

Beispiel: Linearer harmonischer Oszillator mit Kraftzentrum im Ursprung

Betrachtet man das Eigenwertproblem von  $\hat{V}$  für diesen speziellen Fall, so ist wegen  $\hat{V} = m\omega_0^2 \hat{x}^2/2$  alles weitgehend analog wie beim Eigenwertproblem von  $\hat{T}$ , weshalb wir die Beziehungen hier nicht anschreiben.

Die Lösung des Eigenwertproblems des Hamiltonoperators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} \hat{x}^2, \quad (4.174)$$

d. h. die Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung (4.57), wurde bereits in den Gleichungen (4.58) bis (4.60) angeschrieben. Wir schreiben sie hier der Systematik halber nochmals an und verwenden dabei wieder die Abkürzung von Gl. (4.61).

Lösung des Eigenwertproblems von  $\hat{H}$ :

$$\text{Eigenwertgleichung: } (\hat{H}u_n)(x) = E_n u_n(x), \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0; \quad (4.175)$$

$$\text{Spektrum: } \sigma(\hat{H}) = \sigma_d(\hat{H}) = \{E_n, n \in \mathbb{N}_0\}, \quad (4.176)$$

$$\text{Eigenfunktionen: } u_n(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{(\alpha x)^2}{2}\right] H_n(\alpha x). \quad (4.177)$$

Orthogonalität und Normierung (s. Gl. (4.111)):

$$\langle u_{n'}, u_{n''} \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx u_{n'}^*(x) u_{n''}(x) = \delta_{n'n''}. \quad (4.178)$$

Entwicklungssatz (s. Gl. (4.122)):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n, f \rangle u_n(x), \quad \forall f \quad (4.179a)$$

$$\text{mit } \langle u_n, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx' u_n^*(x') f(x'). \quad (4.179b)$$

Wie man durch Einsetzen von Gl. (4.179b) in Gl. (4.179a) sieht, ist zu diesem Entwicklungssatz die folgende *Vollständigkeitsbeziehung* mathematisch äquivalent:<sup>49</sup>

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^*(x') u_n(x) = \delta(x - x'). \quad (4.180)$$

Die bisherigen Übersetzungsregeln waren eindeutig, weil die Nichtverträglichkeit von Teilchenort und Teilchenimpuls nicht ins Spiel kam.<sup>50</sup> Eine neue Situation liegt vor, wenn eine Funktion  $F(x, p)$  übersetzt werden soll, die *nicht* die Summe einer Funktion von  $x$  allein und einer Funktion von  $p$  allein ist. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Größe  $F(x, p) = xp$ , die sogar einen Namen hat: Virial. Klassisch gilt  $F(x, p) = xp = px = \frac{1}{2}(xp + px) = \frac{1}{3}(2xp + px) = \dots$  Ersetzt man aber in diesen Ausdrücken die Variablen  $x, p$  durch die Operatoren  $\hat{x}, \hat{p}$ , so ergeben sich aufgrund der Nichtvertauschbarkeit von  $\hat{x}$  und  $\hat{p}$  *verschiedene* Operatoren. Welchen soll man wählen? Die Frage ist in diesem

<sup>49</sup>Um ein unmittelbares Einsetzen zu ermöglichen, wurde in Gl. (4.179b) die Integrationsveränderliche von vornherein nicht mit  $x$ , sondern mit  $x'$  bezeichnet.

<sup>50</sup>Eine Nichteindeutigkeit könnte man nur „mutwillig“ konstruieren, indem man die klassischen Ausdrücke so umschreibt, dass Produkte von Orts- und Impulsvariablen auftreten; z. B.:  $p^2 = xp \frac{1}{x^2} px$ .

Fall leicht zu beantworten, da von den zur Auswahl stehenden Operatoren nur *einer* selbstadjungiert ist, und man gelangt zur Korrespondenzregel

$$F(x, p) = xp \rightsquigarrow \hat{F}: \quad \hat{F} = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}). \quad (4.181)$$

(Man sagt, man müsse vor dem Übersetzen „Symmetrisieren“.) Analog hat man

$$F(x, p) = A(x)p \rightsquigarrow \hat{F}: \quad \hat{F} = \frac{1}{2}[A(\hat{x})\hat{p} + \hat{p}A(\hat{x})]. \quad (4.182)$$

Die entsprechenden Ausdrücke für *drei* Raumdimensionen, d. h.  $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{p}$  und der zugehörige Operator  $\hat{F}$ , spielen im Ausdruck für die Energie eines geladenen Teilchens in einem Magnetfeld eine Rolle. Dabei ist dann  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  das Vektorpotential des Magnetfeldes.

Dass der Übersetzungsmechanismus nicht immer eindeutig ist, zeigt das folgende Beispiel, bei dem *verschiedene* selbstadjungierte Operatoren „zur Auswahl bleiben“:

$$F(x, p) = x^2 p^2 \rightsquigarrow \hat{F}: \quad \hat{F}_1 = \hat{x}\hat{p}^2\hat{x}, \quad \hat{F}_2 = \hat{p}\hat{x}^2\hat{p}, \quad \hat{F}_3 = \frac{1}{2}(\hat{x}^2\hat{p}^2 + \hat{p}^2\hat{x}^2), \quad (4.183a)$$

$$\hat{F}_4 = \frac{1}{4}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})^2, \quad \hat{F}_5 = \frac{1}{2}[(\hat{x}\hat{p})^2 + (\hat{p}\hat{x})^2], \dots \quad (4.183b)$$

Hätte man es mit einer solchen Größe zu tun, so müsste man auf gut Glück einen dieser Operatoren als den „richtigen“ postulieren und untersuchen, ob sich mit dieser Wahl Übereinstimmung mit dem Experiment ergibt oder nicht. (Wüsste man allerdings, dass die Observable als Quadrat des Virials aufzufassen ist, so hätte man von vornherein  $\hat{F}_4$  als  $\hat{F}$  zu wählen.) Das besprochene Beispiel hat aber nur akademische Bedeutung (deshalb die vielen „müsste“ und „hätte“), da niemand die den Operatoren  $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \dots$  zuzuordnenden Messapparate kennt.

Die aufgrund des Übersetzens einer kommutativen Algebra in eine nichtkommutative Algebra unvermeidlich bestehende prinzipielle Mehrdeutigkeit des Übersetzungsmechanismus hat für die bekannten quantenmechanischen Problemstellungen keine praktische Relevanz.

Bisher haben wir uns nur mit der Übersetzung von Funktionen  $F(x, p)$  befasst, welche Summen von Produkten von Funktionen von  $x$  und Potenzen von  $p$  sind. Wie hat man allgemeinere Funktionen<sup>51</sup> zu übersetzen? Die Antwort lautet: *Für derartige Funktionen gibt es überhaupt keine Übersetzungsmöglichkeit.* Auch dieser Umstand hat jedoch keine praktische Relevanz.

In der klassischen Mechanik kann man eine *beliebige* Funktion  $F(x, p)$  als Observable, d. h. als Messgröße, bezeichnen. Kennt man nämlich keinen Apparat, der die Größe als „Ganzes“ zu messen gestattet, so kann man einen Apparat bauen, der Teilchenort und Teilchenimpuls *zugleich* misst, intern den Funktionswert  $F(x, p)$  berechnet und den berechneten Wert anzeigt. In der Quantenmechanik sind Teilchenort und Teilchenimpuls

<sup>51</sup>Ein Beispiel wäre  $\sqrt{|xp|}$ .



nicht verträglich, und man kann deshalb von einer Observablen nur sprechen, wenn es einen Apparat gibt, der es gestattet, die Größe als „Ganzes“ zu messen.

Zum Abschluss werden unter Verwendung der auf Seite 251 besprochenen „schlampigen“ Operator-Kurzschreibweise einige Korrespondenzregeln zum 2. Grundgesetz für andere Systemklassen angegeben. (Die entsprechenden Zustandsräume wurden im Anschluss an das 1. Grundgesetz besprochen.)

### Systeme mit einem spinlosen Teilchen in drei Raumdimensionen

Den *fundamentalen Observablen* Teilchenort  $\mathfrak{r}$  und Teilchenimpuls  $\mathfrak{p}$  werden die folgenden Operatoren zugeordnet:

$$\mathfrak{r} \longrightarrow \hat{\mathbf{r}}: \quad \hat{\mathbf{r}} := \mathbf{r}, \quad (4.184)$$

$$\mathfrak{p} \longrightarrow \hat{\mathbf{p}}: \quad \hat{\mathbf{p}} := -i\hbar\nabla. \quad (4.185)$$

Ausführlich angeschrieben:<sup>52</sup>

$$(\hat{\mathbf{r}}u)(\mathbf{r}) := \mathbf{r}u(\mathbf{r}), \quad (4.186)$$

$$(\hat{\mathbf{p}}u)(\mathbf{r}) := -i\hbar\nabla u(\mathbf{r}). \quad (4.187)$$

Die *fundamentalen Vertauschungsbeziehungen* lauten:

$$[\hat{x}_j, \hat{x}_k] = \hat{0}, \quad [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = \hat{0}, \quad [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}\hat{1}. \quad (4.188)$$

Beispiele für weitere Observablen:

*Bahndrehimpuls*  $\mathfrak{l}$  des Teilchens:

Da in den Komponenten von  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  nur Produkte von Variablen vorkommen, denen in der Quantenmechanik verträgliche Größen entsprechen, gibt es beim Übersetzen in einen selbstadjungierten Operator keinerlei Probleme:

$$\mathbf{l} \rightsquigarrow \hat{\mathbf{l}}: \quad \hat{\mathbf{l}} := \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar(\mathbf{r} \times \nabla). \quad (4.189)$$

In Komponenten:

$$\hat{l}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{und zyklisch.}$$

Mithilfe der fundamentalen Vertauschungsbeziehungen kann man leicht jene der Operatoren der Bahndrehimpulskomponenten  $\mathfrak{l}_x, \mathfrak{l}_y, \mathfrak{l}_z$  berechnen,

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hbar\hat{l}_z \quad \text{und zyklisch,} \quad (4.190)$$

<sup>52</sup>Die Wirkung aller übrigen Operatoren wird nur mehr in Kurzschreibweise angegeben.

und die Vertauschungsbeziehungen

$$[\hat{\mathbf{l}}^2, \hat{l}_j] = \hat{0}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.191)$$

beweisen (s. Aufgabe Q9).

*Gesamtenergie* § der „Relativbewegung“ des Wasserstoffatoms ohne Berücksichtigung des Spins und bei Vernachlässigung sonstiger relativistischer Korrekturen.<sup>53</sup>

Die Übersetzung der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \quad (4.192)$$

in einen selbstadjungierten Operator macht ebenfalls keinerlei Probleme:

$$H \rightsquigarrow \hat{H}: \quad \hat{H} := \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{\hat{r}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r}. \quad (4.193)$$

*Lösung des Eigenwertproblems von  $\hat{H}$ :*

Die Lösung wird nur für den diskreten Teil des Spektrums angegeben, nicht aber für das Kontinuum bei  $E > 0$ :<sup>54</sup>

$$\text{Eigenwertgleichung: } (\hat{H}u_{nlm_l})(\mathbf{r}) = E_n u_{nlm_l}(\mathbf{r}), \quad E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}; \quad (4.194)$$

$$n \in \mathbb{N}; \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad (4.195)$$

$$m_l = -l, -l+1, \dots, +l;$$

$$\text{diskretes Spektrum: } \sigma_d(\hat{H}) = \{E_n, n \in \mathbb{N}\}, \quad (4.196)$$

$$\text{Eigenfunktionen: } u_{nlm_l}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm_l}(\vartheta, \varphi). \quad (4.197)$$

Die Radialfunktionen  $R_{nl}$  schreiben wir hier nicht an.<sup>55</sup> Die Vielfachheit des Eigenwertes  $E_n$  ist durch

$$g_n = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2 \quad (4.198)$$

gegeben. (Bei Berücksichtigung des Spins ist nicht der Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , sondern der Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$  Zustandsraum, und es gilt dann  $g_n = 2n^2$ .)

<sup>53</sup>  $m$  ist dabei die reduzierte Masse des Elektron-Proton-Systems, also  $m = m_e/(1 + m_e/m_p)$ . Nichtberücksichtigung des Spins und Vernachlässigung sonstiger relativistischer Korrekturen bedeutet Vernachlässigung der Feinstruktur des Spektrums.

<sup>54</sup> Das Lösen dieses Eigenwertproblems wird in allen Lehrveranstaltungen und Lehrbüchern über die Mathematischen Methoden der Theoretischen Physik und in allen Quantenmechanik-Lehrbüchern ausführlich behandelt.

Das diskrete Spektrum entspricht den gebundenen Elektron-Proton-Zuständen, also dem Wasserstoffatom, das kontinuierliche Spektrum entspricht den Elektron-Proton-Streuzuständen.

<sup>55</sup> Siehe Anhang A von Grau, D.: Übungsaufgaben zur Quantentheorie, <http://www.dietrich-grau.at/>

### Systeme mit einem Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in drei Raumdimensionen

Den *fundamentalen Observablen* Teilchenort  $\mathfrak{r}$ , Teilchenimpuls  $\mathfrak{p}$ , Teilchenspin  $\mathfrak{s}$  werden die folgenden Operatoren zugeordnet:

$$\mathfrak{r} \longrightarrow \hat{\mathbf{r}}: \quad \hat{\mathbf{r}} := \begin{pmatrix} \mathbf{r} & 0 \\ 0 & \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad (4.199)$$

$$\mathfrak{p} \longrightarrow \hat{\mathbf{p}}: \quad \hat{\mathbf{p}} := \begin{pmatrix} -i\hbar\nabla & 0 \\ 0 & -i\hbar\nabla \end{pmatrix}, \quad (4.200)$$

$$\mathfrak{s} \longrightarrow \hat{\mathbf{s}}: \quad \hat{\mathbf{s}} := \frac{\hbar}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.201)$$

mit den *Paulimatrizen*

$$\hat{\sigma}_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.202)$$

Der Spin ist ein so genannter „innerer Freiheitsgrad“ der Teilchen. Da er kein klassisches Analogon besitzt, kann man den entsprechenden Operator nicht durch Übersetzen erhalten, sondern es muss ein eigenständiges Postulat eingeführt werden.

Wir schreiben die Wirkung für zwei von diesen neun Operatoren, und zwar für  $\hat{y}$  und  $\hat{\sigma}_y$  ausführlich an:

$$(\hat{y}u)(\mathbf{r}) := \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+(\mathbf{r}) \\ u_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y u_+(\mathbf{r}) \\ y u_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (4.203)$$

$$(\hat{\sigma}_y u)(\mathbf{r}) := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+(\mathbf{r}) \\ u_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i u_-(\mathbf{r}) \\ i u_+(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (4.204)$$

Die *fundamentalen Vertauschungsbeziehungen* lauten:

$$\begin{aligned} [\hat{x}_j, \hat{x}_k] &= \hat{0}, & [\hat{p}_j, \hat{p}_k] &= \hat{0}, & [\hat{x}_j, \hat{p}_k] &= i\hbar\delta_{jk}\hat{1}; \\ [\hat{x}_j, \hat{s}_k] &= \hat{0}, & [\hat{p}_j, \hat{s}_k] &= \hat{0}, & [\hat{s}_x, \hat{s}_y] &= i\hbar\hat{s}_z \text{ und zyklisch.} \end{aligned} \quad (4.205)$$

Wie man sieht, wurde der Spinoperator so konstruiert, dass seine Komponenten dieselben Vertauschungsbeziehungen erfüllen wie die Komponenten des Bahndrehimpulsoperators (siehe Gl. (4.190)).

Ein Beispiel für eine Funktion der fundamentalen Operatoren  $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{s}}$  ist der Hamiltonoperator für die „Relativbewegung“ des Wasserstoffatoms bei Berücksichtigung des Spins, aber unter Vernachlässigung sonstiger relativistischer Korrekturen:

$$\hat{H} := \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{\hat{r}} + \frac{e^2}{2m_e^2 c^2} \frac{1}{\hat{r}^3} \hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}. \quad (4.206)$$

Siehe dazu die Aufgabe Q10.

### Systeme mit $N$ spinlosen Teilchen in drei Raumdimensionen

Den *fundamentalen Observablen*  $\mathfrak{r}_a, \mathfrak{p}_a$ ,  $a = 1, 2, \dots, N$ , werden die folgenden Operatoren zugeordnet:

$$\mathfrak{r}_a \longrightarrow \hat{\mathbf{r}}_a: \quad \hat{\mathbf{r}}_a := \mathbf{r}_a, \quad (4.207)$$

$$\mathfrak{p}_a \longrightarrow \hat{\mathbf{p}}_a: \quad \hat{\mathbf{p}}_a := -i\hbar \nabla_a. \quad (4.208)$$

Ausführlich angeschrieben:

$$(\hat{\mathbf{r}}_a u)(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) := \mathbf{r}_a u(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (4.209)$$

$$(\hat{\mathbf{p}}_a u)(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) := -i\hbar \nabla_a u(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (4.210)$$

Die *fundamentalen Vertauschungsbeziehungen* lauten:

$$[\hat{x}_{aj}, \hat{x}_{bk}] = \hat{0}, \quad [\hat{p}_{aj}, \hat{p}_{bk}] = \hat{0}, \quad [\hat{x}_{aj}, \hat{p}_{bk}] = i\hbar \delta_{ab} \delta_{jk} \hat{1}. \quad (4.211)$$

Als Beispiel für eine Funktion der fundamentalen Operatoren  $\hat{\mathbf{r}}_a, \hat{\mathbf{p}}_a$  schreiben wir für den Fall  $N = 2$  den Hamiltonoperator für das *Heliumatom* ohne Berücksichtigung des Spins, ohne sonstige relativistische Korrekturen und unter der Annahme eines ruhenden Kerns unendlicher Masse an:

$$\begin{aligned} \hat{H} &:= \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_e} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_e} - \frac{2e^2}{\hat{r}_1} - \frac{2e^2}{\hat{r}_2} + \frac{e^2}{|\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2|} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_2 - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \end{aligned} \quad (4.212)$$

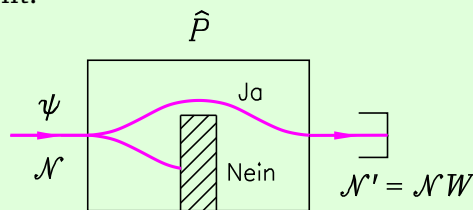
## 4.8 Messungen und Umpräparationen

### 3. Grundgesetz: **Messung einer Observablen** $\mathfrak{A}$

(determinative Messung, nichtreproduzierbare Messung)  
( $t$  „fest“)

$\psi$  sei der Zustandsvektor einer reinen Gesamtheit zu einem bestimmten Zeitpunkt, gefragt ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei einer Messung der Observablen  $\mathfrak{A}$  zum betreffenden Zeitpunkt einen Messwert aus einer gegebenen Teilmenge  $\tau(\hat{A})$  des Messwertspektrums von  $\mathfrak{A}$  findet.

Symbolisch dargestellt:



$\mathfrak{A}$ : Messwert aus  
 $\tau(\hat{A}) \subseteq \sigma(\hat{A})$ ?

Messung = Filterung + Selektion + *Zählung*

(a): Dem Messapparat wird der Projektionsoperator

$$\hat{P} = \sum_{n: a_n \in \tau(\hat{A})} \hat{P}_n + \int_{a \in \tau(\hat{A})} d\hat{P}(a) \quad (4.213)$$

zugeordnet.

(b): Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt

$$W = \|\hat{P}\psi\|^2. \quad (4.214)$$

*Bemerkungen:*

1. Ersetzt man in Gl. (4.214)  $\psi$  durch  $e^{i\gamma}\psi$ ,  $\gamma \in [0, 2\pi)$  (konstant), so ändert dies  $W$  nicht (Konsistenz des 3. Grundgesetzes mit dem 1. Grundgesetz).
2. Wegen der Selbstadjungiertheit und Idempotenz von  $\hat{P}$  kann man statt  $\|\hat{P}\psi\|^2$  auch  $\langle \psi, \hat{P}\psi \rangle$  schreiben.
3. In Gl. (4.213) ist das Integral (die Summe) wegzulassen, falls das Spektrum von  $\hat{A}$  rein diskret (rein kontinuierlich) ist.
4. Spezialfall: Wahrscheinlichkeit  $W_n$ , bei einer Messung von  $\mathfrak{A}$  einen diskreten Messwert  $a_n$  zu finden

Mit  $\tau(\hat{A}) = \{a_n\}$  folgt  $\hat{P} = \hat{P}_n$ , und man erhält (s. Gl. (4.129))

$$W_n = \|\hat{P}_n \psi\|^2 = \sum_{\nu=1}^{g_n} |\langle u_{n\nu}, \psi \rangle|^2. \quad (4.215)$$

Ist der Eigenwert  $a_n$  nicht entartet ( $g_n = 1$ ), so vereinfacht sich dies weiter zu

$$W_n = |\langle u_n, \psi \rangle|^2. \quad (4.216)$$

5. Spezialfall: Wahrscheinlichkeit  $W_{\Delta a}(a)$ , bei einer Messung von  $\mathfrak{A}$  einen Messwert aus dem Intervall  $\mathbb{I} = (a - \frac{\Delta a}{2}, a + \frac{\Delta a}{2})$  zu finden<sup>56</sup>

Analog zu Punkt 4 erhält man

$$W_{\Delta a}(a) = \left\| \int_{a - \frac{\Delta a}{2}}^{a + \frac{\Delta a}{2}} d\hat{P}(a') \psi \right\|^2 = \int_{a - \frac{\Delta a}{2}}^{a + \frac{\Delta a}{2}} da' \sum_{\alpha'=1}^{g(a')} |\langle u_{a'\alpha'}, \psi \rangle|^2 \quad (4.217)$$

und falls alle Eigenwerte  $a'$  aus diesem Intervall einfach sind

$$W_{\Delta a}(a) = \int_{a - \frac{\Delta a}{2}}^{a + \frac{\Delta a}{2}} da' |\langle u_{a'}, \psi \rangle|^2. \quad (4.218)$$

Da  $\Delta a$  (endlich) beliebig klein gewählt werden kann, bezeichnet man die Größe

$$W(a) := \sum_{\alpha=1}^{g(a)} |\langle u_{a\alpha}, \psi \rangle|^2 \quad (4.219)$$

bzw. (im Falle  $g(a) = 1$ )

$$W(a) := |\langle u_a, \psi \rangle|^2 \quad (4.220)$$

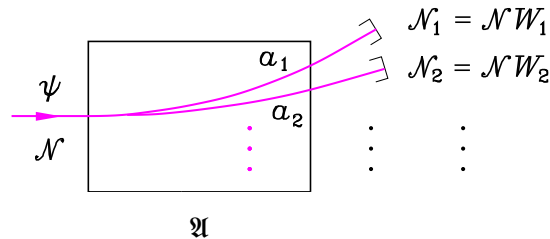
als *Wahrscheinlichkeitsdichte* für die Observable  $\mathfrak{A}$ , und man sagt („Kurzsprechweise“),  $W(a) da$  sei die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von  $\mathfrak{A}$  einen Messwert aus  $da$  um  $a$  zu finden, obwohl ein Messapparat stets nur die Feststellung ermöglicht, dass ein Messwert in einem bestimmten *endlichen* Intervall liegt.

6. Das 3. Grundgesetz liefert nur Aussagen für die Messung einer einzigen Observablen. Entsprechende Aussagen für die Messung eines Satzes von mehreren (verträglichen) Observablen werden wir später aus dem 3. Grundgesetz im Verein mit dem 4. Grundgesetz *ableiten*.

<sup>56</sup>Es muss natürlich  $\mathbb{I} \subseteq \sigma_k(\hat{A})$  gelten. Die (abgesehen von der gerade genannten Einschränkung) beliebig vorgebbare Größe  $\Delta a$  darf nicht mit der Unbestimmtheit  $\Delta a$  der Observablen  $\mathfrak{A}$  von Gl. (4.264) verwechselt werden, welche ein Maß für die Breite der Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt.

7. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von  $\mathfrak{A}$  irgendeinen Wert aus  $\sigma(\hat{A})$  zu erhalten, muss natürlich eins sein. Dies ist durch die Vollständigkeitsbeziehung von Gl. (4.137) und die im 1. Grundgesetz erhobene Forderung  $\|\psi\| = 1$  gewährleistet.<sup>57</sup>
8. Die Tatsache, dass man von der Messung der Observablen  $\mathfrak{A}$  zur Zeit  $t$  spricht, bedeutet *nicht* – wie oft fälschlich behauptet wird – , dass der Messprozess selbst nur „unendlich kurze Zeit“ beanspruchen darf. Messung der Observablen  $\mathfrak{A}$  zur Zeit  $t$  bedeutet lediglich, dass durch den Messprozess der Observablen  $\mathfrak{A}$  für den Zeitpunkt  $t$  ein Wert aus  $\tau(\hat{A})$  zugeordnet wird.<sup>58</sup> Wir haben deshalb im Titel des 3. Grundgesetzes das Wort *fest* unter Anführungszeichen gesetzt.
9. Das 3. Grundgesetz stellt eine Verallgemeinerung der bornschen Interpretation von  $|\psi(x)|^2 = |\langle u_x, \psi \rangle|^2$  auf beliebige Observablen beliebiger Systeme (Systeme mit beliebig vielen räumlichen und Spin-Freiheitsgraden) dar.
10. Falls die Observable  $\mathfrak{A}$  ein rein diskretes Messwertspektrum  $\{a_1, a_2, \dots\}$  besitzt, kann man die Messung von  $\mathfrak{A}$  so durchführen, dass man die im Experiment untersuchten  $\mathcal{N}$  Systeme *vollständig* nach ihren Werten von  $\mathfrak{A}$  „auffächert“ und zählt, für wie viele Systeme sich der Messwert  $a_1$  bzw. der Messwert  $a_2, \dots$  ergibt.

Symbolisch dargestellt:



Messung = *vollständige* Filterung + Zählung

Aus den Zählraten  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots$ ,

$$\mathcal{N}_n = \mathcal{N} \|\hat{P}_n \psi\|^2 = \mathcal{N} \sum_{\nu=1}^{g_n} |\langle u_{n\nu}, \psi \rangle|^2,$$

kann man dann für die Observable  $\mathfrak{A}$  einen *Mittelwert* und eine *mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert* berechnen. Wir werden uns mit diesen Größen in Abschnitt 4.10 näher befassen.

<sup>57</sup>Die Forderung  $\|\psi\| = 1$  wurde im 1. Grundgesetz nur gestellt, damit die anderen Grundgesetze eine möglichst einfache Form annehmen. Hätten wir diese Forderung nicht gestellt, so hätten wir beispielsweise im 3. Grundgesetz anstelle von Gl. (4.214)  $W = \|\hat{P}\psi\|^2/\|\psi\|^2$  postulieren müssen. Analoge Änderungen müsste man auch bei den weiteren Grundgesetzen vornehmen.

<sup>58</sup>Zur Frage der Bedeutung des Zeitparameters in der Quantenmechanik, insbesondere im Zusammenhang mit Präparationen, Umpräparationen und Messungen, s. G. Ludwig: Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik, Bd. 3, XI § 1, XIII § 5, Vieweg, Braunschweig 1984.

### Systeme mit einem spinlosen Teilchen in einer Raumdimension

Aus Gl. (4.220) folgt wegen Gl. (4.153b) und Gl. (4.158b)

$$W(x) = |\langle u_x, \psi \rangle|^2 = |\psi(x)|^2, \quad (4.221)$$

$$W(p) = |\langle u_p, \psi \rangle|^2 = |\tilde{\psi}(p)|^2. \quad (4.222)$$

Das Absolutquadrat der Zustandsfunktion  $\psi(x)$  liefert die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Teilchenort, d. h. die Antreffwahrscheinlichkeitsdichte, das Absolutquadrat ihrer Fouriertransformierten  $\tilde{\psi}(p)$  liefert die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Teilchenimpuls.

Für die *spezielle Zustandsfunktion*  $\psi$  von Gl. (4.92) erhält man (s. Aufgabe Q11)

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar\alpha\sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{p^2}{2\hbar^2\alpha^2} - \frac{i}{\hbar} pa\right]. \quad (4.223)$$

Aus Gl. (4.92) und Gl. (4.223) folgt

$$W(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp[-\alpha^2(x-a)^2], \quad (4.224)$$

$$W(p) = \frac{1}{\hbar\alpha\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{p^2}{\hbar^2\alpha^2}\right]. \quad (4.225)$$

Die Normierung von  $\psi$  auf eins (s. Gl. (4.91)) gewährleistet

$$\int_{\mathbb{R}} dx W(x) = \int_{\mathbb{R}} dp W(p) = 1. \quad (4.226)$$

Beispiel: Linearer harmonischer Oszillator mit Kraftzentrum im Ursprung

Nehmen wir nun an, die Zustandsfunktion  $\psi$  von Gl. (4.92) beschreibe zu einem bestimmten Zeitpunkt eine Gesamtheit linearer harmonischer Oszillatoren. Dabei sei  $\alpha$  in Gl. (4.92) dieselbe Größe wie in Gl. (4.61).<sup>59</sup> Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der Energie eines Oszillators dieser Gesamtheit zum betreffenden Zeitpunkt den Messwert  $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_0$  ( $n$  fest) zu finden? Die Antwort lautet: Nach Gl. (4.216) gibt  $W_n = |\langle u_n, \psi \rangle|^2$  mit der (auf eins normierten) Energieeigenfunktion  $u_n$  von Gl. (4.177) und der (auf eins normierten) Zustandsfunktion  $\psi$  von Gl. (4.92) die

<sup>59</sup>Was dies physikalisch bedeutet, wird auf Seite 293 besprochen.



gesuchte Wahrscheinlichkeit. Es gilt also  $W_n = |c_n|^2$  mit

$$\begin{aligned} c_n &:= \langle u_n, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx u_n^*(x) \psi(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2} [(x-a)^2 + x^2]\right\} H_n(\alpha x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n n! \pi}} \int_{\mathbb{R}} d\xi \exp\left\{-\frac{1}{2} [(\xi - \alpha a)^2 + \xi^2]\right\} H_n(\xi). \end{aligned} \quad (4.227)$$

Berechnet man das Integral, so findet man (siehe Aufgabe Q12)

$$c_n = \frac{(\alpha a)^n}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left[-\frac{\alpha^2 a^2}{4}\right], \quad (4.228)$$

und damit ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$W_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{\alpha^2 a^2}{2}\right]^n \exp\left[-\frac{\alpha^2 a^2}{2}\right]. \quad (4.229)$$

Durch Einsetzen von Gl. (4.229) verifiziert man leicht die Beziehung

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n = 1. \quad (4.230)$$

Hätte man anstelle von  $\psi(x)$  Gl. (4.92) die Funktion  $\varphi(x)$  Gl. (4.93) als Zustandsfunktion verwendet, so hätten sich für  $W(x)$ ,  $W(p)$  und  $W_n$  dieselben Ausdrücke ergeben.

Die Funktion  $\psi$  Gl. (4.92) kann nach dem Entwicklungssatz (4.179a), (4.179b) in der Form

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x) \quad (4.231)$$

entwickelt werden, wobei die Entwicklungskoeffizienten  $c_n$  durch Gl. (4.228) und die Entwicklungsfunktionen  $u_n$  durch Gl. (4.177) gegeben sind.

Siehe die Aufgabe Q13.

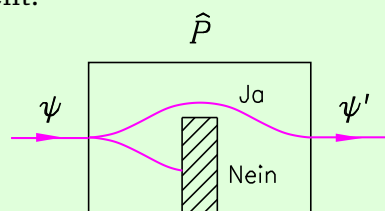
Im Zusammenhang mit obigem Beispiel drängen sich folgende Fragen auf:

- Wie muss man eine Gesamtheit präparieren, damit ihre Zustandsfunktion unmittelbar nach der Präparation durch  $\psi(x)$  Gl. (4.92) mit  $\alpha$  gemäß Gl. (4.61) gegeben ist?
- Durch welche Zustandsfunktion wird die neue Gesamtheit charakterisiert, die man aus der durch  $\psi$  charakterisierten Gesamtheit durch eine präparative Messung von  $\mathfrak{S}$  und Selektion der Systeme mit einem bestimmten Messwert, etwa  $E_0$ , erhält?

4. Grundgesetz: **Umpräparation bezüglich einer Observablen  $\mathfrak{A}$**   
 (präparative Messung, reproduzierbare Messung)  
 ( $t$  „fest“)

$\psi$  sei der Zustandsvektor einer reinen Gesamtheit zu einem bestimmten Zeitpunkt, gefragt ist der Zustandsvektor jener neuen reinen Gesamtheit, welche man durch eine Umpräparation zum betreffenden Zeitpunkt erhält, bei der man Systeme mit einem Messwert aus einer gegebenen Teilmenge  $\tau(\hat{A})$  des Messwertspektrums von  $\mathfrak{A}$  auswählt.

Symbolisch dargestellt:



$\mathfrak{A}$ : Messwert aus  
 $\tau(\hat{A}) \subseteq \sigma(\hat{A})$ ?

Umpräparation = Filterung + Selektion

(a): Dem Präparationsapparat wird der Projektionsoperator

$$\hat{P} = \sum_{n: a_n \in \tau(\hat{A})} \hat{P}_n + \int_{a \in \tau(\hat{A})} d\hat{P}(a) \quad (4.232)$$

zugeordnet.

(b): Eine neue Gesamtheit wird nur unter der Voraussetzung  $\hat{P}\psi \neq \theta$  erzeugt. Für den gesuchten Zustandsvektor gilt

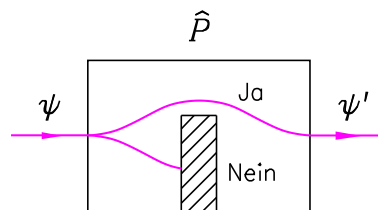
$$\psi' = \frac{\hat{P}\psi}{\|\hat{P}\psi\|}. \quad (4.233)$$

*Bemerkungen:*

1. Statt Umpräparation sagt man oft auch „Zustandsreduktion“ oder „Reduktion der Wellenpakete“. Es gibt im Zusammenhang mit diesem *Projektionspostulat* viele Missinterpretationen, hauptsächlich dadurch, dass man den Zustandsvektor als Größe interpretiert, welche den „physikalischen Zustand“ eines Einzelsystems beschreibt, und deshalb die sprunghafte Änderung des Zustandsvektors als sprunghafte reale Änderung an einem Einzelsystem interpretiert.
2. Die Voraussetzung  $\hat{P}\psi \neq \theta$  bedeutet mathematisch, dass der Zustandsvektor  $\psi$  nicht zu jenem Teilraum von  $\mathcal{H}$  orthogonal sein darf, in den  $\hat{P}$  projiziert. Nach

dem 3. Grundgesetz ist dann die Wahrscheinlichkeit für die „Antwort Ja“ von null verschieden, und die neue Gesamtheit setzt sich aus  $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \|\hat{P}\psi\|^2$  Systemen zusammen, wenn die ursprüngliche Gesamtheit  $\mathcal{N}$  Systeme umfasste.<sup>60</sup> Im Falle  $\hat{P}\psi = \theta$  gibt es daher gar keine neue Gesamtheit ( $\mathcal{N}' = 0$ ).

3. Der Zustandsvektor  $\psi'$  jener neuen reinen Gesamtheit, die sich aus den Systemen zusammensetzt, welche auf die gestellte Frage „mit Ja geantwortet haben“, ist im wesentlichen durch  $\hat{P}\psi$ , also durch die Komponente von  $\psi$  in dem zur Antwort „Ja“ (zum Eigenwert 1 von  $\hat{P}$ ) gehörigen Teilraum von  $\mathcal{H}$ , gegeben. Der zusätzliche Faktor rührt von der Normierungsforderung des 1. Grundgesetzes her:  $\psi'$  muss als Zustandsvektor gemäß  $\|\psi'\| = 1$  normiert sein.
4. Zu  $t$  „fest“ siehe Punkt 8 der Bemerkungen zum 3. Grundgesetz.
5. Ist  $\tau(\hat{A}) = \sigma(\hat{A})$ , so gilt  $\hat{P} = \hat{\mathbb{1}}$  und es folgt  $\psi' = \psi$ ,  $\mathcal{N}' = \mathcal{N}$ .
6. Umpräparationen bezüglich eines Satzes von mehreren (verträglichen) Observablen werden wir im Abschnitt 4.13 behandeln.
7. Spezialfall: Der Operator  $\hat{A}$  besitze einen nicht entarteten diskreten Eigenwert  $a_n$ . Unter der Voraussetzung, dass der Zustandsvektor  $\psi$  zum zugehörigen Eigenvektor  $u_n$  von  $\hat{A}$  nicht orthogonal ist ( $\langle u_n, \psi \rangle \neq 0$ ), betrachten wir die folgende Umpräparation:



$\mathfrak{A}$ : Messwert  $a_n$ ?  
 $g_n = 1$   
 ( $n$  fest,  $a_n \in \sigma_d(\hat{A})$ )

Mit dem Projektionsoperator  $\hat{P} = \hat{P}_n = \langle u_n, \cdot \rangle u_n$  folgt dann  $\hat{P}\psi = \langle u_n, \psi \rangle u_n$  und  $\|\hat{P}\psi\|^2 = |\langle u_n, \psi \rangle|^2$ , also

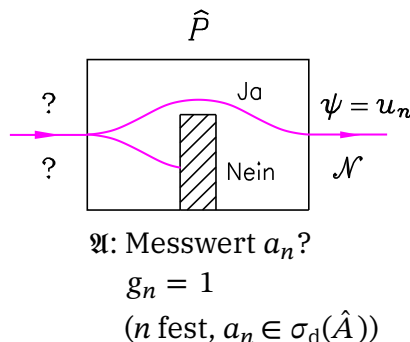
$$\psi' = \frac{\langle u_n, \psi \rangle}{|\langle u_n, \psi \rangle|} u_n = e^{i\gamma} u_n \hat{=} u_n \quad (\text{siehe das 1. Grundgesetz}).$$

Der Zustand ist dann also *unabhängig von  $\psi$*  („verlorenes Gedächtnis“). Das bedeutet aber, dass nach der Umpräparation auch *dann* eine reine Gesamtheit mit dem Zustandsvektor  $u_n$  vorliegt, wenn vor der Umpräparation *irgendwelche* Systeme der betrachteten Art vorlagen, über deren Vorgeschichte man nicht einmal etwas

<sup>60</sup>Die gedachten Gesamtheiten des Theoretikers enthalten immer unendlich viele Systeme, im Experiment werden sie annähernd durch tatsächliche Gesamtheiten von hinreichend vielen Systemen verwirklicht.

wissen muss.<sup>61</sup> Man bezeichnet die Umpräparation in diesem Falle daher als *Präparation*. Diese Präparation ist *vollständig*, weil sie eine reine Gesamtheit (einen Zustandsvektor) festlegt. Wir haben damit das erste Beispiel einer vollständigen Präparation kennen gelernt.

*Spezialfall einer vollständigen Präparation:*



Präparation = Filterung + Selektion

Ob  $\mathcal{N} \neq 0$  ist, muss man durch einen „Vorversuch“ klären, bei dem man einen Zähler hinzunimmt, mit dessen Hilfe man  $\mathcal{N}$  misst.

Im gegebenen Fall nennt man den *Observablensatz*  $\{\mathfrak{A}\}$  (Satz mit einer einzigen Observablen) *vollständig bezüglich des Messwertes*  $a_n$  ( $n$  fest). Sind *alle* Eigenwerte von  $\hat{A}$  diskret und nicht entartet, so kann man einen Präparationsapparat bauen, der je nach Einstellung eine reine Gesamtheit mit dem Zustandsvektor  $u_1$  (also Systeme mit dem Wert  $a_1$  von  $\mathfrak{A}$ ) oder eine reine Gesamtheit mit dem Zustandsvektor  $u_2$  (also Systeme mit dem Wert  $a_2$  von  $\mathfrak{A}$ ) ... herstellt, wobei durch die verschiedenen Einstellungen des Apparates ein vollständiges Vektorsystem „überstrichen“ wird.  $\{\mathfrak{A}\}$  wird dann als *vollständiger Observablensatz* (an sich) mit rein diskreten Messwerten bezeichnet.

Im Allgemeinen – insbesondere bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden – reicht die Präparation bezüglich einer einzigen Observablen nicht aus, um eine reine Gesamtheit herzustellen (einen Zustandsvektor festzulegen). Man muss dann geeignete *Sätze* von (verträglichen) Observablen mit mehr als einer Observablen heranziehen (s. die Abschnitte 4.13 und 4.15).

Beispiel: Linearer harmonischer Oszillator mit Kraftzentrum im Ursprung

Wir können nun die beiden Fragen von Seite 289 beantworten. Die Zustandsfunktion  $\psi(x)$  Gl. (4.92) mit  $\alpha$  gemäß Gl. (4.61) hat die mathematische Form der Grundzustands-

<sup>61</sup>Es kann sich z. B. um eine gemischte Gesamtheit handeln, die man zuvor selbst durch eine unvollständige Präparation hergestellt hat, oder um Systeme, an denen eine vollständige Präparation durchgeführt wurde, von der man aber keine oder keine genaue Kenntnis hat.

funktion eines linearen harmonischen Oszillators mit Eigenfrequenz  $\omega_0$  und Kraftzentrum an der Stelle  $x = a$ , d. h. sie ist Eigenfunktion des Operators

$$\hat{H}_a := \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} (\hat{x} - a\hat{1})^2 \quad (4.234)$$

zum Eigenwert  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ . Man kann somit eine reine Gesamtheit mit der Zustandsfunktion  $\psi(x, t_0) = \psi(x)$  präparieren, indem man zum Zeitpunkt  $t_0$  eine präparative Messung der Observablen  $\mathfrak{H}_a$  durchführt und die Systeme mit dem Messwert  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$  selektiert. (Siehe dazu die symbolische Darstellung auf der nächsten Seite.) Als experimentelle Vorgangsweise kann man sich dazu vorstellen, dass man eine beliebige Gesamtheit von Oszillatoren mit Kraftzentrum an der Stelle  $x = a$  „nimmt“, an diesen zum Zeitpunkt  $t_0$  eine präparative Energiemessung durchführt, alle Oszillatoren, die in ihrem Grundzustand „angetroffen“ werden, als neue Gesamtheit wählt, und bei diesen „plötzlich“ das Kraftzentrum an die Stelle  $x = 0$  verschiebt, sodass der Hamiltonoperator für  $t > t_0$  nicht durch  $\hat{H}_a$  Gl. (4.234), sondern durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} \hat{x}^2 \quad (4.235)$$

gegeben ist („plötzliche“ Änderung des Hamiltonoperators). Für  $t > t_0$  hat man dann Oszillatoren mit Kraftzentrum im Ursprung.

Nehmen wir nun an, an der zum Zeitpunkt  $t_{0-} = t_0 - \epsilon$  durch vollständige Präparation hergestellten reinen Gesamtheit mit der Zustandsfunktion  $\psi(x, t_{0-}) = \psi(x)$  Gl. (4.92) werde unmittelbar darauf, d. h. zum Zeitpunkt  $t_{0+} = t_0 + \epsilon$ , eine Filterung bezüglich der Energie  $\mathfrak{H}$  durchgeführt, und Oszillatoren mit der Energie  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$  selektiert. Man erhält durch diese Umpräparation eine neue reine Gesamtheit mit der Zustandsfunktion

$$\psi'(x) = u_0(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{(\alpha x)^2}{2}\right]. \quad (4.236)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Oszillator diese Energieauslese „passiert“, ist nach Gl. (4.229)

$$W_0 = \exp\left[-\frac{\alpha^2 a^2}{2}\right]. \quad (4.237)$$

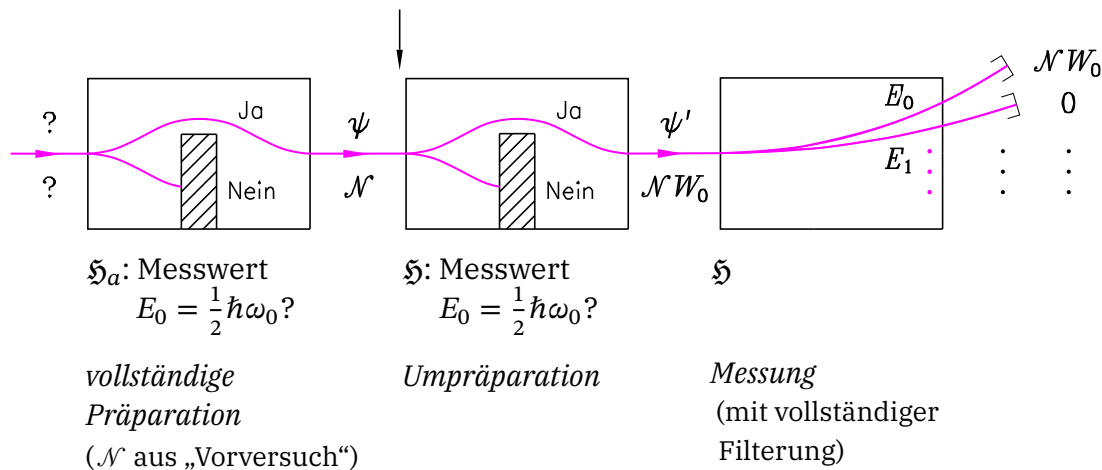
Führt man unmittelbar nach dieser präparativen Messung von  $\mathfrak{H}$  eine determinative Messung von  $\mathfrak{H}$  durch, so findet man wegen

$$W'_n = |\langle u_n, \psi' \rangle|^2 = |\langle u_n, u_0 \rangle|^2 = \delta_{n0} \quad (4.238)$$

(wie erwartet) mit der Wahrscheinlichkeit eins den Messwert  $E_0$ . Allgemein: Durch eine Präparation wird den Systemen ein bestimmter Wert einer Observablen (ein bestimmter Satz von Werten eines Observablensatzes) *zugeschrieben*. Testet man die Systeme unmittelbar nach der Präparation durch eine Messung, so muss sich für die Observable

(für den Observablensatz) dieser Wert (dieser Satz von Werten) mit Sicherheit *ergeben* (Konsistenz des 4. Grundgesetzes mit dem 3. Grundgesetz).

Symbolisch dargestellt sieht das besprochene Experiment folgendermaßen aus:



Wie wir in Abschnitt 4.11 sehen werden, müssen dabei Präparation, Umpräparation und Messung zeitlich gar nicht unmittelbar nacheinander durchgeführt werden, da es sich um so genannte stationäre Zustände handelt, für die sich an den Wahrscheinlichkeiten auch nichts ändert, wenn man zwischen den Eingriffen jeweils längere Zeit verstreichen lässt. Wir haben deshalb in der symbolischen Darstellung des Experimentes keine „Messzeitpunkte“ dazugeschrieben. Die Änderung des Kraftgesetzes (Verschiebung des Kraftzentrums) muss allerdings zeitlich knapp vor der Umpräparation erfolgen (siehe den Pfeil in der Abbildung).

## 4.9 Quantenmechanische „Dynamik“

### 5. Grundgesetz: „Dynamik“ (Schrödingergleichung)

$\psi_{t_0}$  sei der Zustandsvektor einer reinen Gesamtheit zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$ , gesucht ist der Zustandsvektor  $\psi_t$  für  $t > t_0$  unter der Annahme, dass im Zeitintervall  $(t_0, t)$  keine Umpräparationen durchgeführt werden.

Der Zustandsvektor  $\psi_t$  wird für  $t > t_0$  durch Lösen der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$\hat{H}\psi_t = i\hbar \frac{d\psi_t}{dt} \quad (4.239)$$

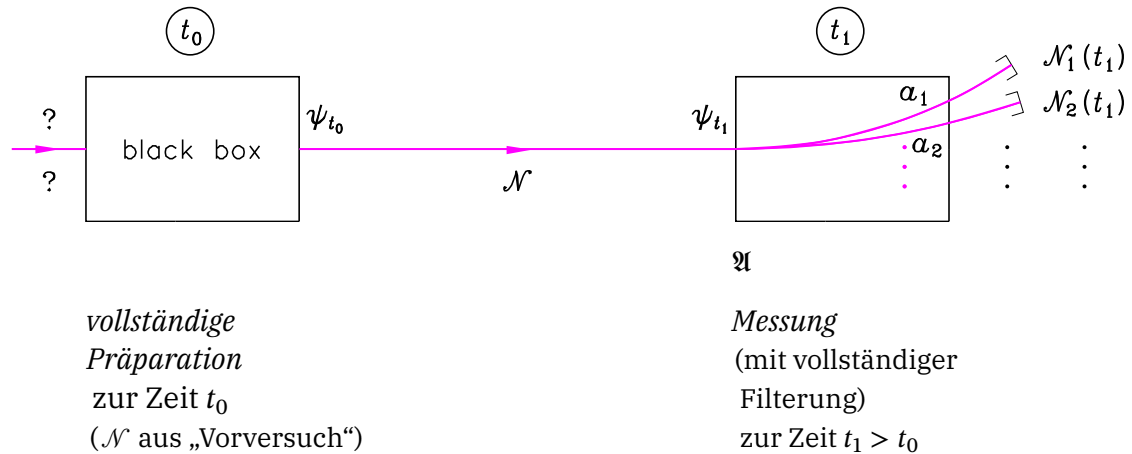
mit der Anfangsbedingung  $\psi_{t_0}$  erhalten. Dabei stellt  $\hat{H}$  den Hamiltonoperator (Operator zur Gesamtenergie  $\mathfrak{H}$ ) für die betrachtete Systemart dar.

*Bemerkungen:*

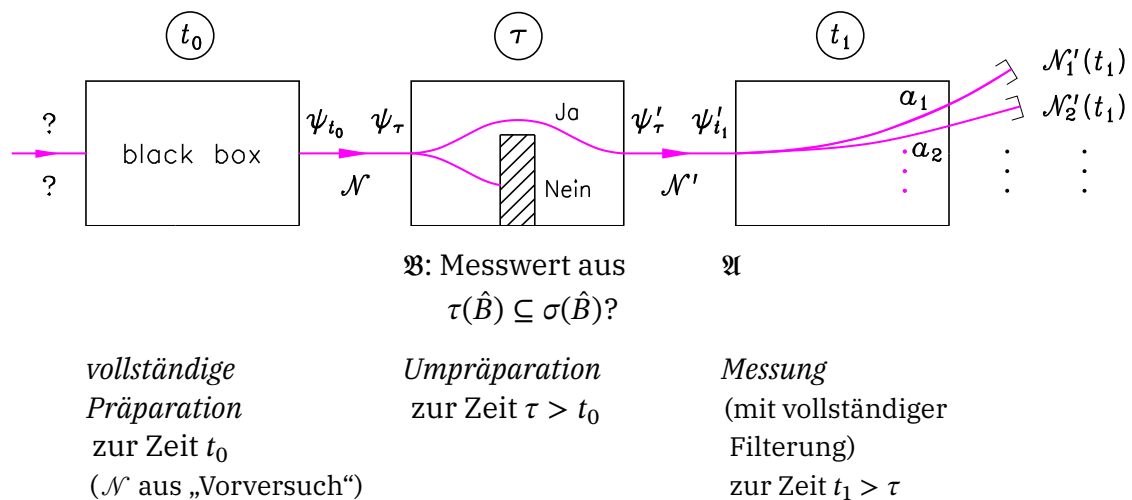
1. Diese Formulierung der quantenmechanischen „Dynamik“ wird als *Schrödingerbild* bezeichnet. In einer dazu mathematisch äquivalenten Formulierung, dem *Heisenbergbild*, wird die Zeitabhängigkeit vom Zustandsvektor auf die den Observablen zugeordneten selbstadjungierten Operatoren und Projektionsoperatoren „übergewälzt“.
2. Die zeitabhängige Schrödingergleichung erhält die Norm des Zustandsvektors. Der Anfangszustand muss nach dem 1. Grundgesetz die Bedingung  $\|\psi_{t_0}\| = 1$  erfüllen. Wie man leicht zeigen kann (s. die Aufgabe Q14), besitzt die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung zu einer solchen Anfangsbedingung die für einen Zustandsvektor erforderliche Eigenschaft  $\|\psi_t\| = 1$ .
3. Die zeitabhängige Schrödingergleichung gewährleistet den strukturellen korrespondenzmäßigen Anschluss der Quantenmechanik an die klassische de Broglie-Schrödinger-Materiefeldtheorie, da sie die abstrakte Verallgemeinerung der beim „Rateweg“ aus der klassischen Materiefeldtheorie für das quantenmechanische Einteilchenproblem übernommenen partiellen Differentialgleichung (4.12) auf beliebige Systeme (Systeme mit beliebig vielen räumlichen und Spin-Freiheitsgraden) darstellt. (Siehe dazu die weiter unten angeführten Beispiele.)
4. Die zeitabhängige Schrödingergleichung wird als quantenmechanische „Bewegungsgleichung“ bezeichnet. Die aus ihr errechnete Zeitabhängigkeit von  $\psi$  beschreibt aber *nicht* den zeitlichen Ablauf eines realen Vorganges bei einem Einzelsystem, sondern lediglich wie sich der „Informationsspeicher“  $\psi$  einer Gesamtheit in Abhängigkeit von der Zeitdifferenz zwischen Präparation (oder Umpräparation) und einer ins Auge gefassten Messung ändert. Wir haben deshalb das Wort *Dynamik* und das Wort *Bewegungsgleichung* unter Anführungszeichen gesetzt.

Die folgenden symbolisch dargestellten Experimente sollen den Gebrauch des 3., 4. und 5. Grundgesetzes illustrieren. (Siehe dazu die Aufgabe Q15.)

Experiment 1:



Experiment 2:



Für **Systeme mit einem spinlosen Teilchen in einer Raumdimension** ist  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  der Zustandsraum. Befindet sich das Teilchen in einem konservativen Kraftfeld, so ist der Hamiltonoperator durch Gl. (4.166) gegeben, und die zeitabhängige Schrödingergleichung lautet mit  $\psi_t(x) \equiv \psi(x, t)$

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right\} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}. \quad (4.240)$$

Diese partielle Differentialgleichung ist mit der Anfangsbedingung  $\psi_{t_0}(x) \equiv \psi(x, t_0)$  zu lösen.

Allgemein: Schreibt man die zeitabhängige Schrödingergleichung unter Benützung der Korrespondenzregeln für **Systeme mit  $r$  räumlichen Freiheitsgraden** an, so erhält



man entweder eine partielle Differentialgleichung in  $r + 1$  Veränderlichen oder ein Simultansystem von partiellen Differentialgleichungen in  $r + 1$  Veränderlichen, je nachdem, ob die Systeme nur die räumlichen Freiheitsgrade oder zusätzlich noch innere Freiheitsgrade (Spin, Isospin) besitzen. Betrachten wir als Beispiel das *Heliumatom* ohne Berücksichtigung des Spins, ohne sonstige relativistische Korrekturen und unter der Annahme eines ruhenden Kerns unendlicher Masse. Es gilt dann  $r = 6$ , der Hamiltonoperator ist durch Gl. (4.212) gegeben, und die zeitabhängige Schrödingergleichung lautet mit  $\psi_t(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_2 - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right\} \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)}{\partial t}. \quad (4.241)$$

Während Gl. (4.240) für einige spezielle Potentiale exakt gelöst werden kann, lässt sich Gl. (4.241) nicht mehr exakt lösen, weil sich das Eigenwertproblem des zugehörigen Hamiltonoperators nicht exakt lösen lässt.<sup>62</sup>

Ganz allgemein gilt: Hängt der Hamiltonoperator eines Systems nicht von der Zeit ab, was der Fall ist, wenn auf das System keine zeitlich veränderlichen äußeren Kräfte einwirken, so kann man in der zeitabhängigen Schrödingergleichung durch einen Separationsansatz die Zeitvariable „abseparieren“ und man erhält eine partielle Differentialgleichung bzw. ein Simultansystem von partiellen Differentialgleichungen in den  $r$  räumlichen Variablen allein, die so genannte *zeitunabhängige Schrödingergleichung*. Diese ist nichts anderes als das *Eigenwertproblem des Hamiltonoperators*. Die *zeitabhängige Schrödingergleichung* lässt sich also unter diesen Umständen genau dann exakt lösen, wenn sich das Eigenwertproblem von  $\hat{H}$  exakt lösen lässt.

Wir leiten die entsprechende Lösung hier nicht mithilfe der Methode der Separation der Variablen ab, sondern indem wir den Zustandsvektor  $\psi_t$  nach den Eigenvektoren von  $\hat{H}$  entwickeln. Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir dabei an, dass der Hamiltonoperator ein rein diskretes Spektrum besitzt, und alle Eigenwerte eine abzählbare Vielfachheit haben. Schreiben wir die Lösung des Eigenwertproblems von  $\hat{H}$  in der Form

$$\hat{H}u_{n\nu} = E_n u_{n\nu}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \nu = 1, 2, \dots, g_n, \quad (4.242)$$

so können wir für  $\psi_t$  aufgrund des Entwicklungssatzes den folgenden *Ansatz* machen:

$$\psi_t = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{g_n} c_{n\nu}(t) u_{n\nu} \quad (4.243a)$$

$$\text{mit } c_{n\nu}(t) = \langle u_{n\nu}, \psi_t \rangle. \quad (4.243b)$$

(Die Zeit spielt bei dieser Entwicklung nur die Rolle eines Parameters.) Die Bestimmung der unbekanntenen Entwicklungskoeffizienten  $c_{n\nu}(t)$  erfolgt mithilfe der zeitabhängigen Schrödingergleichung (4.239) und der Anfangsbedingung. Einsetzen des Ansatzes

<sup>62</sup>Man ist deshalb beim Heliumatom auf Näherungsmethoden (Störungstheorie, Variationsverfahren etc.) angewiesen.

(4.243a) in Gl. (4.239) gibt

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi_t &= \sum_{n\nu} c_{n\nu}(t) \hat{H}u_{n\nu} = \sum_{n\nu} E_n c_{n\nu}(t) u_{n\nu} \\ &= i\hbar \frac{d\psi_t}{dt} = \sum_{n\nu} i\hbar \frac{dc_{n\nu}(t)}{dt} u_{n\nu},\end{aligned}$$

also

$$\sum_{n\nu} \left[ i\hbar \frac{dc_{n\nu}(t)}{dt} - E_n c_{n\nu}(t) \right] u_{n\nu} = 0.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren  $u_{n\nu}$  folgen daraus für die Koeffizienten  $c_{n\nu}(t)$  die Differentialgleichungen

$$i\hbar \frac{dc_{n\nu}(t)}{dt} = E_n c_{n\nu}(t). \quad (4.244)$$

Integration dieser Differentialgleichungen mit den Anfangsbedingungen

$$c_{n\nu}(t_0) = \langle u_{n\nu}, \psi_{t_0} \rangle \quad (4.245)$$

gibt

$$c_{n\nu}(t) = c_{n\nu}(t_0) e^{-(i/\hbar)E_n(t-t_0)}. \quad (4.246)$$

Mit Gl. (4.243a) und den Beziehungen (4.245) und (4.246) folgt für die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung zur Anfangsbedingung  $\psi_{t_0}$

$$\psi_t = \sum_{n\nu} \langle u_{n\nu}, \psi_{t_0} \rangle u_{n\nu} e^{-(i/\hbar)E_n(t-t_0)}. \quad (4.247)$$

Von praktischem Nutzen ist diese Entwicklung allerdings nur in den folgenden Fällen:

- Fall 1: Die Entwicklung konvergiert sehr rasch, sodass man sie nach wenigen Termen abbrechen kann. Es macht dann auch nichts aus, falls man die benötigten (durch  $r$ -fache uneigentliche Integrale bestimmten) Größen  $c_{n\nu}(t_0) = \langle u_{n\nu}, \psi_{t_0} \rangle$  für die gegebene Anfangsbedingung  $\psi_{t_0}$  nur numerisch berechnen kann.
- Fall 2: Es lassen sich die Größen  $c_{n\nu}(t_0) = \langle u_{n\nu}, \psi_{t_0} \rangle$  für die gegebene Anfangsbedingung  $\psi_{t_0}$  für alle  $n, \nu$  analytisch berechnen, und die unendliche Summe in Gl. (4.247) lässt sich ausführen, d. h. durch einen geschlossenen Ausdruck ersetzen.

Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der Gesamtenergie des betrachteten Systems zum Zeitpunkt  $t$  den Messwert  $E_n$  zu finden, ist nach dem 3. Grundgesetz durch (siehe Gl. (4.215))

$$W_n(t) = \sum_{\nu=1}^{g_n} |\langle u_{n\nu}, \psi_t \rangle|^2 = \sum_{\nu=1}^{g_n} |c_{n\nu}(t)|^2 = \sum_{\nu=1}^{g_n} |c_{n\nu}(t_0)|^2 = W_n(t_0) \quad (4.248)$$

gegeben. Die Zeitunabhängigkeit dieser Wahrscheinlichkeit, die für eine beliebige Anfangsbedingung  $\psi_{t_0}$  gilt, hängt damit zusammen, dass die Energie eines solchen Systems eine Erhaltungsgröße ist (s. dazu Abschnitt 4.11).

Beispiel: Linearer harmonischer Oszillator mit Kraftzentrum im Ursprung

Wir wenden nun die allgemeinen Formeln auf den Fall einer Gesamtheit von linearen harmonischen Oszillatoren an. Setzen wir  $t_0 = 0$ , so lautet die Entwicklung der Zustandsfunktion  $\psi_t(x) \equiv \psi(x, t)$  in diesem Fall

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) u_n(x)$$

mit

$$c_n(t) = \langle u_n, \psi_t \rangle = c_n(0) e^{-(i/\hbar)E_n t},$$

$$c_n(0) = \langle u_n, \psi_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx u_n^*(x) \psi(x, 0).$$

Wählen wir als Anfangszustand  $\psi(x, 0) = \psi(x)$  Gl. (4.92) mit  $\alpha$  gemäß Gl. (4.61), so gilt nach Gl. (4.228)

$$c_n(0) = \frac{(\alpha a)^n}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left[-\frac{\alpha^2 a^2}{4}\right] \quad (4.249)$$

und somit

$$W_n(t) = W_n(0) = \frac{1}{n!} \left[\frac{\alpha^2 a^2}{2}\right]^n \exp\left[-\frac{\alpha^2 a^2}{2}\right], \quad t \geq 0. \quad (4.250)$$

Die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2\right\} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (4.251)$$

zur gegebenen Anfangsbedingung nimmt mit den Eigenfunktionen von Gl. (4.59) und den Eigenwerten von Gl. (4.60) die folgende Form an:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a)^n}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{(\alpha a)^2}{4}} \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}} H_n(\alpha x) e^{-(i/\hbar)(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_0 t}. \quad (4.252)$$

Die Summation über  $n$  lässt sich ausführen (siehe Aufgabe Q16), und man erhält

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{\alpha^2 (x - a \cos \omega_0 t)^2}{2}\right]$$

$$\times \exp\left[-i\left(\frac{\omega_0 t}{2} + \alpha^2 a x \sin \omega_0 t - \frac{\alpha^2 a^2}{4} \sin 2\omega_0 t\right)\right], \quad t \geq 0. \quad (4.253)$$

Daraus folgt insbesondere die Antreffwahrscheinlichkeitsdichte

$$W(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\alpha^2 (x - a \cos \omega_0 t)^2\right], \quad t \geq 0. \quad (4.254)$$

Die Berechnung der Fouriertransformierten  $\tilde{\psi}(p, t)$  von  $\psi(x, t)$  ist elementar, aber langwierig (siehe Aufgabe Q17). Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(p, t) = & \frac{1}{\sqrt{\hbar\alpha\sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{(p + \hbar\alpha^2 a \sin \omega_0 t)^2}{2\hbar^2\alpha^2}\right] \\ & \times \exp\left[-i\left(\frac{\omega_0 t}{2} + \frac{pa}{\hbar} \cos \omega_0 t + \frac{\alpha^2 a^2}{4} \sin 2\omega_0 t\right)\right]. \end{aligned} \quad (4.255)$$

Damit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsverteilung bezüglich des Impulses des Oszillators

$$W(p, t) = |\tilde{\psi}(p, t)|^2 = \frac{1}{\hbar\alpha\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(p + \hbar\alpha^2 a \sin \omega_0 t)^2}{\hbar^2\alpha^2}\right], \quad t \geq 0. \quad (4.256)$$

Während die Wahrscheinlichkeitsverteilung bezüglich der Energie des Oszillators für eine beliebige Anfangsbedingung zeitunabhängig ist, sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen bezüglich des Ortes und des Impulses des Oszillators für die vorgegebene Anfangsbedingung zeitabhängig. Mit der Interpretation der erhaltenen Ergebnisse befassen wir uns im nächsten Abschnitt.

Löse die Aufgaben Q18, Q19.

## 4.10 Mittelwert und Unbestimmtheit einer Observablen

In der mathematischen Statistik führt man zur Kennzeichnung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung deren Momente ein. Für die Quantenmechanik sind die folgenden Momente wichtig: das Moment 1. Ordnung, der *Mittelwert* bzw. *Erwartungswert*<sup>63</sup>; das Moment 2. Ordnung, der *Mittelwert des Quadrates*; das Moment 2. Ordnung bezüglich des Mittelwertes, die so genannte *mittlere quadratische Abweichung* vom Mittelwert oder *Varianz*. Die Wurzel aus der letzteren Größe wird *Standardabweichung* vom Mittelwert genannt, in der Quantenmechanik sind dafür die Bezeichnungen *Unbestimmtheit* oder *Unschärfe* üblich. Obwohl diese Bezeichnungen missverständlich sind, werden wir sie benutzen, weil sie sich derart eingebürgert haben, dass sie „unausrottbar“ geworden sind. Es muss aber betont werden, dass die quantenmechanischen Unbestimmtheiten auf dem Boden der Standardinterpretation nichts anderes darstellen als die *statistischen Streuungen der Messwerte* für Einzelsysteme bezüglich des Mittelwertes in der Gesamtheit. Sie haben nichts mit Messungenauigkeiten zu tun und werden in der Standardinterpretation auch nicht als „Unbestimmtheit“ bei einem Einzelsystem interpretiert.<sup>64</sup>

<sup>63</sup>Beachte: Der Erwartungswert ist nicht der Wert, den man als Ergebnis einer Messung „erwartet“. Was man als Ergebnis einer Messung „erwartet“, ist ein Wert aus dem *Messwertspektrum* der Observablen. Der Erwartungswert muss aber gar nicht zum Spektrum gehören. Ich ziehe deshalb die Bezeichnung Mittelwert vor.

<sup>64</sup>Wir kommen auf die Frage der Interpretation der Unbestimmtheiten im Zusammenhang mit den heisenbergschen Unbestimmtheitsbeziehungen in Abschnitt 4.14 zurück.

Betrachten wir einen festen (nicht näher spezifizierten) Zeitpunkt, so bezeichnen wir den Zustandsvektor mit  $\psi$  und schreiben für Mittelwert<sup>65</sup>, Mittelwert des Quadrates und Unbestimmtheit der Observablen  $\mathfrak{A}$  in diesem Zustand  $\langle \hat{A} \rangle$ ,  $\langle \hat{A}^2 \rangle$  und  $\Delta a$ . Da diese Größen auch vom betrachteten Zustand abhängen, müsste man eigentlich  $\langle \hat{A} \rangle_\psi$ ,  $\langle \hat{A}^2 \rangle_\psi$  und  $(\Delta a)_\psi$  schreiben. Solange man aber nicht die Momente für *verschiedene* Zustände vergleicht, lässt man die Angabe des Zustandes in den Symbolen für die Momente weg. Interessieren wir uns für die „Dynamik“, so bezeichnen wir den Zustandsvektor mit  $\psi_t$  und schreiben für Mittelwert, Mittelwert des Quadrates und Unbestimmtheit der Observablen  $\mathfrak{A}$  in diesem Zustand  $\langle \hat{A} \rangle_t$ ,  $\langle \hat{A}^2 \rangle_t$  und  $(\Delta a)_t$ .

Da man vom Mittelwert, vom Mittelwert des Quadrates und von der Unbestimmtheit der Observablen  $\mathfrak{A}$  spricht, wäre es besser  $\langle \mathfrak{A} \rangle$ ,  $\langle \mathfrak{A}^2 \rangle$  und  $\Delta \mathfrak{A}$  zu schreiben. Wir bleiben aber bei den üblichen Bezeichnungen.

Der Einfachheit halber betrachten wir zuerst eine Observable  $\mathfrak{A}$  mit rein diskretem Spektrum (Typ (c), endlich viele oder abzählbar unendlich viele Eigenwerte). Für den als Moment 1. Ordnung der diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung  $W_n$  definierten Mittelwert der Observablen  $\mathfrak{A}$  in der Gesamtheit mit dem Zustandsvektor  $\psi$  gilt dann

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{n: a_n \in \sigma_d(\hat{A})} a_n W_n \quad (4.257)$$

mit

$$W_n = \|\hat{P}_n \psi\|^2 = \langle \psi, \hat{P}_n \psi \rangle. \quad (4.258)$$

Mithilfe der Spektralform des Operators  $\hat{A}$  (s. Gl. (4.143)) kann man diesen Ausdruck folgendermaßen umformen:<sup>66</sup>

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n a_n W_n = \sum_n a_n \langle \psi, \hat{P}_n \psi \rangle = \langle \psi, \sum_n a_n \hat{P}_n \psi \rangle = \langle \psi, \hat{A} \psi \rangle. \quad (4.259)$$

Man sieht nun, wo die in der Quantenmechanik übliche Schreibweise für den Mittelwert herrührt.

Beachte: Um den Mittelwert gemäß Gl. (4.257) berechnen zu können, muss man zuerst das Eigenwertproblem von  $\hat{A}$  lösen, da man die Eigenwerte  $a_n$  und die zugehörigen Eigenvektoren  $u_{nv}$  bzw. die Projektionsoperatoren  $\hat{P}_n$  benötigt. Kennt man diese Größen, muss man die Wahrscheinlichkeiten  $W_n$  berechnen und hierauf den Wert der Summe (4.257) bestimmen.<sup>67</sup> Verwendet man dagegen den letzten Ausdruck in Gl. (4.259), so muss man „nur“ ein uneigentliches Integral berechnen.<sup>68,69</sup> Analoges gilt für die Berechnung des Mittelwertes des Quadrates und die Berechnung der Unbestimmtheit. Sind nur *Momente* der Wahrscheinlichkeitsverteilung gefragt, nicht aber die Wahrscheinlichkeitsverteilung *selbst*, so wird man die Wahrscheinlichkeitsverteilung

<sup>65</sup>Beim Rateweg haben wir den Mittelwert der Observablen  $\mathfrak{A}$  mit  $\bar{A}$  bezeichnet.

<sup>66</sup>Aus typografischen Gründen schreiben wir vorübergehend nur  $\sum_n$ . Das Vertauschen von Summation und Bildung des inneren Produkts ist aufgrund der mathematischer Eigenschaften des inneren Produkts eines Hilbertraumes auch dann „erlaubt“, wenn es sich um eine *unendliche* Summe handelt.

<sup>67</sup>Handelt es sich um eine unendliche Summe, kann es vorkommen, dass diese divergiert. Man sagt dann, der Mittelwert sei unendlich.

<sup>68</sup>Die Anführungszeichen beim Wort *nur* beziehen sich darauf, dass sich ein  $r$ -faches uneigentliches Integral auch numerisch nur für niedrige Werte von  $r$  berechnen lässt.

<sup>69</sup>Das Integral kann natürlich auch divergieren (unendlicher Mittelwert).

i. Allg. nicht berechnen, sondern gleich die einfachen Formeln für die Momente benützen, da man sonst zuerst Information mühsam erarbeitet, die man nachher wieder teilweise „vernichtet“.

Die Formel

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi, \hat{A} \psi \rangle \quad (4.260)$$

gilt für beliebige Observablen, d. h. bei beliebigem Spektrum  $\sigma(\hat{A})$ . Besitzt  $\mathfrak{A}$  beispielsweise das rein kontinuierliche Spektrum  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_k(\hat{A}) = \mathbb{R}$  (Typ (a) von Abb. 4.1, Seite 267), so hat man anstelle von Gl. (4.259)

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{\mathbb{R}} a W(a) da = \int_{\mathbb{R}} a \langle \psi, d\hat{P}(a) \psi \rangle = \langle \psi, \int_{\mathbb{R}} a d\hat{P}(a) \psi \rangle = \langle \psi, \hat{A} \psi \rangle. \quad (4.261)$$

Wir hätten die Rechnung natürlich gleich für eine allgemeine Observable  $\mathfrak{A}$  anschreiben können. Ausgehend von der Definition des Mittelwertes als Moment 1. Ordnung

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{n: a_n \in \sigma_d(\hat{A})} a_n W_n + \int_{a \in \sigma_k(\hat{A})} a W(a) da \quad (4.262)$$

wären wir dann mit den Beziehungen für die Wahrscheinlichkeiten  $W_n$  und die Wahrscheinlichkeitsdichte  $W(a)$  und mit der Spektralform (4.141) gleich allgemein zur Formel (4.260) gelangt.

Ist  $\psi$  der Zustandsvektor einer Gesamtheit für einen bestimmten Zeitpunkt, so gilt nach dem 3. Grundgesetz für die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der Observablen  $\mathfrak{A}$  an einem System der Gesamtheit zum betreffenden Zeitpunkt einen Messwert aus der Teilmenge  $\tau(\hat{A})$  des Messwertspektrums von  $\mathfrak{A}$  zu finden, die Beziehung (4.214), wobei der entsprechende Projektionsoperator durch Gl. (4.213) gegeben ist. Wie die Formel (4.260) zeigt, kann diese Wahrscheinlichkeit  $W$  als Mittelwert einer Observablen  $\mathfrak{P}$  aufgefasst werden, welche durch den Operator  $\hat{P}$  repräsentiert wird und das Messwertspektrum  $\{1, 0\}$  besitzt:

$$W = \|\hat{P}\psi\|^2 = \langle \psi, \hat{P}\psi \rangle = \langle \hat{P} \rangle. \quad (4.263)$$

Dem Messwert 1 (0) von  $\mathfrak{P}$  entspricht die Antwort „Ja (Nein), der Messwert von  $\mathfrak{A}$  liegt (liegt nicht) in  $\tau(\hat{A})$ “. – Da man also auch Wahrscheinlichkeiten als Mittelwerte interpretieren kann, kommt dem Begriff des Mittelwertes in der Quantenmechanik fundamentale Bedeutung zu. Wenn wir beispielsweise im nächsten Abschnitt die zeitliche Änderung von Mittelwerten untersuchen, schließt dies automatisch die Untersuchung der zeitlichen Änderung quantenmechanischer Wahrscheinlichkeiten ein.

Für den Mittelwert des Quadrates der Observablen  $\mathfrak{A}$  in der Gesamtheit mit dem Zustandsvektor  $\psi$  gelten vollkommen analoge Beziehungen wie für den Mittelwert der Observablen  $\mathfrak{A}$ , es sind lediglich die Eigenwerte  $a_n$  bzw.  $a$  und der Operator  $\hat{A}$  durch ihre Quadrate zu ersetzen.

Die *Unbestimmtheit*  $\Delta a$  der Observablen  $\mathfrak{A}$  in der Gesamtheit ist durch

$$\Delta a := \sqrt{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{\mathbb{1}})^2 \rangle} \quad (4.264)$$

definiert. Wegen<sup>70</sup>

$$\begin{aligned} \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{\mathbb{1}})^2 \rangle &= \langle \hat{A}^2 - 2\langle \hat{A} \rangle \hat{A} + \langle \hat{A} \rangle^2 \hat{\mathbb{1}} \rangle \\ &= \langle \hat{A}^2 \rangle - 2\langle \hat{A} \rangle^2 + \langle \hat{A} \rangle^2 \\ &= \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \end{aligned} \quad (4.265)$$

kann man für ihre Berechnung die Formel

$$\Delta a = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2} \quad (4.266)$$

benützen. Es gilt folgende wichtige Aussage:

**Satz**

Die Unbestimmtheit  $\Delta a \equiv (\Delta a)_\psi$  einer Observablen  $\mathfrak{A}$  in einer Gesamtheit mit dem Zustandsvektor  $\psi$  ist dann und nur dann null, wenn  $\psi$  Eigenvektor des der Observablen  $\mathfrak{A}$  zugeordneten Operators  $\hat{A}$  ist.

*Beweis:*

1. Teil:  $\Delta a = 0 \implies \psi$  Eigenvektor von  $\hat{A}$

Da  $\hat{A}$  selbstadjungiert und  $\langle \hat{A} \rangle$  reell ist, ist auch der Operator  $\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{\mathbb{1}}$  selbstadjungiert. Es gilt daher

$$(\Delta a)^2 = \langle \psi, (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{\mathbb{1}})^2 \psi \rangle = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{\mathbb{1}}) \psi, (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{\mathbb{1}}) \psi \rangle = \|(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{\mathbb{1}}) \psi\|^2.$$

Mit  $\Delta a$  ist daher  $\|(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{\mathbb{1}}) \psi\|$  null. Da aber nur der Nullvektor die Norm null besitzt, folgt daraus

$$(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{\mathbb{1}}) \psi = \theta \quad \text{bzw.} \quad \hat{A} \psi = \langle \hat{A} \rangle \psi.$$

$\psi$  ist also Eigenvektor (und  $\langle \hat{A} \rangle$  diskreter Eigenwert) von  $\hat{A}$ .

2. Teil:  $\psi$  Eigenvektor von  $\hat{A} \implies \Delta a = 0$

$\psi$  sei Eigenvektor von  $\hat{A}$  zu dem diskreten Eigenwert  $a_n$  ( $n$  fest). Dann ist  $\psi$  auch Eigenvektor von  $\hat{A}^2$ , und zwar zum Eigenwert  $a_n^2$ , und es gelten die Beziehungen

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi, \hat{A} \psi \rangle = a_n \langle \psi, \psi \rangle = a_n, \quad \langle \hat{A}^2 \rangle = \langle \psi, \hat{A}^2 \psi \rangle = a_n^2 \langle \psi, \psi \rangle = a_n^2,$$

aus denen  $(\Delta a)^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 = a_n^2 - a_n^2 = 0$  folgt.

<sup>70</sup>Vergleiche mit der Schreibweise der mathematischen Statistik in den Gleichungen (4.271), (4.276).

Mathematische Hilfsmittel

Für die Diskussion der beim Oszillatorbeispiel erhaltenen Ergebnisse benötigen wir ein paar Aussagen aus der mathematischen Statistik, die wir ohne Beweise anführen. (Die Beweise sind sehr einfach.) Die Mittelwerte kennzeichnen wir dabei – wie in der Mathematik üblich – durch Querstriche, für die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert verwenden wir aber die in der Quantenmechanik gebräuchliche Schreibweise.

Gaußverteilung: Die kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \exp\left[-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{2\delta^2}\right], \quad \delta \in \mathbb{R}^+, \quad \xi_0 \in \mathbb{R} \text{ (fest)} \quad (4.267)$$

der Variablen  $\xi \in \mathbb{R}$  wird als Gaußverteilung bezeichnet. Ihre niedrigsten Momente sind gegeben durch:

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi w(\xi) = 1 \quad \text{Gesamtwahrscheinlichkeit} \quad (4.268)$$

$$\bar{\xi} = \int_{\mathbb{R}} d\xi \xi w(\xi) = \xi_0 \quad \text{Mittelwert} \quad (4.269)$$

$$\bar{\xi^2} = \int_{\mathbb{R}} d\xi \xi^2 w(\xi) = \delta^2 + \xi_0^2 \quad \text{Mittelwert des Quadrates} \quad (4.270)$$

$$(\Delta\xi)^2 = \overline{(\xi - \bar{\xi})^2} = \bar{\xi^2} - (\bar{\xi})^2 = \delta^2 \quad \text{mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert} \quad (4.271)$$

Poissonverteilung: Die diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$w_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ (fest)} \quad (4.272)$$

mit  $n \in \mathbb{N}_0$  wird als Poissonverteilung bezeichnet. Ihre niedrigsten Momente sind gegeben durch:

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = 1 \quad \text{Gesamtwahrscheinlichkeit} \quad (4.273)$$

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n w_n = \lambda \quad \text{Mittelwert} \quad (4.274)$$

$$\bar{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 w_n = \lambda(\lambda + 1) \quad \text{Mittelwert des Quadrates} \quad (4.275)$$

$$(\Delta n)^2 = \overline{(n - \bar{n})^2} = \bar{n^2} - (\bar{n})^2 = \lambda \quad \text{mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert} \quad (4.276)$$

Beispiel: Linearer harmonischer Oszillator mit Kraftzentrum im Ursprung

Für die Zustandsfunktion  $\psi(x, t)$  Gl. (4.253) ist sowohl die Antreffwahrscheinlichkeitsdichte  $W(x, t) = |\psi(x, t)|^2$  als auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Impuls  $W(p, t) = |\tilde{\psi}(p, t)|^2$  eine Gaußverteilung (s. Gl. (4.254) und Gl. (4.256)). Durch Vergleich



mit den Formeln (4.267), (4.269) und (4.271) können wir die entsprechenden Mittelwerte und Unbestimmtheiten unmittelbar „ablesen“ und wir erhalten für den Mittelwert des Teilchenortes  $\hat{x}$  und den Mittelwert des Teilchenimpulses  $\hat{p}$

$$\langle \hat{x} \rangle_t = a \cos \omega_0 t = \langle \hat{x} \rangle_0 \cos \omega_0 t, \quad (4.277)$$

$$\langle \hat{p} \rangle_t = -\hbar \alpha^2 a \sin \omega_0 t = -m \omega_0 a \sin \omega_0 t = -m \omega_0 \langle \hat{x} \rangle_0 \sin \omega_0 t \quad (4.278)$$

und für die zugehörigen Unbestimmtheiten

$$(\Delta x)_t = \frac{1}{\sqrt{2} \alpha} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} = (\Delta x)_0 \equiv \Delta x, \quad (4.279)$$

$$(\Delta p)_t = \frac{\hbar \alpha}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}} = (\Delta p)_0 \equiv \Delta p. \quad (4.280)$$

Die *Wahrscheinlichkeitsdichten*  $W(x, t)$ ,  $W(p, t)$  ändern im Laufe der Zeit nicht ihre Gestalt, weshalb insbesondere die zugehörigen Unbestimmtheiten, die ein Maß für die „Breiten“ der Verteilungen sind, zeitlich konstant sind. Die Verteilungen verschieben sich im  $x$ - bzw. im  $p$ -Raum nach einem harmonischen „Bewegungsgesetz“ als „starres“ Ganzes. Die zeitliche Änderung der *Mittelwerte* von Ort und Impuls erfolgt nach demselben Gesetz wie die zeitliche Änderung der klassischen Variablen  $x(t)$ ,  $p(t)$ . (Vergleiche die Beziehungen (4.277), (4.278) mit den klassischen Beziehungen (4.10), (4.11). Dabei ist in den klassischen Ausdrücken  $x(0) = a$ ,  $p(0) = 0$  zu setzen, da im quantenmechanischen Beispiel  $\langle \hat{x} \rangle_0 = a$ ,  $\langle \hat{p} \rangle_0 = 0$  gilt.)

Man kann zeigen, dass die Mittelwerte von Teilchenort und Teilchenimpuls beim harmonischen Oszillator für *beliebige* Anfangszustände die entsprechenden klassischen Beziehungen erfüllen (s. Seite 313).

Dagegen ist die Eigenschaft, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Ort und Impuls nicht ihre Gestalt ändern, an die *spezielle* Anfangsbedingung  $\psi(x, 0) = \psi(x)$  Gl. (4.92) mit  $\alpha$  Gl. (4.61) gebunden. Der entsprechende Zustand  $\psi(x, t)$  Gl. (4.253) wird wegen dieser Eigenschaft der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Ort und Impuls als *kohärenter Zustand* des Oszillators bezeichnet. Für andere Anfangsbedingungen ändern die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Ort und Impuls zeitlich periodisch mit der Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  ihre Gestalt.

Multipliziert man die Unbestimmtheiten (4.279), (4.280) miteinander, so findet man

$$(\Delta x)_t \cdot (\Delta p)_t = (\Delta x)_0 \cdot (\Delta p)_0 = \frac{\hbar}{2}. \quad (4.281)$$

In Abschnitt 4.14 werden wir zeigen, dass für *beliebige Zustände*  $\psi$  von Systemen mit einem Teilchen in einer Raumdimension

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.282)$$

gilt (Heisenbergsche Unbestimmtheitsbeziehung). Wegen der Eigenschaft (4.281) wird  $\psi(x, t)$  Gl. (4.253) als (eine) *Minimum-Unschärfenprodukt-Zustandsfunktion* bezeichnet.

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung bezüglich der Energie  $\mathfrak{H}$  haben wir für die durch  $\psi(x, t)$  Gl. (4.253) charakterisierte Gesamtheit von Oszillatoren die zeitunabhängige Poissonverteilung  $W_n$  Gl. (4.250) erhalten. Durch Vergleich mit Gl. (4.272) sehen wir, dass

$$\lambda = \frac{\alpha^2 a^2}{2} = \frac{m\omega_0 a^2}{2\hbar} \quad (4.283)$$

gilt, und es folgt nach elementarer Rechnung (s. Aufgabe Q20)

$$\langle \hat{H} \rangle_t = \langle \hat{H} \rangle_0 = \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0 = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2} + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 = V(a) + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \equiv \langle \hat{H} \rangle, \quad (4.284)$$

$$(\Delta E)_t = (\Delta E)_0 = \sqrt{\lambda} \hbar \omega_0 = \frac{\alpha a}{\sqrt{2}} \hbar \omega_0 = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} a \hbar \omega_0 \equiv \Delta E. \quad (4.285)$$

Die Zeitunabhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Energie – und damit die Zeitunabhängigkeit aller zugehörigen Momente – rührt daher, dass die Energie Erhaltungsgröße des Systems ist; siehe dazu Abschnitt 4.11.

Die Minimumwellenpaket-Eigenschaft des Zustandes  $\psi(x, t)$  Gl. (4.253) ermöglicht es, anhand dieses Zustandes den Übergang zur klassischen Mechanik zu untersuchen. Zu diesem Zweck betrachten wir den Fall, dass die Teilchenmasse  $m$ , die Kreisfrequenz  $\omega_0$  (bzw. die „Federkonstante“  $f$ ) und die „Schwingungsweite“  $a$  des „Paketentrums“ Werte besitzen, für welche die „Paketbreite“  $2\Delta x$  sehr klein ist gegen  $a$  (siehe die Abb. 4.2), und zugleich  $2\Delta p$  sehr klein ist gegen den maximalen Betrag des Mittelwertes des Impulses:

$$2\Delta x \ll a \quad \text{und} \quad 2\Delta p \ll m\omega_0 a. \quad (4.286)$$

Ändert man die Werte der Parameter so, dass  $\Delta x$  kleiner und kleiner wird, so wird wegen  $\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}$  zwar  $\Delta p$  unvermeidlich größer und größer, doch kann man anhand von Zahlenbeispielen zeigen, dass sich die Bedingungen von Gl. (4.286) sehr leicht zugleich erfüllen lassen (s. Aufgabe Q21).

Führt man an den Teilchen einer solchen Gesamtheit zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t \geq 0$  eine *Ortsmessung* durch, so erhält man Messwerte, die nur ganz wenig um den klassischen Teilchenort  $x(t)$  streuen. (Es kann zwar jeder Wert aus  $\mathbb{R}$  gefunden werden, doch ist die Wahrscheinlichkeit, einen Messwert weit außerhalb des Intervalls  $(x(t) - \Delta x, x(t) + \Delta x)$  zu finden, äußerst gering.) Führt man *stattdessen* an den Teilchen einer solchen Gesamtheit zu einem Zeitpunkt  $t \geq 0$  eine *Impulsmessung* durch, so erhält man Messwerte, die nur ganz wenig um den klassischen Teilchenimpuls  $p(t)$  streuen. Man spricht aus diesen Gründen im Grenzfall (4.286) von einer „quasiklassischen Bewegung“.

Betrachten wir für diesen Grenzfall noch die Teilchenenergie. Mit  $2\Delta x \ll a$  folgt

$$V(a) = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2} \gg \hbar \omega_0, \quad \langle \hat{H} \rangle \approx V(a) = E_{\text{kl}}. \quad (4.287)$$

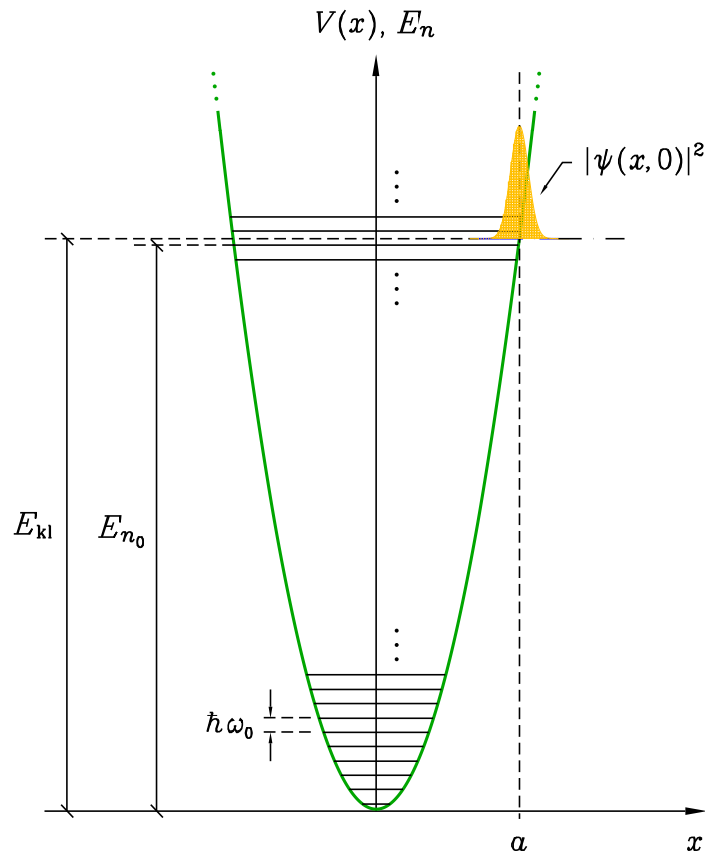


Abbildung 4.2: „Quasiklassischer Grenzfall“  
beim linearen harmonischen Oszillator

(Beachte: In der klassischen Mechanik ist die Gesamtenergie  $E_{\text{kl}}$  gleich der potentiellen Energie im Umkehrpunkt.) Mit der Beziehung (4.285) erhalten wir dann aber

$$\frac{\Delta E}{\langle \hat{H} \rangle} \approx \frac{\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} a \hbar \omega_0}{\frac{m\omega_0^2 a^2}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}}}{a} = \frac{2\Delta x}{a} \ll 1. \quad (4.288)$$

Bei einer *Energiemessung* erhält man demnach Messwerte  $E_n$ , die nur wenig um den wahrscheinlichsten Wert  $E_{n_0} \approx E_{\text{kl}}$  streuen. Dabei ist  $E_{n_0} \gg \hbar\omega_0$ , also  $n_0 \gg 1$  (s. die Abb. 4.2). Dies steht im Einklang mit der folgenden in Lehrbüchern häufig anzutreffenden Formulierung des *Korrespondenzprinzips*: «Die Quantenmechanik geht bei gebundenen Systemen<sup>71</sup> für hohe Quantenzahlen in die klassische Physik über.»

<sup>71</sup>klassisch: räumlich lokalisierte Bewegungen

## 4.11 Zeitliche Änderung von Mittelwerten. Stationäre Zustände. Erhaltungsgrößen

In diesem Abschnitt befassen wir uns ganz allgemein mit der zeitlichen Änderung von quantenmechanischen Mittelwerten.<sup>72</sup>

Da wir uns für die *Zeitabhängigkeit* der Mittelwerte interessieren, schreiben wir für den Mittelwert der Observablen  $\mathfrak{A}$  nun anstelle von (4.260)

$$\langle \hat{A} \rangle_t = \langle \psi_t, \hat{A} \psi_t \rangle. \quad (4.289)$$

Mit der Rolle des Zeitparameters in der Quantenmechanik haben wir uns schon im Zusammenhang mit dem 5. Grundgesetz befasst:  $t - t_0$  gibt das Zeitintervall zwischen der letzten, zur Zeit  $t_0$  erfolgten, Präparation bzw. Umpräparation der Systeme und dem ins Auge gefassten Messzeitpunkt  $t > t_0$  an.

Wir betrachten zuerst eine spezielle Klasse von Zuständen, und zwar die so genannten stationären Zustände.

### Definition 1

Ist der Zustandsvektor einer reinen Gesamtheit zum Anfangszeitpunkt  $t_0$  Eigenvektor des Hamiltonoperators  $\hat{H}$  zu einem diskreten Eigenwert  $E_n$  ( $n$  fest), d. h. gilt

$$\psi_{t_0} = \sum_{\nu=1}^{g_n} d_\nu u_{n\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{g_n} |d_\nu|^2 = 1, \quad (4.290)$$

so nennt man die zugehörige Lösung  $\psi_t$ ,  $t > t_0$ , der zeitabhängigen Schrödingergleichung Zustandsvektor eines *stationären Zustandes*.

Voraussetzung, dass man einen entsprechenden Anfangszustand präparieren kann, ist natürlich, dass der Hamiltonoperator kein rein kontinuierliches Spektrum besitzt. Siehe die Aufgabe Q22.

Mithilfe der allgemeinen Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung kann man den Zustandsvektor eines stationären Zustandes leicht angeben (siehe Aufgabe Q23):

### Satz 1

Der Zustandsvektor eines stationären Zustandes lautet

$$\psi_t = \psi_{t_0} e^{-i/\hbar E_n(t-t_0)}. \quad (4.291)$$

<sup>72</sup>Auf Seite 302 wurde bereits darauf hingewiesen, dass auch Wahrscheinlichkeiten als Mittelwerte interpretiert werden können.

Dabei ist  $\psi_{t_0}$  durch Gl. (4.290) gegeben. Die Bezeichnung „stationärer Zustand“ rührt von der folgenden Eigenschaft her:

**Satz 2**

In einem stationären Zustand sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen und damit auch deren Momente für beliebige Observablen zeitunabhängig.

*Beweis:*

$$\begin{aligned} W(t) &= \|\hat{P}\psi_t\|^2 = \|\hat{P}e^{-(i/\hbar)E_n(t-t_0)}\psi_{t_0}\|^2 = \|e^{-(i/\hbar)E_n(t-t_0)}\hat{P}\psi_{t_0}\|^2 \\ &= |e^{-(i/\hbar)E_n(t-t_0)}|^2 \|\hat{P}\psi_{t_0}\|^2 = \|\hat{P}\psi_{t_0}\|^2 = W(t_0). \end{aligned}$$

Der Zustandsvektor selbst ist zwar für einen stationären Zustand im Allgemeinen<sup>73</sup> zeitabhängig, die statistischen Eigenschaften der betreffenden Gesamtheit sind aber in Bezug auf beliebige Observablen für alle Zeiten gleich.<sup>74</sup> Insbesondere wird bei einer Messung der Energie eines Systems der Gesamtheit mit dem Zustandsvektor (4.291) mit *Sicherheit* (mit der Wahrscheinlichkeit 1) der Messwert  $E_n$  gefunden. Man sagt, dass jedes System einer solchen Gesamtheit die Energie  $E_n$  „besitzt“.

Gesamtheiten in stationären Zuständen spielen bei den Anwendungen der Quantenmechanik in Atom-, Kern- und Festkörperphysik eine wichtige Rolle. (Ein Beispiel für eine solche Gesamtheit wäre etwa ein Ensemble von Wasserstoffatomen im Grundzustand.) Die obigen Aussagen sind deshalb von großer praktischer Bedeutung.

Kehren wir zur Beziehung (4.289) für den Mittelwert einer Observablen zurück. Wir haben gesehen, dass es eine ganze Klasse von Zuständen – die stationären Zustände – gibt, für die der Mittelwert einer beliebigen Observablen zeitunabhängig ist. Um herauszufinden, ob es noch andere Fälle gibt, in denen der Mittelwert einer Observablen  $\mathfrak{A}$  nicht von der Zeit abhängt, leiten wir den Ausdruck  $i\hbar \langle \hat{A} \rangle_t = i\hbar \langle \psi_t, \hat{A} \psi_t \rangle$  nach der Zeit ab und benützen die zeitabhängige Schrödingergleichung (4.239) sowie die Selbstadjungiertheit von  $\hat{H}$ :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\langle \hat{A} \rangle_t}{dt} &= i\hbar \langle \psi_t, \hat{A} \frac{d\psi_t}{dt} \rangle + i\hbar \langle \frac{d\psi_t}{dt}, \hat{A} \psi_t \rangle = \langle \psi_t, \hat{A} i\hbar \frac{d\psi_t}{dt} \rangle - \langle i\hbar \frac{d\psi_t}{dt}, \hat{A} \psi_t \rangle \\ &= \langle \psi_t, \hat{A} \hat{H} \psi_t \rangle - \langle \hat{H} \psi_t, \hat{A} \psi_t \rangle = \langle \psi_t, \hat{A} \hat{H} \psi_t \rangle - \langle \psi_t, \hat{H} \hat{A} \psi_t \rangle. \end{aligned}$$

Für die zeitliche Änderung des Mittelwertes von  $\mathfrak{A}$  gilt also die Beziehung

$$i\hbar \frac{d\langle \hat{A} \rangle_t}{dt} = \langle \psi_t, [\hat{A}, \hat{H}] \psi_t \rangle. \quad (4.292)$$

<sup>73</sup>Einzige Ausnahme: Besitzt ein Hamiltonoperator den diskreten Eigenwert 0, so ist der Zustandsvektor des zugehörigen stationären Zustandes zeitlich konstant.

<sup>74</sup>Dieser Umstand hat bei der Diskussion des Experimentes von Seite 294 eine Rolle gespielt. Siehe dazu nochmals den letzten Absatz von Abschnitt 4.8 auf Seite 294.

In der klassischen Mechanik wird eine Observable als Erhaltungsgröße eines Systems bezeichnet, wenn sie für das System einen Wert besitzt, der sich im Laufe der Zeit nicht ändert.

In der Quantenmechanik kann man im Allgemeinen einem System gar keinen *Wert* einer Observablen zuschreiben; man kann nur *Wahrscheinlichkeiten* dafür angeben, dass man bei einer Messung der Observablen an einem System der betrachteten Gesamtheit diesen oder jenen Wert für die Observable findet. Nur in Ausnahmefällen ist die Wahrscheinlichkeit für einen der im Prinzip möglichen Messwerte 1 und für alle anderen null, sodass den Systemen der betrachteten Gesamtheit ein bestimmter Wert der Observablen zugeschrieben werden kann.

Der Begriff „Erhaltungsgröße“ muss daher in der Quantenmechanik neu definiert werden. Die Beziehung (4.292) legt nun die folgende Definition nahe:

**Definition 2**

Vertauscht der einer Observablen  $\mathfrak{A}$  zugeordnete Operator  $\hat{A}$  mit dem Hamiltonoperator  $\hat{H}$ , so nennt man die Observable eine *Erhaltungsgröße*:

$$[\hat{A}, \hat{H}] = \hat{0} \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathfrak{A} \text{ Erhaltungsgröße} \quad (4.293)$$

Vertauscht nämlich  $\hat{A}$  mit  $\hat{H}$ , so steht in Gl. (4.292) auf der „rechten Seite“ der Ausdruck  $\langle \psi_t, \hat{0} \psi_t \rangle$ , der für einen beliebigen Zustandsvektor  $\psi_t$  null ist, sodass der Mittelwert von  $\mathfrak{A}$  bei beliebiger Präparation der Systeme zeitunabhängig ist.

Wie wir in Abschnitt 4.13 sehen werden, ist die Vertauschbarkeit der Operatoren  $\hat{A}$ ,  $\hat{H}$ , d. h. die Beziehung  $[\hat{A}, \hat{H}] = \hat{0}$ , gerade der mathematische Ausdruck für die *Verträglichkeit der Observablen*  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{H}$ . Es gilt daher auch die Aussage: Ist die Observable  $\mathfrak{A}$  mit der Energie  $\mathfrak{H}$  verträglich, so ist der Mittelwert von  $\mathfrak{A}$  bei beliebiger Präparation der Systeme zeitunabhängig.

Diese Aussage kann aber noch verschärft werden. Wir werden nämlich in Abschnitt 4.13 zeigen, dass  $\hat{A}$  dann und nur dann mit  $\hat{H}$  vertauscht, wenn alle zu  $\hat{A}$  gehörigen Projektionsoperatoren (s. die Spektralform Gl. (4.141)) mit  $\hat{H}$  vertauschen. Da Wahrscheinlichkeiten als Mittelwerte zu Projektionsoperatoren geschrieben werden können (siehe Gl. (4.263)), ergibt sich der folgende Satz:

**Satz 3**

Ist die Observable  $\mathfrak{A}$  eine Erhaltungsgröße, so ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $\mathfrak{A}$  und damit auch jedes zugehörige Moment für einen *beliebigen Zustand*, d. h. bei *beliebiger Präparation* der Systeme zum Anfangszeitpunkt, zeitunabhängig.

Beachte: Satz 2 stellt eine Aussage für *beliebige Observablen* und eine *spezielle Klasse von Zuständen*, die stationären Zustände, dar, und Satz 3 ist eine Aussage für eine *spezielle*

Klasse von *Observablen*, die Erhaltungsgrößen, und *beliebige Zustände*.

Die Beziehung (4.292) wird als *Bewegungsgleichung für den Mittelwert* der Observablen  $\mathfrak{A}$  bezeichnet. Wir werden diese Bezeichnung nur unter Anführungszeichen verwenden, da sie missverständlich ist. Sie legt nämlich die Vorstellung nahe, dass man aus Gl. (4.292)  $\langle \hat{A} \rangle_t$  bei vorgegebenem  $\langle \hat{A} \rangle_{t_0}$  berechnen kann. Dies trifft aber nur in dem mathematisch trivialen Fall zu, dass der Operator  $[\hat{A}, \hat{H}]$  der Nulloperator ist. Handelt es sich bei  $\mathfrak{A}$  um *keine* Erhaltungsgröße, so liefert der Kommutator  $[\hat{A}, \hat{H}]$  einen Operator  $\hat{C} \neq \hat{0}$ , für den die Zeitabhängigkeit von  $\langle \psi_t, \hat{C} \psi_t \rangle$  unbekannt ist. In Sonderfällen kann man zu einem geschlossenen Differentialgleichungssystem kommen, indem man die „Bewegungsgleichungen“ für die Mittelwerte mehrerer Observablen zugleich anschreibt. Ein Beispiel dazu werden wir im nächsten Abschnitt kennen lernen.

## 4.12 Ehrenfestsche Gleichungen

Wir befassen uns nun mit der Zeitabhängigkeit der Mittelwerte von Teilchenorten und Teilchenimpulsen. Dabei betrachten wir der Einfachheit halber zuerst wieder **Systeme mit einem spinlosen Teilchen in einer Raumdimension**.

Die „Bewegungsgleichungen“ für die Mittelwerte des Teilchenortes  $\hat{x}$  und des Teilchenimpulses  $\hat{p}$  lauten gemäß Gl. (4.292)

$$i\hbar \frac{d\langle \hat{x} \rangle_t}{dt} = \langle \psi_t, [\hat{x}, \hat{H}] \psi_t \rangle, \quad (4.294)$$

$$i\hbar \frac{d\langle \hat{p} \rangle_t}{dt} = \langle \psi_t, [\hat{p}, \hat{H}] \psi_t \rangle. \quad (4.295)$$

Wie wir sehen werden, gestattet dieses Gleichungssystem nur in *Ausnahmefällen* die Berechnung von  $\langle \hat{x} \rangle_t, \langle \hat{p} \rangle_t$  bei gegebenem  $\langle \hat{x} \rangle_{t_0}, \langle \hat{p} \rangle_{t_0}$ . Um die formalen Übereinstimmungen und Unterschiede zwischen den Bewegungsgleichungen für die klassischen Variablen  $x(t), p(t)$  und den „Bewegungsgleichungen“ für die quantenmechanischen Mittelwerte  $\langle \hat{x} \rangle_t, \langle \hat{p} \rangle_t$  möglichst klar hervortreten zu lassen, müssen wir in den Gleichungen (4.294), (4.295) noch die Kommutatoren berechnen.

### Mathematische Hilfsmittel

Wir können einen tieferen Einblick gewinnen, wenn wir den Begriff der *Ableitung einer Operatorfunktion* nach ihren Argumenten einführen. Wie man gewöhnliche Funktionen nach ihren Argumenten ableiten kann, kann man auch Operatorfunktionen nach ihren Argumenten ableiten. Um diesen Ableitungsbegriff mathematisch streng zu begründen, benötigt man natürlich einen Konvergenzbegriff für Folgen von Operatoren. Da wir den Ableitungsbegriff nur für spezielle Typen von Operatorfunktionen benötigen, müssen wir uns aber mit diesem Konvergenzbegriff nicht befassen.

Betrachten wir zuerst eine *beliebige Operatorfunktion*  $A(\hat{x})$ . Für eine solche Operatorfunktion von  $\hat{x}$  allein kann man die Ableitung durch

$$\left( \frac{dA(\hat{x})}{d\hat{x}} f \right)(x) := \frac{dA(x)}{dx} f(x) \quad (4.296)$$

definieren. Als nächstes betrachten wir *Operatorpolynome*<sup>75</sup>  $B(\hat{p})$ . Da die Algebra für das Rechnen mit linearen Operatoren formal gleich ist wie für gewöhnliche Variablen, solange Nichtvertauschbarkeit keine Rolle spielt, leuchtet es ein, dass für die Ableitung eines Operatorpolynoms formal dieselbe Rechenregel gilt wie für die Ableitung eines gewöhnlichen Polynoms. Mit

$$B(\hat{p}) = \sum_{k=0}^n a_k \hat{p}^k \quad \text{folgt} \quad \frac{dB(\hat{p})}{d\hat{p}} = \sum_{k=1}^n k a_k \hat{p}^{k-1}. \quad (4.297)$$

Schließlich definieren wir noch die partiellen Ableitungen einer Operatorfunktion der Form  $F(\hat{x}, \hat{p}) = A(\hat{x}) + B(\hat{p})$  durch

$$\frac{\partial F(\hat{x}, \hat{p})}{\partial \hat{x}} := \frac{dA(\hat{x})}{d\hat{x}}, \quad \frac{\partial F(\hat{x}, \hat{p})}{\partial \hat{p}} := \frac{dB(\hat{p})}{d\hat{p}}. \quad (4.298)$$

Befindet sich das betrachtete Teilchen in einem konservativen Kraftfeld, so besitzt sein Hamiltonoperator die Form  $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$ . Für den Kommutator  $[\hat{x}, \hat{H}]$  ergibt sich dann zunächst unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Operator  $\hat{x}$  mit einer beliebigen Operatorfunktion von  $\hat{x}$  vertauscht,

$$[\hat{x}, \hat{H}] = [\hat{x}, \frac{\hat{p}^2}{2m}] = \frac{1}{2m} (\hat{x} \hat{p}^2 - \hat{p}^2 \hat{x}). \quad (4.299)$$

„Ziehen“ wir im Operatorprodukt  $\hat{x} \hat{p}^2$  mithilfe der kanonischen Vertauschungsbeziehung (4.148) den Operator  $\hat{p}^2$  „nach vorne“, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{x} \hat{p}^2 &= \hat{x} \hat{p} \hat{p} = \hat{p} \hat{x} \hat{p} + i\hbar \hat{p} = \hat{p}^2 \hat{x} + 2i\hbar \hat{p} \\ &\quad \hat{p} \hat{x} + i\hbar \hat{1} \end{aligned} \quad (4.300)$$

und nach Einsetzen in Gl. (4.299)

$$[\hat{x}, \hat{H}] = i\hbar \frac{\hat{p}}{m} = i\hbar \frac{dT(\hat{p})}{d\hat{p}} = i\hbar \frac{\partial H(\hat{x}, \hat{p})}{\partial \hat{p}}. \quad (4.301)$$

Für den Kommutator  $[\hat{p}, \hat{H}]$  ergibt sich zunächst unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Operator  $\hat{p}$  mit dem Operator  $\hat{p}^2$  vertauscht,

$$[\hat{p}, \hat{H}] = [\hat{p}, V(\hat{x})]. \quad (4.302)$$

Um den Kommutator  $[\hat{p}, V(\hat{x})]$  zu berechnen, lassen wir ihn auf eine beliebige (stetig differenzierbare) Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  wirken:

$$\begin{aligned} ([\hat{p}, V(\hat{x})]f)(x) &= (\hat{p} V(\hat{x})f)(x) - (V(\hat{x}) \hat{p}f)(x) \\ &= -i\hbar \frac{d}{dx} (V(x)f(x)) - V(x) \left( -i\hbar \frac{df(x)}{dx} \right) \\ &= \left( -i\hbar \frac{dV(x)}{dx} \right) f(x) = -i\hbar \left( \frac{dV(\hat{x})}{d\hat{x}} f \right)(x). \end{aligned}$$

<sup>75</sup>Für *allgemeine* Operatorfunktionen von  $\hat{p}$  kann man die Ableitung mithilfe der Spektralform definieren. Da wir hier aber nur die Ableitung von  $\hat{p}^2$  benötigen, gehen wir darauf nicht ein.



Damit folgt für den in Gl. (4.295) benötigten Kommutator

$$[\hat{p}, \hat{H}] = -i\hbar \frac{dV(\hat{x})}{d\hat{x}} = i\hbar K(\hat{x}) = -i\hbar \frac{\partial H(\hat{x}, \hat{p})}{\partial \hat{x}}. \quad (4.303)$$

Setzen wir nun die Ausdrücke (4.301) und (4.303) in die Gleichungen (4.294), (4.295) ein, so erhalten wir die **ehrenfestschen Gleichungen**:

$$\frac{d\langle \hat{x} \rangle_t}{dt} = \left\langle \frac{\partial H(\hat{x}, \hat{p})}{\partial \hat{p}} \right\rangle_t = \frac{\langle \hat{p} \rangle_t}{m}, \quad (4.304)$$

$$\frac{d\langle \hat{p} \rangle_t}{dt} = -\left\langle \frac{\partial H(\hat{x}, \hat{p})}{\partial \hat{x}} \right\rangle_t = \left\langle -\frac{dV(\hat{x})}{d\hat{x}} \right\rangle_t = \langle K(\hat{x}) \rangle_t. \quad (4.305)$$

Vergleichen wir diese Gleichungen mit den *hamiltonschen kanonischen Bewegungsgleichungen* (4.3), (4.4) für das entsprechende klassische Einteilchenproblem und schauen wir dabei – um den Überblick zu behalten – zunächst nur auf „Anfang“ und „Ende“ der Gleichungen, d. h. auf

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m}, \quad \frac{dp(t)}{dt} = K(x(t)); \quad (4.306)$$

$$\frac{d\langle \hat{x} \rangle_t}{dt} = \frac{\langle \hat{p} \rangle_t}{m}, \quad \frac{d\langle \hat{p} \rangle_t}{dt} = \langle K(\hat{x}) \rangle_t. \quad (4.307)$$

Man sieht sofort, dass die *ersten* Gleichungen formal übereinstimmen: Man muss in der klassischen Gleichung nur  $x(t)$ ,  $p(t)$  durch  $\langle \hat{x} \rangle_t$ ,  $\langle \hat{p} \rangle_t$  ersetzen, um die quantenmechanische Gleichung zu erhalten. Die *zweiten* Gleichungen stimmen aber *dann und nur dann* überein, falls

$$\langle K(\hat{x}) \rangle_t = K(\langle \hat{x} \rangle_t) \quad (4.308)$$

gilt. Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die Funktion  $V$  ein Polynom vom Grade  $n \leq 2$ , also die Funktion  $K$  ein Polynom vom Grade  $n \leq 1$  ist. Mit

$$K(\hat{x}) = c_0 \hat{1} + c_1 \hat{x}, \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}$$

folgt nämlich

$$\langle K(\hat{x}) \rangle_t = c_0 + c_1 \langle \hat{x} \rangle_t = K(\langle \hat{x} \rangle_t).$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so bilden die ehrenfestschen Gleichungen ein geschlossenes Simultansystem für  $\langle \hat{x} \rangle_t$ ,  $\langle \hat{p} \rangle_t$ , d. h.  $\langle \hat{x} \rangle_t$ ,  $\langle \hat{p} \rangle_t$  können aus ihnen bei gegebenen Anfangsbedingungen  $\langle \hat{x} \rangle_{t_0}$ ,  $\langle \hat{p} \rangle_{t_0}$  berechnet werden. Das zu lösende Problem ist dabei mathematisch identisch mit der Bestimmung von  $x(t)$ ,  $p(t)$  aus den kanonischen Bewegungsgleichungen bei gleichen Anfangsbedingungen  $x(t_0)$ ,  $p(t_0)$ , und daher erfüllen die quantenmechanischen Mittelwerte die klassischen Beziehungen.

Konservative Systeme mit dieser Eigenschaft sind:

- Das kräftefreie Teilchen.

- Das Teilchen im homogenen Feld (elektrisch geladenes Teilchen im homogenen elektrischen Feld oder Teilchen im homogenen Gravitationsfeld).
- Der lineare harmonische Oszillator.
- Der lineare harmonische Oszillator in einem homogenen Feld (elektrisch geladener Oszillator im homogenen elektrischen Feld oder Oszillator im homogenen Gravitationsfeld).

Wir haben die Mittelwerte für Ort und Impuls einer Gesamtheit linearer harmonischer Oszillatoren für eine spezielle Anfangsbedingung  $\psi(x, 0)$  berechnet und dabei das Ergebnis erhalten, dass diese Mittelwerte die klassischen Beziehungen erfüllen. Wir sehen nun, dass dies für eine *beliebige Präparation* zum Anfangszeitpunkt gilt. Insbesondere würde das Ergebnis (4.277), (4.278) nicht nur für die spezielle Anfangsbedingung  $\psi(x, 0) = \psi(x)$  Gl. (4.92) mit  $\alpha$  Gl. (4.61), sondern für *jede* Funktion mit  $\langle \hat{x} \rangle_0 = a$ ,  $\langle \hat{p} \rangle_0 = 0$  gelten.

Vergleichen wir nun noch die kanonischen Bewegungsgleichungen und die ehrenfesten Gleichungen in der Form mit den Ableitungen der Hamiltonfunktion bzw. des Hamiltonoperators:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left. \frac{\partial H(x, p)}{\partial p} \right|_{\substack{x=x(t) \\ p=p(t)}}, \quad \frac{dp(t)}{dt} = - \left. \frac{\partial H(x, p)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x(t) \\ p=p(t)}}; \quad (4.309)$$

$$\frac{d\langle \hat{x} \rangle_t}{dt} = \left\langle \frac{\partial H(\hat{x}, \hat{p})}{\partial \hat{p}} \right\rangle_t, \quad \frac{d\langle \hat{p} \rangle_t}{dt} = - \left\langle \frac{\partial H(\hat{x}, \hat{p})}{\partial \hat{x}} \right\rangle_t. \quad (4.310)$$

In dieser Form gelten die Gleichungen – wie man zeigen kann – auch für nichtkonservative Systeme. Notwendig und hinreichend dafür, dass die quantenmechanischen Mittelwerte für Teilchenort und Teilchenimpuls dieselben Gleichungen erfüllen wie die klassischen Variablen, ist das Bestehen der Beziehungen

$$\left\langle \frac{\partial H(\hat{x}, \hat{p})}{\partial \hat{p}} \right\rangle_t = \left. \frac{\partial H(x, p)}{\partial p} \right|_{\substack{x=\langle \hat{x} \rangle_t \\ p=\langle \hat{p} \rangle_t}}, \quad \left\langle \frac{\partial H(\hat{x}, \hat{p})}{\partial \hat{x}} \right\rangle_t = \left. \frac{\partial H(x, p)}{\partial x} \right|_{\substack{x=\langle \hat{x} \rangle_t \\ p=\langle \hat{p} \rangle_t}}, \quad (4.311)$$

welche genau dann erfüllt sind, wenn die Hamiltonfunktion sowohl in der Impulsvariablen als auch in der Ortsvariablen ein Polynom vom Grade  $n \leq 2$  ist. (Beachte, dass es bei nichtkonservativen Systemen neben der kinetischen Energie noch weitere impulsabhängige Terme geben kann.) Für konservative Systeme besitzt der Hamiltonoperator die Bauart  $H(\hat{x}, \hat{p}) = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$  und die erste Bedingung ist für beliebige Potentiale erfüllt, da es nur auf die kinetische Energie ankommt, welche dem Quadrat des Impulses proportional ist. Hingegen ist die zweite Bedingung nur unter der Voraussetzung erfüllt, dass das Potential ein Polynom vom Grade  $n \leq 2$  ist.

Beim „Rateweg“ in Abschnitt 4.3 haben wir folgendermaßen argumentiert: Damit es möglich ist, dass sich Wellenpakete im Einklang mit der Erfahrung zumindest unter bestimmten Voraussetzungen für das Kraftgesetz (z. B. im Fall der Kräftefreiheit) nach dem klassischen Bewegungsgesetz ausbreiten können, muss zumindest die „erste“ kanonische Bewegungsgleichung, in welche das Kraftgesetz nicht eingeht, für die Mittelwerte in einer quantenmechanischen Gesamtheit gültig bleiben. Was wir beim „Rateweg“ „hineingesteckt“ haben, ist natürlich beim

deduktiven Weg wieder „herausgekommen“. Wir sehen aber darüber hinaus, dass die Beibehaltung der „zweiten“ kanonischen Bewegungsgleichung für die quantenmechanischen Mittelwerte für allgemeine Systeme *nicht* möglich gewesen wäre.

Beispiel: Linearer anharmonischer ( $x^4$ -)Oszillator

Um zu zeigen, was passiert, wenn die Bedingung (4.308) *nicht* erfüllt ist, betrachten wir ein klassisches System mit der Hamiltonfunktion

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\mu}{4} x^4, \quad (4.312)$$

und das korrespondierende quantenmechanische System mit dem Hamiltonoperator

$$H(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\mu}{4} \hat{x}^4. \quad (4.313)$$

Dabei soll  $\mu \in \mathbb{R}^+$  gelten. Die kanonischen Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m}, \quad \frac{dp(t)}{dt} = -\mu[x(t)]^3. \quad (4.314)$$

Sie stellen ein nichtlineares geschlossenes Simultansystem dar, dessen Lösung  $x(t)$ ,  $p(t)$  bei gegebenen Anfangsbedingungen  $x(t_0)$ ,  $p(t_0)$  eindeutig bestimmt ist. Die entsprechenden ehrenfestschen Gleichungen lauten

$$\frac{d\langle \hat{x} \rangle_t}{dt} = \frac{\langle \hat{p} \rangle_t}{m}, \quad \frac{d\langle \hat{p} \rangle_t}{dt} = -\mu \langle \hat{x}^3 \rangle_t. \quad (4.315)$$

Neben den Unbekannten  $\langle \hat{x} \rangle_t$ ,  $\langle \hat{p} \rangle_t$  taucht hier als weitere Unbekannte  $\langle \hat{x}^3 \rangle_t$  auf. Beachte:

$$\langle \hat{x}^3 \rangle_t = \int_{\mathbb{R}} dx x^3 |\psi(x, t)|^2 \neq [\langle \hat{x} \rangle_t]^3 = \left[ \int_{\mathbb{R}} dx x |\psi(x, t)|^2 \right]^3.$$

Die ehrenfestschen Gleichungen gestatten deshalb *nicht* die Berechnung von  $\langle \hat{x} \rangle_t$ ,  $\langle \hat{p} \rangle_t$  bei gegebenem  $\langle \hat{x} \rangle_{t_0}$ ,  $\langle \hat{p} \rangle_{t_0}$ . Man sieht aber jedenfalls, dass die Größen  $\langle \hat{x} \rangle_t$ ,  $\langle \hat{p} \rangle_t$  *anderen* Differentialgleichungen genügen als die klassischen Variablen  $x(t)$ ,  $p(t)$  und daher auch *nicht* die klassischen Beziehungen erfüllen.

Falls die Bedingung  $\langle K(\hat{x}) \rangle_t = K(\langle \hat{x} \rangle_t)$  (wie im soeben besprochenen Beispiel) nicht erfüllt ist, kann es sein, dass sie *bei speziellen Anfangsbedingungen für ein bestimmtes Zeitintervall näherungsweise erfüllt* ist. Nehmen wir an, die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Teilchenort sei im Zeitintervall  $t_0 \leq t \leq t_1$  sehr stark um den Mittelwert  $\langle \hat{x} \rangle_t$  konzentriert, und das Kraftfeld  $K(x)$  ändere sich nur wenig über den Bereich, in dem diese Wahrscheinlichkeitsverteilung jeweils wesentlich von null verschieden ist (siehe Abb. 4.3). Dann gilt im Zeitintervall  $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\langle K(\hat{x}) \rangle_t = \int_{\mathbb{R}} dx K(x) |\psi(x, t)|^2 \approx K(\langle \hat{x} \rangle_t) \int_{\mathbb{R}} dx |\psi(x, t)|^2 = K(\langle \hat{x} \rangle_t), \quad (4.316)$$

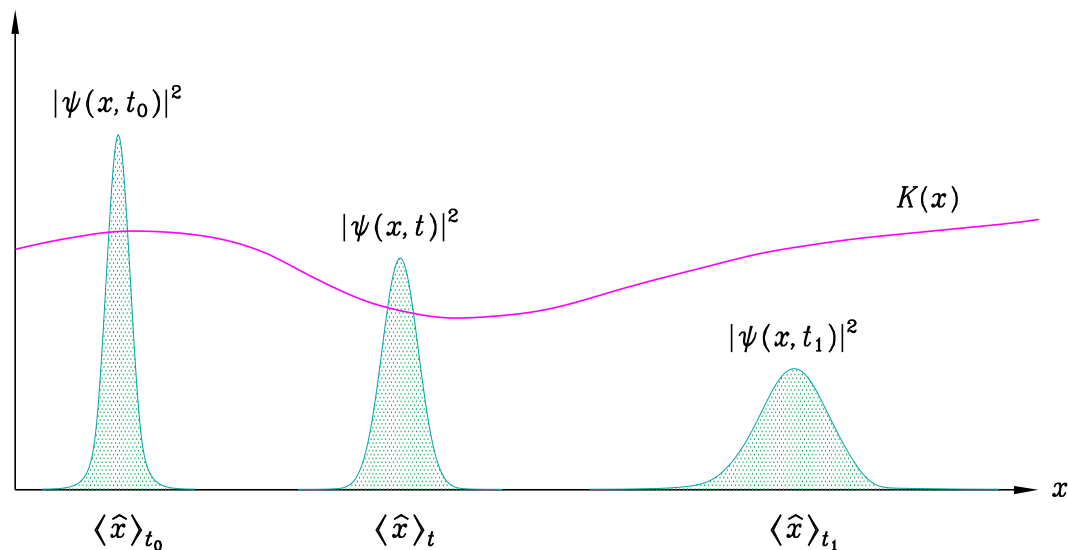


Abbildung 4.3: Bedingungen unter denen die klassischen Beziehungen für die Mittelwerte von Teilchenort und Teilchenimpuls *näherungsweise* gelten

und die Mittelwerte von Teilchenort und -impuls gehorchen in diesem Zeitintervall näherungsweise dem klassischen Bewegungsgesetz. Auf diese Weise lässt sich die Benutzung der klassischen Bewegungsgleichungen für die Beschreibung von Mikroteilchen in bestimmten experimentellen Situationen rechtfertigen.

Wir haben in diesem Abschnitt bisher nur Systeme mit einem spinlosen Teilchen in einer Raumdimension betrachtet. Die erhaltenen Ergebnisse lassen sich aber auf **Systeme mit  $N$  Teilchen in drei Raumdimensionen** ( $N \geq 1$ ) verallgemeinern: Ist der Hamiltonoperator in allen Komponenten der Teilchenorte und Teilchenimpulse ein Polynom vom Grade  $n \leq 2$ , so erfüllen die Mittelwerte aller Orts- und Impulskomponenten die klassischen Beziehungen. Ein Beispiel wäre ein System mit mehreren Teilchen in drei Raumdimensionen, bei welchem die Teilchen durch „lineare Federn“ an raumfeste Stellen gebunden und auch untereinander paarweise mit solchen „Federn“ verbunden sind.

## 4.13 Verträgliche Observablen

### Mathematische Hilfsmittel

#### Gemeinsames vollständiges Eigenvektorsystem vertauschbarer selbstadjungierter Operatoren

Um die Schreibweise einfach zu halten, nehmen wir an, dass die betrachteten Operatoren  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  ein rein diskretes Spektrum besitzen (Typ (c) von Abb. 4.1; endlich viele oder unendlich viele Eigenwerte, die mit 1, 2, ... indiziert sind). Auch von den Vielfachheiten

nehmen wir der Einfachheit halber an, dass sie abzählbar sind. *Alle Aussagen gelten aber für beliebige vertauschbare selbstadjungierte Operatoren.* Es sind lediglich die entsprechenden Modifikationen durchzuführen (andere Indizierung der Eigenwerte, Integrationen statt oder zusätzlich zu Summationen,  $\delta$ -Funktionen statt Kroneckerdeltas etc.; s. dazu Seite 268 bis 274).

**Satz**

Sind  $\hat{A}, \hat{B}$  vertauschbare selbstadjungierte Operatoren mit rein diskreten Spektren  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_d(\hat{A}) = \{a_1, a_2, \dots\}$ ,  $\sigma(\hat{B}) = \sigma_d(\hat{B}) = \{b_1, b_2, \dots\}$ , so existiert ein vollständiges Orthonormalsystem

$$\{u_{nm\alpha}; (n, m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B}); \alpha = 1, 2, \dots, g_{nm}\} \quad (4.317)$$

gemeinsamer Eigenvektoren von  $\hat{A}, \hat{B}$ :

$$\hat{A}u_{nm\alpha} = a_n u_{nm\alpha}, \quad \hat{B}u_{nm\alpha} = b_m u_{nm\alpha}. \quad (4.318)$$

Besitzen umgekehrt die Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$  ein vollständiges Orthonormalsystem gemeinsamer Eigenvektoren und reelle Eigenwerte, so sind sie selbstadjungiert und vertauschbar.

Die Menge  $\mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})$  der *Indexpaare*  $(n, m)$  gibt die Eigenwertpaare  $(a_n, b_m)$  an, zu denen gemeinsame Eigenvektoren von  $\hat{A}, \hat{B}$  existieren.<sup>76</sup> Sie ist i. Allg. *echte Teilmenge* der Menge  $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), (2, 3), \dots, (3, 1), (3, 2), (3, 3), \dots\}$ . Gibt es beispielsweise keinen gemeinsamen Eigenvektor von  $\hat{A}, \hat{B}$  zum Eigenwertpaar  $(a_1, b_3)$ , so gehört das Indexpaar  $(1, 3)$  nicht zur Menge  $\mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})$ . Welche Paare möglich sind, ergibt sich organisch, wenn man das gemeinsame Eigenwertproblem der beiden Operatoren löst, das mathematisch wie folgt formuliert ist:

*Eigenwertproblem:*

$$\begin{aligned} \hat{A}u &= \lambda u, \\ \hat{B}u &= \mu u, \end{aligned} \quad u \neq \theta. \quad (4.319)$$

Dabei stellen  $\lambda, \mu$  Eigenwertparameter dar.

Dass es i. Allg. nicht zu allen denkbaren Paaren  $(a_i, b_j)$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ , gemeinsame Eigenvektoren gibt, wird verständlich, wenn man einen endlich dimensionalen Hilbertraum betrachtet. Nehmen wir den Fall zweier selbstadjungierter Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$  mit nichtentarteten Eigenwerten in einem zweidimensionalen Raum. Von den vier denkbaren Paaren  $(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)$  können dann nur *zwei* vorkommen, da es in einem zweidimensionalen Raum nur zwei linear unabhängige Vektoren geben kann. Dabei muss aber jeder Eigenwert von  $\hat{A}$  und jeder Eigenwert von  $\hat{B}$  zumindest einmal vorkommen, da ja die Eigenvektoren von  $\hat{A}$  allein und ebenso die Eigenvektoren von  $\hat{B}$  allein für sich schon den Raum aufspannen. Offen ist also nur mehr die

<sup>76</sup>Es vereinfacht im Folgenden die Schreib- und Sprechweise, wenn man anstelle des Begriffs der *Eigenwertpaarmenge* den Begriff der *Indexpaarmenge* einführt.

Frage, ob es gemeinsame Eigenvektoren der beiden Operatoren zu den Eigenwertpaaren  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$  oder zu den Eigenwertpaaren  $(a_1, b_2)$ ,  $(a_2, b_1)$  gibt. Welcher der beiden Fälle vorliegt, kann man nur durch Lösen des gemeinsamen Eigenwertproblems (4.319) feststellen. (Ein möglicher Lösungsweg wird im 1. Teil des folgenden Beweises skizziert.) Findet man, dass der zweite Fall zutrifft, so hat man  $\mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B}) = \{(1, 2), (2, 1)\}$ . – Bei unendlich dimensionalen Räumen ist durch die Dimension des Raumes keine Schranke gesetzt, sodass es auch vorkommen kann, dass *jeder* Eigenwert von  $\hat{A}$  mit *jedem* Eigenwert von  $\hat{B}$  vorkommen kann. Betrachten wir als Beispiel ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in drei Raumdimensionen. Während *jeder* der Eigenwerte  $0, \pm\hbar, \pm 2\hbar, \dots$  von  $\hat{l}_z$  mit *jedem* der Eigenwerte  $\pm\frac{\hbar}{2}$  von  $\hat{s}_z$  vorkommen kann, kann *nicht* jeder Eigenwert von  $\hat{l}_z$  mit jedem der Eigenwerte  $l(l+1)\hbar^2$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$ , von  $\hat{l}^2$  vorkommen. Mit dem Eigenwert 0 von  $\hat{l}^2$  kann nur der Eigenwert 0 von  $\hat{l}_z$  vorkommen, mit dem Eigenwert  $2\hbar^2$  von  $\hat{l}^2$  können nur die Eigenwerte  $0, \pm\hbar$  von  $\hat{l}_z$  vorkommen usw.

Die Vollständigkeit des Orthonormalsystems (4.317) bedeutet, dass der *Entwicklungssatz*

$$f = \sum_{(n,m)} \sum_{\alpha} \langle u_{nm\alpha}, f \rangle u_{nm\alpha}, \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad (4.320)$$

gilt. Die Summation über  $n$  und  $m$  ist über die Paare  $(n, m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})$  zu erstrecken, und die Summe über  $\alpha$  läuft für ein festes Paar  $(n, m)$  von 1 bis  $g_{nm}$ .

*Beweis des Satzes:*

1. Teil: Ist  $\hat{A}$  ein selbstadjungierter Operator mit dem diskreten Spektrum  $\{a_1, a_2, \dots\}$ , so existiert ein vollständiges Orthonormalsystem  $\{u_{n\nu}; n = 1, 2, \dots; \nu = 1, 2, \dots, g_n\}$  von Eigenvektoren des Operators  $\hat{A}$ . Für das Folgende sei  $n$  vorübergehend *fest*. Mit der Eigenwertgleichung  $\hat{A}u_{n\nu} = a_n u_{n\nu}$  folgt dann

$$\begin{aligned} \underbrace{\hat{B}(\hat{A}u_{n\nu})}_{\hat{A}(\hat{B}u_{n\nu})}, &= \underbrace{\hat{B}(a_n u_{n\nu})}_{a_n(\hat{B}u_{n\nu})} \Rightarrow \hat{A}(\hat{B}u_{n\nu}) = a_n(\hat{B}u_{n\nu}). \\ \text{da} & \quad \text{da} \\ [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{0} & \quad \hat{B} \text{ linear} \end{aligned}$$

Die Vektoren  $\hat{B}u_{n\nu}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, g_n$ , sind also Eigenvektoren von  $\hat{A}$  zum Eigenwert  $a_n$ , d. h. Vektoren des Teilraumes  $\mathcal{H}(a_n)$ , und es gilt daher

$$\hat{B}u_{n\nu} = \hat{P}_n(\hat{B}u_{n\nu}) = \sum_{\nu'=1}^{g_n} \langle u_{n\nu'}, \hat{B}u_{n\nu} \rangle u_{n\nu'}, \quad \nu = 1, 2, \dots, g_n.$$

Die Koeffizienten  $\langle u_{n\nu'}, \hat{B}u_{n\nu} \rangle$  bilden die Elemente einer  $g_n$ -dimensionalen selbstadjungierten Matrix. Durch einen Basiswechsel  $\{u_{n\nu}, \nu = 1, 2, \dots, g_n\} \rightarrow \{\tilde{u}_{n\nu}, \nu = 1, 2, \dots, g_n\}$  in  $\mathcal{H}(a_n)$  kann man stets erreichen, dass  $\{\langle \tilde{u}_{n\nu'}, \hat{B}\tilde{u}_{n\nu} \rangle; \nu, \nu' = 1, 2, \dots, g_n\}$  eine Diagonalmatrix mit reellen Diagonalelementen ist, sodass eine Beziehung der Form

$$\langle \tilde{u}_{n\nu'}, \hat{B}\tilde{u}_{n\nu} \rangle = b_{n\nu} \delta_{\nu'\nu}, \quad \nu, \nu' = 1, 2, \dots, g_n$$

mit reellen  $b_{n\nu}$  gilt. Da *jeder* Vektor aus  $\mathcal{H}(a_n)$  Eigenvektor von  $\hat{A}$  zum Eigenwert  $a_n$  ist, gelten alle oben mit den Vektoren  $u_{n\nu}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, g_n$ , angeschriebenen Beziehungen auch mit den Vektoren

$\tilde{u}_{n\nu}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, g_n$ . Insbesondere gilt daher

$$\begin{aligned}\hat{A}\tilde{u}_{n\nu} &= a_n\tilde{u}_{n\nu}, \\ \hat{B}\tilde{u}_{n\nu} &= \sum_{\nu'=1}^{g_n} \langle \tilde{u}_{n\nu'}, \hat{B}\tilde{u}_{n\nu} \rangle \tilde{u}_{n\nu'} = b_{n\nu}\tilde{u}_{n\nu},\end{aligned}\quad n \text{ fest, } \nu = 1, 2, \dots, g_n.$$

Die Vektoren  $\tilde{u}_{n\nu}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, g_n$ , sind also *gemeinsame Eigenvektoren* von  $\hat{A}, \hat{B}$ . Dieses Verfahren kann man der Reihe nach für  $n = 1, 2, 3, \dots$  durchführen. Dabei können sich mehrere  $b_{n\nu}$  als gleich herausstellen, und zwar sowohl für verschiedene  $\nu$  bei festem  $n$  als auch für verschiedene  $n$ . Man „indiziert“ deshalb die erhaltenen gemeinsamen Eigenvektoren  $\tilde{u}_{n\nu}$ ,  $n = 1, 2, \dots, \nu = 1, 2, \dots, g_n$ , am Ende „um“, indem man von jedem gemeinsamen Eigenvektor angibt, zu welchem Eigenwertpaar  $(a_n, b_m)$  bezüglich  $\hat{A}, \hat{B}$  er gehört, und – falls erforderlich – einen weiteren Index  $\alpha$  einführt, der die zum selben Eigenwertpaar  $(a_n, b_m)$  gehörigen orthogonalen gemeinsamen Eigenvektoren „durchnummeriert“. Da die „umindizierten“ gemeinsamen Eigenvektoren ohnehin nicht mit den Eigenvektoren  $u_{n\nu}$  von  $\hat{A}$ , von denen wir ausgegangen sind, verwechselt werden können, da sie *drei* Indizes tragen, kann man die Tilde wieder weglassen und hat als *Lösung des gemeinsamen Eigenwertproblems*:

$$\begin{aligned}\hat{A}u_{nm\alpha} &= a_n u_{nm\alpha}, \\ \hat{B}u_{nm\alpha} &= b_m u_{nm\alpha},\end{aligned}\quad (n, m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, g_{nm}. \quad (4.321)$$

Das Verfahren liefert ganz „automatisch“ die Indexpaarmenge  $\mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})$ . Jeder Eigenwert  $a_n$  von  $\hat{A}$  kommt zumindest einmal vor. Ein Eigenwert  $a_n$  von  $\hat{A}$  kann aber i. Allg. nicht mit *allen* Eigenwerten  $b_j$  von  $\hat{B}$  zusammen auftreten. Umgekehrt muss natürlich auch jeder Eigenwert von  $\hat{B}$  zumindest einmal vorkommen, da ja  $\hat{A}, \hat{B}$  vollkommen gleichberechtigt sind.

2. Teil: Nehmen wir an, dass ein vollständiges Orthonormalsystem

$$\{u_{nm\alpha}; (n, m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B}); \alpha = 1, 2, \dots, g_{nm}\} \quad (4.322)$$

gemeinsamer Eigenvektoren der Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$  zu reellen Eigenwerten existiert, d. h. es gelten die Beziehungen (4.321) mit reellen  $a_n, b_m$ . Dann sind  $\hat{A}, \hat{B}$  jedenfalls selbstadjungiert, und es gilt der Entwicklungssatz (4.320). Wendet man auf  $f$  Gl. (4.320) einmal den Produktoperator  $\hat{B}\hat{A}$  und einmal den Produktoperator  $\hat{A}\hat{B}$  an, so erhält man

$$\hat{B}(\hat{A}f) = \sum_{(n,m)} \sum_{\alpha} \langle u_{nm\alpha}, f \rangle \underbrace{\hat{B}(\hat{A}u_{nm\alpha})}_{a_n b_m u_{nm\alpha}}, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (4.323)$$

$$\hat{A}(\hat{B}f) = \sum_{(n,m)} \sum_{\alpha} \langle u_{nm\alpha}, f \rangle \underbrace{\hat{A}(\hat{B}u_{nm\alpha})}_{a_n b_m u_{nm\alpha}}, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (4.324)$$

womit die Vertauschbarkeit der Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$  bewiesen ist.

Die gemeinsamen Eigenvektoren  $\{u_{nm\alpha}; \alpha = 1, 2, \dots, g_{nm}\}$  der Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$  zu einem festen Eigenwertpaar  $(a_n, b_m)$ ,  $(n, m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})$ , spannen einen  $g_{nm}$ -dimensionalen Teilraum  $\mathcal{H}(a_n, b_m)$  des Hilbertraumes  $\mathcal{H}$  auf. Der zugehörige Projektionsoperator ist durch

$$\hat{P}_{nm} = \sum_{\alpha=1}^{g_{nm}} \langle u_{nm\alpha}, \cdot \rangle u_{nm\alpha} \quad (4.325)$$

gegeben. Er kann als Repräsentant einer Observablen  $\mathfrak{P}_{nm}$  mit den möglichen Messwerten 1, 0 aufgefasst werden. Dem Messwert 1 (0) von  $\mathfrak{P}_{nm}$  entspricht die Antwort „Ja (Nein)“, bezüglich des Observablensatzes  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  liegt das Messwertpaar  $(a_n, b_m)$  vor (nicht vor)“. Es gelten die *Orthogonalitätsbeziehungen*

$$\hat{P}_{nm}\hat{P}_{n'm'} = \hat{0}, \quad \text{falls } (n', m') \neq (n, m) \quad (4.326)$$

sowie die *Vollständigkeitsbeziehung*

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})} \hat{P}_{nm} = \hat{1}. \quad (4.327)$$

Bezeichnen wir den Projektionsoperator zum Eigenraum  $\mathcal{H}(a_n)$  von  $\hat{A}$  mit  $\hat{Q}_n$ <sup>77</sup> und den Projektionsoperator zum Eigenraum  $\mathcal{H}(b_m)$  von  $\hat{B}$  mit  $\hat{R}_m$ , so gelten die „Zerlegungen“

$$\hat{Q}_n = \sum_{m: (n,m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})} \hat{P}_{nm}, \quad \hat{R}_m = \sum_{n: (n,m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})} \hat{P}_{nm}, \quad (4.328)$$

$$\hat{1} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})} \hat{P}_{nm} = \sum_{n: a_n \in \sigma(\hat{A})} \hat{Q}_n = \sum_{m: b_m \in \sigma(\hat{B})} \hat{R}_m, \quad (4.329)$$

und die von Abschnitt 4.7 bekannten *Spektralformen* von  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$ ,

$$\hat{A} = \sum_{n: a_n \in \sigma(\hat{A})} a_n \hat{Q}_n, \quad \hat{B} = \sum_{m: b_m \in \sigma(\hat{B})} b_m \hat{R}_m, \quad (4.330)$$

lassen sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\hat{A} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})} a_n \hat{P}_{nm}, \quad \hat{B} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})} b_m \hat{P}_{nm}. \quad (4.331)$$

Nachdem wir die erforderlichen mathematischen Hilfsmittel bereitgestellt haben, befassen wir uns mit Messungen und Umpräparationen in der Quantenmechanik. Wir betrachten zwei Observablen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ , von denen wir vorerst noch *nicht* voraussetzen, dass die zugehörigen selbstadjungierten Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$  vertauschbar sind. Um die Schreibweise einfach zu halten, nehmen wir an, dass  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  rein diskrete Spektren besitzen (endlich viele oder unendlich viele Eigenwerte, die mit 1, 2, ... indiziert sind). Alle im Folgenden gemachten Aussagen gelten mit entsprechend modifizierter Schreibweise für *beliebige* Spektren, ausgenommen die Aussagen über vollständige Präparationen, für welche die Existenz diskreter Eigenwerte wesentlich ist.

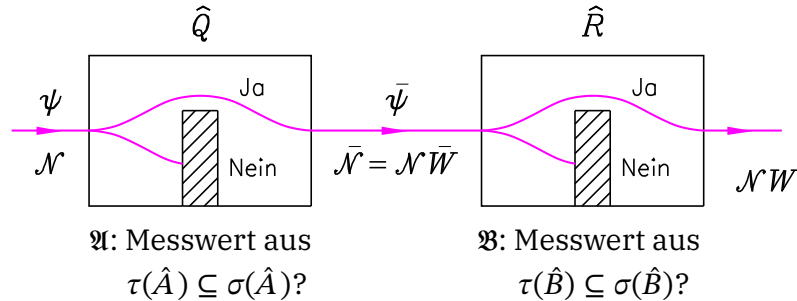
Wir wenden nun das 3. und 4. Grundgesetz auf eine *Messung* bzw. eine *Umpräparation* mit jeweils einem  $\mathfrak{A}$ -Apparat und einem  $\mathfrak{B}$ -Apparat „in Serie“ an. Dabei soll die „Frage“ bezüglich  $\mathfrak{B}$  „unmittelbar“ nach der „Frage“ bezüglich  $\mathfrak{A}$  „gestellt“ werden, d. h. es soll dazwischen keine zeitliche Änderung des Zustandsvektors nach der zeitabhängigen Schrödingergleichung erfolgen. (Ist  $\mathfrak{A}$  Erhaltungsgröße, so kann die „Frage“ bezüglich  $\mathfrak{B}$  in beliebigem zeitlichem Abstand zu der bezüglich  $\mathfrak{A}$  „gestellt“ werden.)

<sup>77</sup>In den Abschnitten 4.7, 4.8 und 4.10 wurde dieser Projektionsoperator mit  $\hat{P}_n$  bezeichnet.



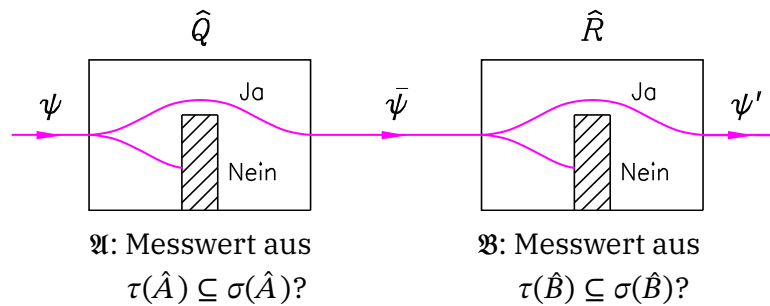
Fall 1: Umpräparation bezüglich  $\mathfrak{A}$  und unmittelbar darauf folgende Messung von  $\mathfrak{B}$   
 Gefragt ist die Wahrscheinlichkeit  $W$ .

Symbolisch dargestellt:



Fall 2: Umpräparation bezüglich  $\mathfrak{A}$  und unmittelbar darauf bezüglich  $\mathfrak{B}$   
 Gefragt ist der Zustandsvektor  $\psi'$ .

Symbolisch dargestellt:



Nach dem 3. Grundgesetz gilt

$$\bar{W} = \|\hat{Q}\psi\|^2, \quad \frac{W}{\bar{W}} = \|\hat{R}\bar{\psi}\|^2 \quad (4.332)$$

und nach dem 4. Grundgesetz gilt

$$\bar{\psi} = \frac{\hat{Q}\psi}{\|\hat{Q}\psi\|}, \quad \psi' = \frac{\hat{R}\bar{\psi}}{\|\hat{R}\bar{\psi}\|}, \quad (4.333)$$

woraus unmittelbar

$$W = \|\hat{R}\hat{Q}\psi\|^2, \quad (4.334)$$

$$\psi' = \frac{\hat{R}\hat{Q}\psi}{\|\hat{R}\hat{Q}\psi\|} \quad (4.335)$$

folgt. Im Fall 2 muss man  $\hat{R}\hat{Q}\psi \neq \theta$  voraussetzen, da sonst überhaupt keine Gesamtheit präpariert wird, d. h. aus dem  $\mathfrak{B}$ -Apparat „nichts herauskommt“.

Die Ergebnisse für  $W$  und  $\psi'$  zeigen, dass es nur dann nicht auf die Reihenfolge der beiden Apparate ankommt, wenn die Projektionsoperatoren  $\hat{Q}$ ,  $\hat{R}$  vertauschbar sind. Es gilt der folgende Satz (Beweis folgt):

**Satz: Verträgliche Observablen**

Dann und nur dann, wenn  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{0}$  gilt, ist bei *beliebiger* Wahl der Teilmengen  $\tau(\hat{A}), \tau(\hat{B})$  auch  $[\hat{R}, \hat{Q}] = \hat{0}$ , und sowohl  $W$  als auch  $\psi'$  sind von der Reihenfolge der beiden Apparate unabhängig, weshalb man die Observablen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  als *verträglich* bezeichnet.

Wir wissen natürlich, dass  $\hat{R}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{R}$  nur dann vom Nulloperator verschieden sein kann, falls in  $\tau(\hat{B})$  *mindest ein* Eigenwert  $b_j$  enthalten ist, der mit einem der Eigenwerte  $a_l$  aus  $\tau(\hat{A})$  „zusammen vorkommen kann“, sodass  $(l, j) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})$  gilt. Ist dies nicht erfüllt, so ist im Fall 1  $W = 0$ , und im Fall 2 werden überhaupt keine Systeme präpariert. (Die Voraussetzung  $\hat{R}\hat{Q}\psi \neq \theta$  ist dann auf triviale Weise verletzt, nämlich durch  $\hat{R}\hat{Q} = \hat{0}$ .)

Gilt  $[\hat{A}, \hat{B}] \neq \hat{0}$ , so gilt im Allgemeinen auch  $[\hat{R}, \hat{Q}] \neq \hat{0}$ , und sowohl für  $W$  als auch für  $\psi'$  erhält man ein anderes Ergebnis, wenn man die Reihenfolge der beiden Apparate vertauscht, weshalb man die Observablen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  als *nicht verträglich* bezeichnet. Die Einschränkung „im Allgemeinen“ bezieht sich auf folgenden Umstand: Nicht vertauschbare selbstadjungierte Operatoren können zwar kein *vollständiges* System gemeinsamer Eigenvektoren besitzen, sie können aber einen oder mehrere (unter Umständen sogar unendlich viele) gemeinsame Eigenvektoren haben. Trifft dies für  $\hat{A}, \hat{B}$  zu, so kommt es bei einer bestimmten *speziellen Wahl* der Teilmengen  $\tau(\hat{A})$  und  $\tau(\hat{B})$  *nicht* auf die Reihenfolge an. Ein konkretes Beispiel: Angenommen,  $\hat{A}, \hat{B}$  besitzen einen einzigen gemeinsamen Eigenvektor, und zwar zum Eigenwertpaar  $(a_2, b_7)$ . Wählt man dann  $\tau(\hat{A}) = \{a_2\}$  und  $\tau(\hat{B}) = \{b_7\}$ , so kommt es auf die Reihenfolge *nicht* an, bei jeder anderen Wahl einer der Teilmengen oder beider Teilmengen kommt es aber auf die Reihenfolge an.

*Beweis des Satzes*  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{0} \Leftrightarrow [\hat{Q}, \hat{R}] = \hat{0}, \forall \tau(\hat{A}), \tau(\hat{B})$

1. Teil:  $\Leftarrow$

Die Operatoren

$$\hat{Q} = \sum_{n: a_n \in \tau(\hat{A})} \hat{Q}_n, \quad \hat{R} = \sum_{m: b_m \in \tau(\hat{B})} \hat{R}_m \tag{4.336}$$

sind dann und nur dann für *beliebige* Wahl von  $\tau(\hat{A}) \subseteq \sigma(\hat{A}), \tau(\hat{B}) \subseteq \sigma(\hat{B})$  vertauschbar, falls die Operatoren  $\hat{Q}_n, \hat{R}_m$  für alle  $n, m$  ( $n: a_n \in \sigma(\hat{A}), m: b_m \in \sigma(\hat{B})$ ) vertauschbar sind. Gilt letzteres, so folgt aber mit den Spektraldarstellungen (4.330) unmittelbar die Vertauschbarkeit der Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$ .

2. Teil:  $\Rightarrow$

Sind die Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$  vertauschbar, so besitzen sie ein vollständiges Orthonormalsystem gemeinsamer Eigenvektoren. Die Spektraldarstellung von  $\hat{A}, \hat{B}$  kann dann in der Form (4.331) geschrieben werden, und für die Projektionsoperatoren  $\hat{Q}_n, \hat{R}_m$  gelten dann die Beziehungen (4.328).

Sind die Operatoren  $\hat{Q}_n, \hat{R}_m$  für alle  $n, m$  ( $n: a_n \in \sigma(\hat{A}), m: b_m \in \sigma(\hat{B})$ ) vertauschbar, gleichgültig, ob  $(n, m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})$  oder  $(n, m) \notin \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})$ , so sind aber auch die Operatoren

$\hat{Q}, \hat{R}$  Gl. (4.336) für beliebige Wahl von  $\tau(\hat{A}) \subseteq \sigma(\hat{A}), \tau(\hat{B}) \subseteq \sigma(\hat{B})$  vertauschbar. Es bleibt also nur noch Ersteres zu zeigen, was leicht gelingt, wenn man die Beziehungen (4.328) sowie die Orthogonalitätsbeziehungen (4.326) und die Idempotenz von Projektionsoperatoren berücksichtigt. Es gilt

$$\hat{Q}_n \hat{R}_m = \sum_{m': (n,m') \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})} \hat{P}_{nm'} \sum_{n': (n',m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})} \hat{P}_{n'm} = \begin{cases} \hat{P}_{nm} & \text{falls } (n, m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B}) \\ \hat{0} & \text{falls } (n, m) \notin \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B}) \end{cases},$$

$$\hat{R}_m \hat{Q}_n = \sum_{n': (n',m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})} \hat{P}_{n'm} \sum_{m': (n,m') \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})} \hat{P}_{nm'} = \begin{cases} \hat{P}_{nm} & \text{falls } (n, m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B}) \\ \hat{0} & \text{falls } (n, m) \notin \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B}) \end{cases},$$

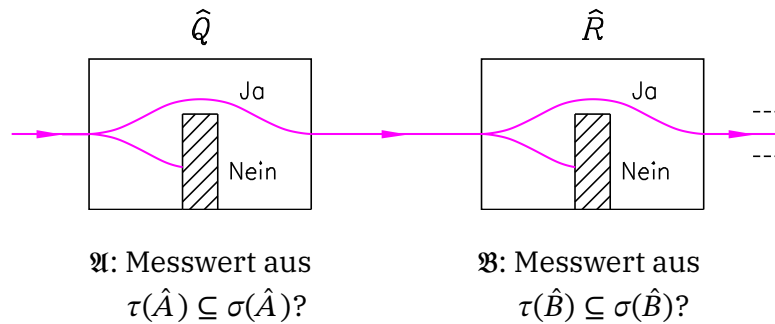
woraus für alle  $n, m$  die Vertauschbarkeit von  $\hat{Q}_n, \hat{R}_m$  folgt. Damit ist der obige Satz bewiesen.

Wie man leicht zeigt (siehe Aufgabe Q24), stellt der Operator

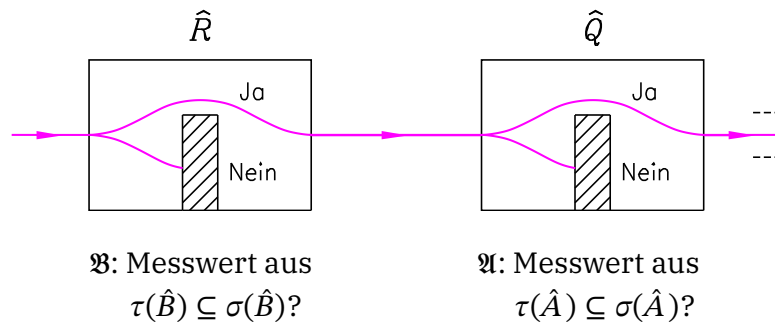
$$\hat{P} := \hat{R} \hat{Q} \tag{4.337}$$

im Falle  $\hat{R} \hat{Q} = \hat{Q} \hat{R}$  einen *Projektionsoperator* dar. Bei der Reihenfolge  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  der Apparate gehört dann der Eigenwert 1 von  $\hat{P}$  zu den Antworten „Ja“ bezüglich  $\mathfrak{A}$  und „Ja“ bezüglich  $\mathfrak{B}$ , und der Eigenwert 0 zu den Antworten „Ja“ bezüglich  $\mathfrak{A}$ , „Nein“ bezüglich  $\mathfrak{B}$  bzw. zur Antwort „Nein“ bezüglich  $\mathfrak{A}$ .

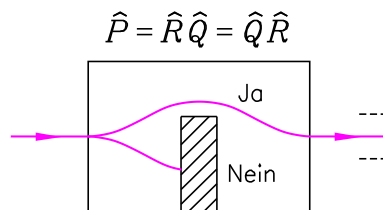
Wegen der Gleichwertigkeit von



und



spricht man dann von einem *Apparat für den Satz*  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  *verträglicher Observablen*, wobei man offenlässt, wie der  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ -Apparat „intern“ aussieht. Da es auf die interne Reihenfolge nicht ankommt, ist sogar ein  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ -Apparat denkbar, der die beiden „Fragen“ gar nicht nacheinander, sondern *gleichzeitig* stellt. Generell spricht man im Fall 1 von einer *Messung der verträglichen Observablen*  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  *zugleich* und im Fall 2 von einer *Umpräparation bezüglich der verträglichen Observablen*  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  *zugleich*. Die interne Realisierung kann dabei so sein, dass zugleich *gleichzeitig* bedeutet – wie meist gesagt wird – oder auch nicht. Dem  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ -Apparat wird der Projektionsoperator von Gl. (4.337) zugeordnet, und die Messung des Satzes bzw. die Umpräparation bezüglich des Satzes wird symbolisch folgendermaßen dargestellt:



$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ : Messwertpaar  $(a_l, b_j)$   
 mit  $a_l \in \tau(\hat{A}) \subseteq \sigma(\hat{A})$ ,  
 $b_j \in \tau(\hat{B}) \subseteq \sigma(\hat{B})$ ?

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, die *Verallgemeinerung des 3. und 4. Grundgesetzes für einen Satz*  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  *verträglicher Observablen* zu formulieren, d. h. Aussagen über die *Messung eines Satzes*  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  *verträglicher Observablen* und die *Umpräparation bzgl. eines Satzes*  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  *verträglicher Observablen* zu machen. Dabei lassen wir den bisher noch enthaltenen trivialen Fall  $\hat{P} = \hat{O}$  weg und fragen von vornherein nur nach Eigenwertpaaren  $(a_n, b_m)$  mit  $(n, m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})$ .

*Verallgemeinerung des 3. Grundgesetzes:*

**Messung eines Satzes  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  verträglicher Observablen ( $t$  „fest“)**

Annahme:  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_d(\hat{A}) = \{a_1, a_2, \dots\}$ ,  $\sigma(\hat{B}) = \sigma_d(\hat{B}) = \{b_1, b_2, \dots\}$

$\psi$  sei der Zustandsvektor einer reinen Gesamtheit zu einem bestimmten Zeitpunkt, gefragt ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei einer Messung des Satzes  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  verträglicher Observablen zum betreffenden Zeitpunkt ein Messwertpaar  $(a_n, b_m)$ ,  $(n, m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B}) \subseteq \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})$ , findet.

Symbolisch dargestellt:

$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ : Messwertpaar  $(a_n, b_m)$ ,  
 $(n, m) \in \mathfrak{i}(\hat{A}, \hat{B}) \subseteq \mathfrak{l}(\hat{A}, \hat{B})?$

(a): Dem Messapparat wird der Projektionsoperator

$$\hat{P} = \sum_{(n,m) \in \mathfrak{i}(\hat{A}, \hat{B})} \hat{P}_{nm} \quad (4.338)$$

zugeordnet.

(b): Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt

$$W = \|\hat{P}\psi\|^2. \quad (4.339)$$

*Bemerkungen:*

1. Die entsprechende Formulierung für *allgemeine Spektren*  $\sigma(\hat{A})$ ,  $\sigma(\hat{B})$  bietet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, sie ist nur *formal* komplizierter.
2. Die Verallgemeinerung auf *Sätze von mehr als zwei paarweise verträglichen Observablen* bringt nichts grundsätzlich Neues mit sich, es treten lediglich mehr Messwerte, mehr Indizes etc. auf (siehe auch Abschnitt 4.15).
3. Redundanz in den Grundgesetzen stört nicht. Wir hätten deshalb das 3. Grundgesetz *von Anfang an* für Sätze von  $n$  paarweise verträglichen Observablen postulieren können. Hier haben wir die verallgemeinerte Form des 3. Grundgesetzes als *Satz* aus der einfachen Form des 3. und 4. Grundgesetzes von Seite 285 und Seite 290 gewonnen.
4. Spezialfall: Wahrscheinlichkeit  $W_{nm}$ , bei einer Messung von  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  das Messwertpaar  $(a_n, b_m)$ ,  $(n, m) \in \mathfrak{l}(\hat{A}, \hat{B})$ , zu finden

Mit  $\mathfrak{i}(\hat{A}, \hat{B}) = \{(n, m)\}$  folgt  $\hat{P} = \hat{P}_{nm}$ , und man erhält (s. Gl. (4.325))

$$W_{nm} = \|\hat{P}_{nm}\psi\|^2 = \sum_{\alpha=1}^{g_{nm}} |\langle u_{nm\alpha}, \psi \rangle|^2. \quad (4.340)$$

Gilt  $g_{nm} = 1$ , ist also  $\mathcal{H}(a_n, b_m)$  eindimensional, so vereinfacht sich dies zu

$$W_{nm} = |\langle u_{nm}, \psi \rangle|^2. \quad (4.341)$$

5. Die Wahrscheinlichkeit  $W_n$ , bei einer Messung von  $\mathfrak{A}$  *allein* den diskreten Messwert  $a_n$  zu finden, ist nach dem 3. Grundgesetz durch Gl. (4.215) mit  $\hat{P}_n \equiv \hat{Q}_n$  gegeben. Da für den Projektionsoperator  $\hat{Q}_n$  die „Zerlegung“ (4.328) gilt, kann man diese Wahrscheinlichkeit auch in der Form

$$W_n = \sum_{m: (n,m) \in \mathfrak{i}(\hat{A}, \hat{B})} W_{nm} \quad (4.342)$$

schreiben. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von  $\mathfrak{A}$  *allein* den diskreten Messwert  $a_n$  zu finden, ist also gleich der Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Satzes  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  für  $\mathfrak{A}$  den Messwert  $a_n$  und für  $\mathfrak{B}$  *irgendeinen* der Messwerte  $b_m$  zu finden, welche gemeinsam mit  $a_n$  auftreten können.

6. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  *irgendeines* der möglichen Messwertpaare zu erhalten, muss natürlich eins sein. Dies ist durch die Vollständigkeitsbeziehung (4.327) und die im 1. Grundgesetz erhobene Forderung  $\|\psi\| = 1$  gewährleistet.
7. Zu  $t$  „fest“ s. Punkt 8 der Bemerkungen zum 3. Grundgesetz auf Seite 287.
8. Siehe Punkt 9 der Bemerkungen zum 3. Grundgesetz auf Seite 287.

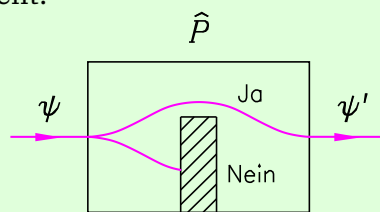
*Verallgemeinerung des 4. Grundgesetzes:*

**Umpräparation bezüglich eines Satzes  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  verträglicher Observablen ( $t$  „fest“)**

Annahme:  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_d(\hat{A}) = \{a_1, a_2, \dots\}$ ,  $\sigma(\hat{B}) = \sigma_d(\hat{B}) = \{b_1, b_2, \dots\}$

$\psi$  sei der Zustandsvektor einer reinen Gesamtheit zu einem bestimmten Zeitpunkt, gefragt ist der Zustandsvektor jener neuen reinen Gesamtheit, welche man durch eine Umpräparation bezüglich des Observablensatzes  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  ( $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  verträglich) zum betreffenden Zeitpunkt erhält, wenn man dabei Systeme mit Messwertpaaren  $(a_n, b_m)$ ,  $(n, m) \in \mathfrak{i}(\hat{A}, \hat{B}) \subseteq \mathfrak{l}(\hat{A}, \hat{B})$ , auswählt.

Symbolisch dargestellt:



$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ : Messwertpaar  $(a_n, b_m)$ ,  
 $(n, m) \in \mathfrak{i}(\hat{A}, \hat{B}) \subseteq \mathfrak{l}(\hat{A}, \hat{B})$ ?

(a): Dem Präparationsapparat wird der Projektionsoperator

$$\hat{P} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})} \hat{P}_{nm} \quad (4.343)$$

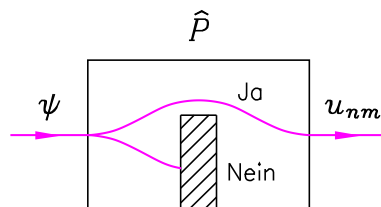
zugeordnet.

(b): Eine neue Gesamtheit wird nur unter der Voraussetzung  $\hat{P}\psi \neq \theta$  erzeugt. Für den gesuchten Zustandsvektor gilt

$$\psi' = \frac{\hat{P}\psi}{\|\hat{P}\psi\|}. \quad (4.344)$$

*Bemerkungen:*

- 1.–3. Die Aussagen der Punkte 1 bis 3 der Bemerkungen zur Verallgemeinerung des 3. Grundgesetzes auf Seite 325f gelten sinngemäß auch hier.
- 4.–6. Die Punkte 1 bis 3 der Bemerkungen zum 4. Grundgesetz auf Seite 290f gelten unverändert.
7. Zu  $t$  „fest“ s. Punkt 8 der Bemerkungen zum 3. Grundgesetz auf Seite 287.
8. Spezialfall: Angenommen die Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$  besitzen zu dem diskreten Eigenwertpaar  $(a_n, b_m)$  nur einen linear unabhängigen gemeinsamen Eigenvektor, d. h. es sei  $g_{nm} = 1$ . Unter der Voraussetzung, dass der Zustandsvektor  $\psi$  zu diesem Eigenvektor  $u_{nm}$  nicht orthogonal ist ( $\langle u_{nm}, \psi \rangle \neq 0$ ), betrachten wir die folgende Umpräparation:



$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ : Messwertpaar  $(a_n, b_m)$ ?

$$g_{nm} = 1$$

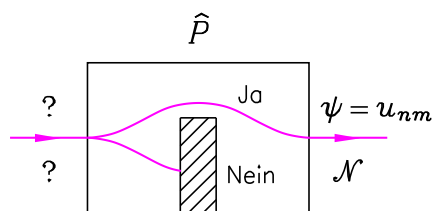
$$(n, m \text{ fest}, (n, m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B}))$$

Mit dem Projektionsoperator  $\hat{P} = \hat{P}_{nm} = \langle u_{nm}, \cdot \rangle u_{nm}$  folgt dann analog zu Punkt 7 der Bemerkungen zum 4. Grundgesetz

$$\psi' \hat{=} u_{nm}.$$

Der Zustand  $\psi'$  ist also *unabhängig von  $\psi$* , und man bezeichnet die Umpräparation als *Präparation*. Diese Präparation ist *vollständig*, weil sie eine reine Gesamtheit (einen Zustandsvektor) festlegt.

Spezialfall einer vollständigen Präparation:



$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ : Messwertpaar  $(a_n, b_m)$ ?

$$g_{nm} = 1$$

$$(n, m \text{ fest}, (n, m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B}))$$

Präparation = Filterung + Selektion

Ob  $\mathcal{N} \neq 0$  ist, muss man durch einen „Vorversuch“ klären, bei dem man einen Zähler hinzunimmt, mit dessen Hilfe man  $\mathcal{N}$  misst.

Im gegebenen Fall nennt man  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  einen bzgl. des Messwertpaares  $(a_n, b_m)$  ( $n, m$  fest) vollständigen Satz verträglicher Observablen. Sind alle Eigenwertpaare von  $\hat{A}, \hat{B}$  diskret, und gibt es zu jedem Eigenwertpaar nur einen linear unabhängigen Eigenvektor, so kann man einen Präparationsapparat bauen, auf dessen Skala man ein beliebiges Messwertpaar  $(a_n, b_m)$ ,  $(n, m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})$ , wählen kann. Der Apparat stellt dann eine reine Gesamtheit mit dem entsprechenden Zustandsvektor  $u_{nm}$  (also Systeme mit dem Wert  $a_n$  von  $\mathfrak{A}$  und dem Wert  $b_m$  von  $\mathfrak{B}$ ) her. Durch die verschiedenen Einstellungen des Apparates wird dabei ein vollständiges Vektorsystem „überstrichen“.  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  wird dann als vollständiger Satz verträglicher Observablen „an sich“ (d. h. im engeren Sinn) mit rein diskreten Messwertpaaren bezeichnet.

## 4.14 Unbestimmtheitsbeziehungen

### Allgemeine heisenbergsche Unbestimmtheitsbeziehung

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  seien zwei beliebige Observablen eines quantenmechanischen Systems. Die Vertauschungsbeziehung der zugehörigen Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$  sei<sup>a</sup>

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{K}. \quad (4.345)$$

(Der Fall vertauschbarer Operatoren ist dabei als Sonderfall  $\hat{K} = \hat{0}$  eingeschlossen.) Dann gilt die allgemeine heisenbergsche Unbestimmtheitsbeziehung

$$\Delta a \cdot \Delta b \geq \frac{|\langle \psi, \hat{K} \psi \rangle|}{2}. \quad (4.346)$$

<sup>a</sup>Die Schreibweise  $i\hat{K}$  wird gewählt, da dann der Operator  $\hat{K}$  selbstadjungiert ist, also unter Umständen einer Observablen  $\mathfrak{K}$  entspricht. Ist dies der Fall, so gilt  $\langle \psi, \hat{K} \psi \rangle = \langle \hat{K} \rangle$ .



*Beweis:*

Wir gehen von der aus der Mathematik bekannten schwarzschen Ungleichung

$$\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \geq |\langle u, v \rangle|^2 \quad (4.347)$$

aus, welche für beliebige Hilbertraum-Vektoren gilt.<sup>78,79</sup>

Mit den Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$  sind auch die Operatoren

$$\widehat{\delta A} := \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{1}, \quad \widehat{\delta B} := \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle \hat{1} \quad (4.348)$$

selbstadjungiert, und es gilt

$$[\widehat{\delta A}, \widehat{\delta B}] = [\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{K}. \quad (4.349)$$

Einsetzen von  $u = \widehat{\delta A}\psi, v = \widehat{\delta B}\psi$  in die schwarzsche Ungleichung (4.347) gibt zunächst

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\delta A}\psi, \widehat{\delta A}\psi \rangle \langle \widehat{\delta B}\psi, \widehat{\delta B}\psi \rangle &\geq |\langle \widehat{\delta A}\psi, \widehat{\delta B}\psi \rangle|^2, \\ \langle \psi, (\widehat{\delta A})^2\psi \rangle \langle \psi, (\widehat{\delta B})^2\psi \rangle &\geq |\langle \psi, \widehat{\delta A}\widehat{\delta B}\psi \rangle|^2, \end{aligned}$$

also (s. Gl. (4.264))

$$\Delta a \cdot \Delta b \geq |\langle \psi, \widehat{\delta A}\widehat{\delta B}\psi \rangle|. \quad (4.350)$$

Mit der Identität

$$\widehat{\delta A}\widehat{\delta B} \equiv \frac{1}{2} \underbrace{(\widehat{\delta A}\widehat{\delta B} + \widehat{\delta B}\widehat{\delta A})}_{=: \hat{D}} + \frac{1}{2} \underbrace{(\widehat{\delta A}\widehat{\delta B} - \widehat{\delta B}\widehat{\delta A})}_{i\hat{K}} \quad (4.351)$$

erhalten wir

$$|\langle \psi, \widehat{\delta A}\widehat{\delta B}\psi \rangle| = \frac{1}{2} |\langle \psi, \hat{D}\psi \rangle + i\langle \psi, \hat{K}\psi \rangle|. \quad (4.352)$$

Da die Operatoren  $\hat{D}, \hat{K}$  selbstadjungiert sind, sind  $\langle \psi, \hat{D}\psi \rangle, \langle \psi, \hat{K}\psi \rangle$  reell, und es gilt

$$|\langle \psi, \widehat{\delta A}\widehat{\delta B}\psi \rangle| = \frac{1}{2} \sqrt{\langle \psi, \hat{D}\psi \rangle^2 + \langle \psi, \hat{K}\psi \rangle^2} \geq \frac{|\langle \psi, \hat{K}\psi \rangle|}{2}. \quad (4.353)$$

Setzen wir dies in Gl. (4.350) ein, so erhalten wir die Unbestimmtheitsbeziehung (4.346).

Wie schon auf Seite 300 betont wurde, haben die Unbestimmtheiten  $\Delta a, \Delta b$  nichts mit Messungenauigkeiten zu tun. Sie stellen die statistischen Streuungen der Messwerte für Einzelsysteme bezüglich des Mittelwertes in der Gesamtheit dar, sind also ein Maß für die „Breiten“ der Wahrscheinlichkeitsverteilungen bezüglich der Observablen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ .<sup>80</sup>

<sup>78</sup>Für den Beweis der schwarzschen Ungleichung benötigt man lediglich die in Aufgabe Q1 angeführten Eigenschaften des inneren Produktes eines unitären Vektorraumes.

<sup>79</sup>Für den euklidischen Raum lautet die schwarzsche Ungleichung  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$  bzw.  $|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \geq |(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})|$ , was unmittelbar aus  $\cos(\angle \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$  und  $|\cos \alpha| \leq 1$  folgt.

<sup>80</sup>Eine kritische Diskussion der Interpretation der Unbestimmtheitsbeziehungen findet man bei Ballentine, L. E.: The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. Rev. Mod. Phys. 42 (1970), 358–381.

Um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung experimentell zu überprüfen, muss man durch Messen der betreffenden Observablen an hinreichend vielen Einzelsystemen der Gesamtheit die entsprechende Häufigkeitsverteilung ermitteln. Diese kann man aber nur experimentell „auflösen“, wenn die Messungenauigkeit *sehr klein* gegen die „Breite“ der Verteilung ist. Die Deutung der Unbestimmtheiten als Messungenauigkeiten ist daher falsch.

Betrachten wir speziell **Systeme mit einem Teilchen in einer Raumdimension**. Für die Operatoren  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$  der fundamentalen Observablen Teilchenort  $x$ , Teilchenimpuls  $p$  gilt die kanonische Vertauschungsbeziehung (4.148). Der zugehörige Operator  $\hat{K}$  ist also proportional zum Einheitsoperator, und es folgt die **heisenbergsche Unbestimmtheitsbeziehung im engeren Sinne**

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} . \quad (4.354)$$

Die übliche Lehrbuchaussage dazu lautet etwa folgendermaßen: Man kann Teilchenort und Teilchenimpuls nicht gleichzeitig „scharf“ messen. Misst man Teilchenort und Teilchenimpuls gleichzeitig, so sind die Ergebnisse mit Ungenauigkeiten (Unschärfen) behaftet, deren Produkt zumindest den Wert  $\frac{\hbar}{2}$  hat.

Abgesehen von dem bereits oben gebrachten Einwand muss man dazu feststellen, dass der quantenmechanische Formalismus überhaupt nur Aussagen über die Messung einer *einzigsten* Observablen oder die „gleichzeitige“ Messung eines *Satzes verträglicher* Observablen (Observablen, für welche die zugehörigen Operatoren paarweise vertauschbar sind) gestattet. Der quantenmechanische Formalismus enthält *nichts*, was sich auf „unscharfe gleichzeitige Messungen“ *nicht verträglicher* Observablen bezieht. Die Unbestimmtheitsbeziehung (4.354) bezieht sich auf die *statistischen Streuungen* der Messergebnisse für Teilchenort und Teilchenimpuls in einer Gesamtheit mit dem Zustandsvektor  $\psi$ .<sup>81</sup> An einem Teilchen wird dabei jeweils nur *eine* der beiden Observablen, d. h.  $x$  oder  $p$ , gemessen.

Praktisch kann man die Messung so durchführen, dass man eine Gesamtheit von  $\mathcal{N}$  Teilchen (mit hinreichend großem  $\mathcal{N}$ ) in zwei annähernd gleich große Teilgesamtheiten teilt und an den Teilchen der einen Teilgesamtheit eine Ortsmessung, an den Teilchen der anderen Teilgesamtheit eine Impulsmessung durchführt. Eine andere Möglichkeit ist, dass man überhaupt nur ein Teilchen verwendet, dieses aber vor jeder Messung derselben Präparationsprozedur unterwirft, und einmal den Ort, einmal den Impuls usf. misst, bis eine aussagekräftige Statistik erreicht ist. Ermittelt man dann aus den erhaltenen Häufigkeitsverteilungen für Teilchenort und Teilchenimpuls rein rechnerisch die zugehörigen Standardabweichungen und multipliziert man diese aus, so ergibt sich für das Produkt ein Wert, der die Unbestimmtheitsbeziehung erfüllt.

Die Unbestimmtheitsbeziehung (4.354) drückt aus, dass es keine Gesamtheit gleich präparierter Teilchen geben kann, in der die Observablen Teilchenort und Teilchen-

<sup>81</sup>Es wäre deshalb besser, die Unbestimmtheitsbeziehung als *Satz über die statistischen Streuungen* zu bezeichnen.

impuls zugleich beliebig wenig um den jeweiligen Mittelwert streuen. Es gibt (falls die Quantenmechanik richtig ist) keine Möglichkeit, Apparate zu bauen, welche zu einem Anfangszeitpunkt  $t_0$  eine Gesamtheit von Teilchen präparieren, in der die Observablen Teilchenort und Teilchenimpuls zugleich beliebig wenig um die Mittelwerte streuen. Ändert man die Präparation Schritt für Schritt so ab, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $W(x, t_0) = |\psi(x, t_0)|^2$  schmaler und schmaler wird, so hat dies (zumindest ab einem bestimmten Punkt) zur Folge, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $W(p, t_0) = |\hat{\psi}(p, t_0)|^2$  breiter und breiter wird.<sup>82</sup> Ferner kann sich auch durch die quantenmechanische „Dynamik“ aus einer zu einem Anfangszeitpunkt  $t_0$  hergestellten Gesamtheit für  $t > t_0$  keine Gesamtheit „entwickeln“, für die Teilchenort und Teilchenimpuls zugleich beliebig wenig streuen.

Es liegt die Frage nahe, für welche mathematische Form der Zustandsfunktion in der Beziehung (4.354) das Gleichheitszeichen gilt. Eine Bedingung ist, dass in der schwarzschen Ungleichung das Gleichheitszeichen zutrifft, was bedeutet, dass die Vektoren  $u = \widehat{\delta x} \psi$ ,  $v = \widehat{\delta p} \psi$  proportional sein müssen. Eine weitere Bedingung ist  $\langle \psi, \hat{D} \psi \rangle = \langle \psi, (\widehat{\delta x} \widehat{\delta p} + \widehat{\delta p} \widehat{\delta x}) \psi \rangle = 0$ . Aus diesen Bedingungen folgt für die Zustandsfunktion<sup>83</sup>

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi} \delta_0}} \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{4\delta_0^2} + \frac{i}{\hbar} p_0 x + i\gamma \right], \quad (4.355)$$

$$x_0, p_0 \in \mathbb{R}, \quad \gamma \in [0, 2\pi), \quad \delta_0 \in \mathbb{R}^+.$$

Dies ist allgemeinste Form einer **Minimum-Unschärfenprodukt-Zustandsfunktion**. Die Parameter  $x_0$ ,  $p_0$ ,  $\delta_0$  und  $\gamma$  können dabei zeitabhängig sein, womit dann auch die Zustandsfunktion zeitabhängig ist.

Die Zustandsfunktion  $\psi(x, t)$  Gl. (4.253) ist eine *spezielle* derartige Funktion. Auch die Grundzustandsfunktion  $u_0(x)$  des linearen harmonischen Oszillators Gl. (4.236) ist von diesem Typ. Dagegen besitzen die Eigenfunktionen  $u_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , der „Anregungszustände“ des linearen harmonischen Oszillators (s. Gl. (4.177)) *nicht* die Form von Gl. (4.355). Berechnet man  $\Delta x$ ,  $\Delta p$  für die Energieeigenzustände  $u_n(x)$ , so findet man  $\Delta x \cdot \Delta p = (2n + 1) \frac{\hbar}{2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Die Unbestimmtheitsbeziehung Gl. (4.354) ist jene mathematisch präzise Aussage, die in der fertigen Theorie das heuristische Unbestimmtheitsprinzip ablöst. In ihr findet die Nichtverträglichkeit von Teilchenort und Teilchenimpuls ihren quantitativen Ausdruck. Für **Systeme mit  $N$  Teilchen in drei Raumdimensionen** hat man für die fundamentalen Observablen die Vertauschungsbeziehungen (4.211), und es gelten daher die Unbestimmtheitsbeziehungen

$$\Delta x_{aj} \cdot \Delta p_{aj} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad a = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.356)$$

<sup>82</sup>Mathematisch ist dies durch die Eigenschaften des Fourierintegrals gewährleistet.

<sup>83</sup>Siehe dazu z. B. Schwabl, F.: Quantenmechanik. Springer-Verlag, Berlin und Heidelberg 2007.

Sind die Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$  vertauschbar, d. h. gilt  $\hat{K} = \hat{0}$ , so lautet die Unbestimmtheitsbeziehung (4.346)  $\Delta a \cdot \Delta b = 0$ , liefert also *keine Einschränkung* für das Produkt der Unbestimmtheiten. Vertauschbare Operatoren besitzen ein vollständiges System gemeinsamer Eigenvektoren. Da die Unbestimmtheit in einem Eigenzustand zu einem diskreten Eigenwert nach dem Satz von Seite 303 null ist, kann man daher folgendes sagen: Besitzen die Observablen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  beide ein rein diskretes Messwertspektrum, so gibt es ein *vollständiges System* von Vektoren  $\psi$ , nämlich die gemeinsamen Eigenvektoren der Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$ , für die  $\Delta a = 0$  und  $\Delta b = 0$  gilt.<sup>84</sup> Eine beliebige Gesamtheit lässt sich dann stets nach Messwertpaaren des Satzes  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  verträglicher Observablen filtern. Dies bedeutet, dass man Gesamtheiten präparieren kann, die in Bezug auf beide Größen streuungsfrei sind, wobei man am Präparationsapparat einstellen kann, welches Eigenwertpaar die Systeme als Werte der Größen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  „besitzen“ sollen.

Sind die Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$  nicht vertauschbar, d. h. gilt  $\hat{K} \neq \hat{0}$ , so sind die zugehörigen Observablen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  nicht verträglich. Ist der Operator  $\hat{K}$  proportional zum Einheitsoperator, so liefert die Unbestimmtheitsbeziehung (4.346) für das Produkt der Unbestimmtheiten eine feste positive untere Schranke mit allen Konsequenzen wie wir sie bei Teilchenort und Teilchenimpuls besprochen haben. Die Eigenwertspektren von  $\hat{A}, \hat{B}$  sind dann rein kontinuierlich, und es gibt *keinen einzigen* gemeinsamen Eigenvektor<sup>85</sup> von  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  und daher auch keinen Zustand  $\psi$ , in dem  $\Delta a$  und  $\Delta b$  beliebig klein sein können. Ist der Operator  $\hat{K}$  vom Nulloperator verschieden, aber nicht proportional zu  $\hat{1}$ , so kann es sein, dass es einen oder mehrere (unter Umständen sogar unendlich viele<sup>86</sup>) gemeinsame Eigenvektoren von  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  gibt. Für einen gemeinsamen Eigenvektor von  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  zu einem diskreten Eigenwertpaar gilt dann wieder  $\Delta a = 0$  und  $\Delta b = 0$ . Dies steht nicht im Widerspruch zur Ungleichung (4.346), da für einen solchen Zustand  $\langle \psi, \hat{K} \psi \rangle = 0$  gilt. Falls es überhaupt gemeinsame Eigenvektoren von  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  gibt, so bilden diese im Zustandsraum aber jedenfalls *kein* vollständiges System.

Ein Beispiel dazu sind die Bahndrehimpulskomponenten eines Teilchens in drei Raumdimensionen. Aus der Vertauschungsbeziehung für die Operatoren  $\hat{l}_x, \hat{l}_y$  Gl. (4.190) folgt die Unbestimmtheitsbeziehung ( $\hat{K} = \hbar \hat{l}_z$  repräsentiert in diesem Fall eine Observable)

$$\Delta l_x \cdot \Delta l_y \geq \frac{\hbar |\langle \hat{l}_z \rangle|}{2}. \quad (4.357)$$

Im Zustandsraum  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$  gibt es unendlich viele gemeinsame Eigenfunktionen von  $\hat{l}_x, \hat{l}_y$  und  $\hat{l}_z$  zum Eigenwerttripel  $\{0, 0, 0\}$ , und für diese gilt  $\Delta l_x = \Delta l_y = \langle \hat{l}_z \rangle = 0$ . (Da die Operatoren der Bahndrehimpulskomponenten nur auf die Polarwinkel  $\vartheta, \varphi$  wirken<sup>87</sup>, ist jede nur von  $r$  abhängige Funktion aus  $L^2(\mathbb{R}^3)$  gemeinsame Eigenfunktion von  $\hat{l}_x, \hat{l}_y$  und  $\hat{l}_z$  zum Eigenwerttripel  $\{0, 0, 0\}$ .) Wie das Beispiel zeigt, ist die in einigen Lehrbüchern aufgestellte Behauptung, dass

<sup>84</sup>Bei kontinuierlichen Spektren kann man aus den zugehörigen gemeinsamen uneigentlichen Eigenvektoren durch Linearkombination „Wellenpakete“ bilden, für die  $\Delta a$  und  $\Delta b$  beliebig klein sind.

<sup>85</sup>Für die Operatoren  $\hat{x}$  und  $\hat{p}$  haben wir dies in Abschnitt 4.7 explizit gesehen.

<sup>86</sup>Siehe das folgende Beispiel.

<sup>87</sup>Dies sieht man, wenn man in den Beziehungen für die Operatoren  $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$  von Seite 281 zu Kugelkoordinaten übergeht. Beispielsweise gilt  $\hat{l}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ .

nicht vertauschbare selbstadjungierte Operatoren keine gemeinsamen Eigenvektoren besitzen können, falsch.

## 4.15 Vollständige Sätze verträglicher Observablen. Vollständige Präparationen

Von einem Präparationsapparat möchte man haben, dass man ihn verschieden einstellen kann, wie dies auf Seite 292 für einen Satz mit einer einzigen Observablen und im letzten Absatz von Abschnitt 4.13 für einen Satz von zwei verträglichen Observablen beschrieben wurde. Wir befassen uns deshalb in diesem Abschnitt nur mit Sätzen verträglicher Observablen, die wir als *vollständig „an sich“* (d. h. im engeren Sinn) bezeichnet haben.

Der Observablensatz  $\{\mathfrak{A}\}$  heißt *vollständig*, wenn die „normierten“ Eigenvektoren von  $\hat{A}$  eine bis auf unimodulare Faktoren eindeutig bestimmte „orthonormierte“ Basis von  $\mathcal{H}$  bilden. Das Spektrum von  $\mathfrak{A}$  kann dabei von beliebigem Typ sein. Ein Observablensatz  $\{\mathfrak{A}\}$  ist genau dann vollständig, wenn *alle* Eigenwerte von  $\hat{A}$  einfach sind. Ist  $\mathfrak{A}$  etwa vom Typ (d) Abb. 4.1, so muss  $g_n = 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , und  $g(a) = 1$ ,  $a \in [a, +\infty)$  gelten.

Ist  $\{\mathfrak{A}\}$  *nicht* vollständig, so kann man eine von  $\mathfrak{A}$  unabhängige, mit  $\mathfrak{A}$  verträgliche Observable  $\mathfrak{B}$  hinzunehmen. Unabhängigkeit heißt, dass  $\hat{B}$  nicht als Operatorfunktion von  $\hat{A}$  geschrieben werden kann, Verträglichkeit heißt, dass  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{O}$  gilt.

Der Observablensatz  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  wird dann als *vollständiger Satz unabhängiger verträglicher Observablen* bezeichnet, wenn die „normierten“ gemeinsamen Eigenvektoren von  $\hat{A}, \hat{B}$  eine bis auf unimodulare Faktoren eindeutig bestimmte „orthonormierte“ Basis von  $\mathcal{H}$  bilden. Dies ist der Fall, wenn zu jedem Eigenwertpaar (gleichgültig, ob die Eigenwerte diskret oder kontinuierlich sind) nur *ein* linear unabhängiger (eigentlicher oder uneigentlicher) gemeinsamer Eigenvektor gehört. Bei rein diskreten Spektren  $\sigma(\hat{A}) = \{a_1, a_2, \dots\}$ ,  $\sigma(\hat{B}) = \{b_1, b_2, \dots\}$  bedeutet dies  $g_{nm} = 1$ , d. h.  $\mathcal{H}(a_n, b_m)$  eindimensional, für alle  $(n, m) \in \mathbb{I}(\hat{A}, \hat{B})$ .

Ist  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  *nicht* vollständig, so kann man eine von  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  unabhängige, mit  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  verträgliche Observable  $\mathfrak{C}$  hinzunehmen. Unabhängigkeit von  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  heißt, dass  $\hat{C}$  nicht als Operatorfunktion  $F(\hat{A}, \hat{B})$  geschrieben werden kann, Verträglichkeit mit  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  bedeutet, dass  $[\hat{A}, \hat{C}] = \hat{O}$ ,  $[\hat{B}, \hat{C}] = \hat{O}$  gilt.

Bilden die „normierten“ gemeinsamen Eigenvektoren von  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  eine bis auf unimodulare Faktoren eindeutig bestimmte „orthonormierte“ Basis von  $\mathcal{H}$ , so ist der Observablensatz  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}$  ein *vollständiger Satz unabhängiger paarweise verträglicher Observablen*, gibt es hingegen noch Eigenwerttripel von  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ , zu denen mehrere linear unabhängige (eigentliche oder uneigentliche) gemeinsame Eigenvektoren gehören, so ist der Satz  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}$  *nicht* vollständig usf.

Es gilt der folgende wichtige Satz:

**Satz**

Besitzt ein System  $f$  Freiheitsgrade, so gibt es vollständige Sätze unabhängiger paarweise verträglicher Observablen mit  $f$  Observablen:  $\{\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)}, \dots, \mathfrak{A}^{(f)}\}$  bzw.  $\{\mathfrak{B}^{(1)}, \mathfrak{B}^{(2)}, \dots, \mathfrak{B}^{(f)}\}$  usf. Umgekehrt muss aber ein Satz von  $f$  unabhängigen paarweise verträglichen Observablen nicht unbedingt vollständig sein.

Beispiele:

1) Systeme mit einem spinlosen Teilchen in einer Raumdimension

Für diese Systeme gilt  $f = 1$ . Während der Satz  $\{\mathfrak{p}\}$  ( $\mathfrak{p}$  Teilchenimpuls) vollständig ist (s. Gl. (4.154)), ist der Satz  $\{\mathcal{T}\}$  ( $\mathcal{T}$  kinetische Energie) *nicht* vollständig (s. Gl. (4.170)).

2) Wasserstoffatom ohne Berücksichtigung des Elektronenspins<sup>88</sup>

Für dieses System gilt  $f = 3$ . Der Satz  $\{\mathfrak{H}\}$  ist *nicht* vollständig, da  $g_n = n^2$  für  $n = 2, 3, \dots$  größer als eins ist. Nehmen wir zur Observablen  $\mathfrak{H}$  die von ihr unabhängige und mit ihr verträgliche Observable  $\mathfrak{I}^2$  (Quadrat des Bahndrehimpulses) hinzu, deren Operator durch  $\hat{\mathbf{I}}^2$  gegeben ist, so gelten die Eigenwertgleichungen

$$\hat{H}u_{nlm_l} = E_n u_{nlm_l}, \quad (4.358)$$

$$\hat{\mathbf{I}}^2 u_{nlm_l} = l(l+1)\hbar^2 u_{nlm_l} \quad (4.359)$$

mit

$$n = 1, 2, 3, \dots; \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad m_l = -l, -l+1, \dots, +l. \quad (4.360)$$

(Die Lösung wurde dabei nur für den diskreten Teil des Energiespektrums angeschrieben, nicht aber für das Kontinuum bei  $E > 0$ .)

Der Satz  $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{I}^2\}$  ist *nicht* vollständig, da  $g_{nl} = 2l+1$  für  $l = 1, 2, \dots$  größer als eins ist. Nehmen wir zusätzlich die von  $\mathfrak{H}, \mathfrak{I}^2$  unabhängige, mit  $\mathfrak{H}, \mathfrak{I}^2$  verträgliche Observable  $\mathfrak{I}_z$  ( $z$ -Komponente des Bahndrehimpulses) hinzu, deren Operator durch  $\hat{I}_z$  gegeben ist. Dann gilt zusätzlich zu den Gleichungen (4.358) und (4.359) die Eigenwertgleichung

$$\hat{I}_z u_{nlm_l} = m_l \hbar u_{nlm_l}. \quad (4.361)$$

Der Satz  $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{I}^2, \mathfrak{I}_z\}$  ist *vollständig*, da für alle  $(n, l, m_l)$  aus der durch Gl. (4.360) definierten Indextripelmengemenge  $g_{nlm_l} = 1$  gilt. (Zum kompletten Beweis der Vollständigkeit dieses Observablensatzes gehört allerdings, dass auch für das Energiekontinuum bei  $E > 0$  gezeigt wird, dass die Vielfachheiten  $g_{Elm_l}$  für alle  $E, l, m_l$  eins sind.)

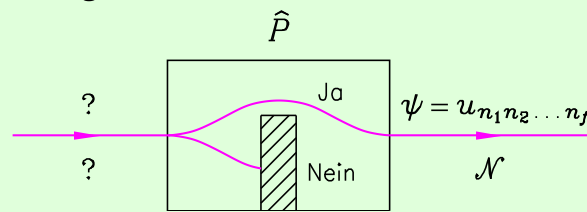
**Vollständige Präparation**

Es sei  $\{\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)}, \dots, \mathfrak{A}^{(f)}\}$  ein *vollständiger Satz unabhängiger paarweise verträglicher Observablen*. Zu den zugehörigen möglichen Messwert- $f$ -tupeln sollen *diskrete* Messwert- $f$ -tupel gehören. Ferner sei  $\mathbb{I}(\hat{A}^{(1)}, \hat{A}^{(2)}, \dots, \hat{A}^{(f)}) \equiv \mathbb{I}$  die zu den diskreten Messwert- $f$ -tupeln gehörige Menge von Index- $f$ -

<sup>88</sup>Siehe dazu Seite 282.

tupeln und  $u_{n_1 n_2 \dots n_f}$  der (bis auf einen unimodularen Faktor eindeutig bestimmte) auf eins normierte gemeinsame Eigenvektor von  $\hat{A}^{(1)}, \hat{A}^{(2)}, \dots, \hat{A}^{(f)}$  zu einem diskreten Messwert- $f$ -tupel  $(a_{n_1}^{(1)}, a_{n_2}^{(2)}, \dots, a_{n_f}^{(f)})$ ,  $(n_1, n_2, \dots, n_f) \in \mathbb{I}$ .  
*Filterung* einer beliebigen Gesamtheit nach Messwert- $f$ -tupeln bezüglich des Observablensatzes  $\{\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)}, \dots, \mathfrak{A}^{(f)}\}$  und *Selektion* der Systeme zu einem diskreten Messwert- $f$ -tupel  $(a_{n_1}^{(1)}, a_{n_2}^{(2)}, \dots, a_{n_f}^{(f)})$  liefert dann eine reine Gesamtheit mit dem Zustandsvektor  $u_{n_1 n_2 \dots n_f}$ .

Symbolisch dargestellt:



$\{\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)}, \dots, \mathfrak{A}^{(f)}\}$ : Messwertsatz  $(a_{n_1}^{(1)}, a_{n_2}^{(2)}, \dots, a_{n_f}^{(f)})$ ?  
 $[n_1, n_2, \dots, n_f \text{ fest}, (n_1, n_2, \dots, n_f) \in \mathbb{I}]$

Präparation = Filterung + Selektion

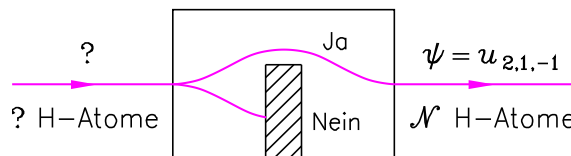
Die Bestimmung von  $\mathcal{N}$  (und Überprüfung, ob  $\mathcal{N} \neq 0$  ist) erfolgt durch einen „Vorversuch“ mit Zählung.

*Bemerkung:*

Hat man einen vollständigen Satz verträglicher Observablen, gibt es jedoch keine zugehörigen *diskreten* Messwertsätze (d. h. Messwertsätze, bei denen *alle*  $f$  Eigenwerte diskret sind), so kann man mithilfe eines solchen Observablensatzes keine vollständige Präparation durchführen.

Beispiel: Wasserstoffatom ohne Berücksichtigung des Elektronenspins

Symbolische Darstellung der Präparation:



$\{\mathfrak{H}, \mathfrak{L}^2, \mathfrak{L}_z\}$ : Messwerttripel  $(E_2 = -me^4/8\hbar^2, 2\hbar^2, -\hbar)$ ?

Die Zustandsfunktion der auf diese Weise präparierten Gesamtheit von Wasserstoffatomen ist gemäß Gl. (4.197) unmittelbar nach der Präparation durch

$$\psi(\mathbf{r}) = u_{2,1,-1}(\mathbf{r}) = R_{21}(r) Y_{1,-1}(\vartheta, \varphi) \quad (4.362)$$

gegeben. Setzt man die Radialfunktion und die Kugelflächenfunktion ein, so erhält man

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4a\sqrt{a\pi}} \frac{r}{2a} e^{-r/2a} \sin \vartheta e^{-i\varphi}, \quad a := \frac{\hbar^2}{me^2}. \quad (4.363)$$

Siehe dazu die Aufgabe Q25.

## 4.16 Problemstellung in der klassischen Mechanik und in der Quantenmechanik

Wir haben die Grundgesetze und Korrespondenzregeln systematisch auf ein einfaches System, den linearen harmonischen Oszillator, angewendet. Insbesondere haben wir anhand dieses Systems die Konzepte der Präparation, Umpräparation und Messung sowie die zeitliche Entwicklung und den quasiklassischen Grenzfall illustriert. Die Anfangsbedingungen wurden dabei so gewählt, dass sich alle auftretenden Integrale und unendlichen Summen berechnen lassen. Zweifellos kann ein solches Beispiel einen nützlichen Beitrag zum Verständnis der Rechenmethoden und Interpretation der Theorie leisten. Es kann aber der Eindruck entstehen, dass die praktisch bedeutungsvollen Fragestellungen in der Quantenmechanik im Prinzip gleich sind wie in der klassischen Mechanik, lediglich an die Stelle streng deterministischer Aussagen Wahrscheinlichkeitsaussagen über Einzelsysteme treten (wobei die Wahrscheinlichkeit als Absolutquadrat einer komplexen Amplitude zu berechnen ist, was die Möglichkeit der Interferenz eröffnet). Dies trifft aber nicht zu, da die experimentellen Methoden, mit deren Hilfe man sich Informationen über Mikrosysteme verschaffen kann, viel indirekter sind.

Bleiben wir der Einfachheit halber beim Beispiel des linearen harmonischen Oszillators. In der *klassischen Mechanik* spielt dabei die *Dynamik* die überragende Rolle. Praktisch bedeutungsvolle Fragen sind: Wodurch sind  $x(t)$ ,  $p(t)$  für gegebenes  $x(t_0)$ ,  $p(t_0)$  gegeben? Wie ändert sich das Bewegungsgesetz, wenn Dämpfung vorhanden ist? Wie ändert sich das Bewegungsgesetz, wenn Anharmonizität (mathematisch beschrieben durch ein „Störpotential“  $W(x) = \lambda x^3 + \mu x^4$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^+$ ) vorhanden ist? – Wird der lineare harmonische Oszillator in der *Quantenmechanik* für die Beschreibung der Schwingungen eines zweiatomigen Moleküls verwendet, so spielt im Zusammenhang mit den Messungen an derartigen Molekülen die Zeitabhängigkeit („Dynamik“) nur eine *untergeordnete Rolle*. Was man in erster Linie berechnen muss, ist das Linienspektrum der von Molekülen emittierten elektromagnetischen Strahlung, d. h. die *Frequenzen* und *Intensitäten* der auftretenden Spektrallinien. Ein Teil des Linienspektrums kann als Schwingungsspektrum interpretiert werden, und die betreffenden Kreisfrequenzen, welche im Infrarotbereich liegen, ergeben sich gemäß  $\omega_{nn'} = (E_n - E_{n'})/\hbar$ ,  $n > n'$ , aus den Energieeigenwerten des zur Beschreibung der Molekülschwingungen verwendeten Oszillators. Man interessiert sich also für das Eigenwertproblem von  $\hat{H}$ , d. h. für die Lösung



der *zeitunabhängigen* Schrödingergleichung. Muss man zur quantitativen Beschreibung des Schwingungsspektrums eine gewisse Anharmonizität berücksichtigen, so muss man mittels Störungstheorie näherungsweise die Energieeigenwerte  $E_n$  des „gestörten“ Hamiltonoperators berechnen, der gegenüber Gl. (4.174) noch den zusätzlichen Term  $W(\hat{x}) = \lambda \hat{x}^3 + \mu \hat{x}^4$  enthält.<sup>89</sup> Die Intensitäten der Spektrallinien sind allgemein proportional zu den *Übergangswahrscheinlichkeiten* zwischen stationären Zuständen verschiedener Energie zufolge der Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Strahlungsfeld. Für die Ableitung der Formel für derartige Übergangswahrscheinlichkeiten benötigt man zwar die *zeitabhängige* Schrödingergleichung, bei konkreten Beispielen setzt man aber nur mehr in diese Formel ein.

---

<sup>89</sup>Die Energieeigenwerte sind dann nicht mehr äquidistant. Siehe z. B. Aufgabe 5.3 von Grau, D.: Übungsaufgaben zur Quantentheorie, <http://www.dietrich-grau.at/>



## Aufgaben zur Quantenmechanik

### Q1

(a) Verifiziere, dass das durch Gl. (4.68) definierte innere Produkt  $\langle f, g \rangle$  die folgenden vom inneren Produkt in einem unitären Raum verlangten Eigenschaften besitzt:

$$(i1) \quad \langle f, f \rangle > 0, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad f \neq \theta$$

$$(i2) \quad \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$$

$$(i3) \quad \langle f, \alpha g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$(i4) \quad \langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$$

(b) Zeige, dass aus (i1) bis (i4) unmittelbar

$$\langle f + \varphi, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle \varphi, g \rangle$$

$$\langle \beta f, g \rangle = \beta^* \langle f, g \rangle, \quad \beta \in \mathbb{C}$$

folgt.

**Q2** Zeige, dass der auf Seite 251 in Tabelle 4.1 definierte Impulsoperator  $\hat{p}$  im Hilbertraum  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  selbstadjungiert ist, d. h. die Eigenschaft (4.87) besitzt.

Anleitung: Beachte, dass jede stetig differenzierbare und absolut quadratisch integrierbare Funktion im Unendlichen einen Grenzwert besitzt, und dieser Grenzwert null ist.

**Q3** Zeige, dass ein Projektionsoperator  $\hat{P}$  nur die Eigenwerte 1, 0 besitzen kann.

**Q4** Beweise: Sind  $\hat{Q}$  und  $\hat{R}$  Projektionsoperatoren mit der Eigenschaft  $\hat{Q}\hat{R} = \hat{0}$  (so genannte orthogonale Projektionsoperatoren, d. h. Projektionsoperatoren zu orthogonalen Teilräumen), so ist auch  $\hat{P} = \hat{Q} + \hat{R}$  Projektionsoperator.

**Q5** In einem dreidimensionalen reellen Vektorraum sei ein symmetrischer<sup>90</sup> Operator  $\hat{A}$  definiert.

Fall 1: Der Operator  $\hat{A}$  besitze drei nicht entartete Eigenwerte  $a_1, a_2, a_3$ .

Fall 2: Der Operator  $\hat{A}$  besitze einen zweifachen Eigenwert,  $a_1$ , und einen einfachen Eigenwert,  $a_2$ .

Stelle in jedem der beiden Fälle anschaulich dar:

<sup>90</sup>Der Begriff des symmetrischen Operators stellt beim reellen Vektorraum das Analogon zum selbstadjungierten Operator beim komplexen Vektorraum dar.

- (a) die auf eins normierten orthogonalen Eigenvektoren,
- (b) die Komponentenzerlegung eines beliebigen vorgegebenen Vektors  $f$  im betreffenden Eigenvektorsystem,
- (c) die Eigenräume  $\mathcal{H}(a_n)$  zu den Eigenwerten  $a_n$ ,
- (d) die Wirkung der zu diesen Eigenräumen gehörigen Projektionsoperatoren  $\hat{P}_n$  auf den Vektor  $f$  und
- (e) den Inhalt der Beziehung

$$\text{Fall 1: } f = \sum_{n=1}^3 \hat{P}_n f; \quad \text{Fall 2: } f = \sum_{n=1}^2 \hat{P}_n f.$$

**Q6** Verifiziere, dass das Einsetzen der Spektralform (4.141) in die Lösung des Eigenwertproblems Gl. (4.114), (4.115) eine Identität ergibt.

**Q7** Beweise die kanonische Vertauschungsbeziehung (4.148).

**Q8** Spezialisiere den allgemeinen Entwicklungssatz von Gl. (4.120) auf den Fall der in Gl. (4.172) angeschriebenen (gemäß Gl. (4.173) „normierten“) Eigenfunktionen des Operators der kinetischen Energie eines Teilchens in einer Raumdimension.

**Q9** Beweise mithilfe der fundamentalen Vertauschungsbeziehungen (4.188) die Bahndrehimpuls-Vertauschungsbeziehungen (4.190) und die Vertauschungsbeziehung (4.191). Beweise ferner, dass der Hamiltonoperator (4.193) mit den Operatoren  $\hat{l}_j$ ,  $j=1,2,3$ , „vertauschbar“ ist.

**Q10** Schreibe die Wirkung des Hamiltonoperators (4.206) auf ein Element des Hilbertraumes  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$  in ausführlicher Form an.

**Q11** Berechne die Fouriertransformierte der Zustandsfunktion  $\psi(x)$  Gl. (4.92).

**Q12** Berechne die Entwicklungskoeffizienten  $c_n$  von Gl. (4.227).

Anleitung: Setze in

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\sqrt{2^n n! \pi}} \int_{\mathbb{R}} d\xi \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\xi - \alpha a)^2 + \xi^2]\right\} H_n(\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n n! \pi}} \exp\left[-\frac{\alpha^2 a^2}{4}\right] \int_{\mathbb{R}} d\xi \exp\left\{-\left[\xi - \frac{\alpha a}{2}\right]^2\right\} H_n(\xi) \end{aligned}$$

für  $H_n(\xi)$  die Differentialdarstellung

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ein und integriere  $n$ -mal partiell.

**Q13** Berechne die Wahrscheinlichkeiten  $W_0$ ,  $W_1$  und  $W_2$  von Gl. (4.229)

- (a) für den Fall  $\alpha a = 1$ ;
- (b) für den Fall  $\alpha a = 10^3$ .

**Q14** Zeige durch Ableiten von  $i\hbar \langle \psi_t, \psi_t \rangle$  nach der Zeit, dass die Norm einer beliebigen Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung zeitunabhängig ist.

**Q15** Schreibe für die Experimente von Seite 296 folgende Beziehungen an:

Experiment 1:

- (a) das 5. Grundgesetz (Schrödingergleichung und Anfangsbedingung) für die Berechnung von  $\psi_{t_1}$ ;
- (b) das 3. Grundgesetz für die Berechnung der Zählraten  $\mathcal{N}_n(t_1)$ .

Experiment 2:

- (a) das 5. Grundgesetz (Schrödingergleichung und Anfangsbedingung) für die Berechnung von  $\psi_\tau$ ;
- (b) das 4. Grundgesetz für die Umpräparation  $\psi_\tau \rightarrow \psi'_\tau$ ;
- (c) das 3. Grundgesetz für die Berechnung von  $\mathcal{N}'$  aus  $\mathcal{N}$ ;
- (d) das 5. Grundgesetz (Schrödingergleichung und Anfangsbedingung) für die Berechnung von  $\psi'_{t_1}$ ;
- (e) das 3. Grundgesetz für die Berechnung der Zählraten  $\mathcal{N}'_n(t_1)$ .

**Q16** Führe mithilfe der erzeugenden Funktion der Hermitepolynome die unendliche Summation in Gl. (4.252) durch.

Hinweis: Die erzeugende Funktion der Hermitepolynome ist durch

$$F(\xi, s) := \exp[-s^2 + 2\xi s] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!} s^n$$

gegeben.

**Q17** Berechne die Fouriertransformierte der Zustandsfunktion  $\psi(x, t)$  Gl. (4.253).

**Q18** Auf welche Weise, d. h. durch welchen Apparat, muss eine Gesamtheit von linearen harmonischen Oszillatoren zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  präpariert werden, damit

$$\psi(x, t) = u_n(x) e^{-(i/\hbar)E_n t}$$

die Zustandsfunktion der Gesamtheit für  $t > 0$  darstellt?

**Q19** Durch Filterung bezüglich der Energie und Selektion der Systeme mit dem Messwert  $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$  wird zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  eine Gesamtheit von linearen harmonischen Oszillatoren präpariert.

- (a) Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei einer Ortsmessung an einem einzelnen Oszillator zum Zeitpunkt  $t > 0$  einen Messwert  $x$  außerhalb der klassischen Umkehrpunkte findet?
- (b) Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei einer Impulsmessung an einem einzelnen Oszillator zum Zeitpunkt  $t > 0$  irgendeinen Messwert  $p > 0$  findet?

Anleitung zu (a): Verwende, dass die Fehlerfunktion

$$\Phi(\eta) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} d\xi e^{-\xi^2}$$

für  $\eta = 1$  bzw.  $\eta \rightarrow +\infty$  die Werte

$$\Phi(1) = 0,84270, \quad \Phi(+\infty) = 1$$

annimmt. Beachte auch die Anmerkung im Anschluss an Gl. (4.287).

Lösung:

- (a)  $W = 0,15730$ , d. h. es werden in der Gesamtheit rund 15,7 % der Oszillatoren mit „Elongationen“ außerhalb der klassischen Umkehrpunkte angetroffen.
- (b)  $W = \frac{1}{2}$

**Q20** Die Wahrscheinlichkeitsverteilung bezüglich der Energie sei für eine Gesamtheit von linearen harmonischen Oszillatoren durch Gl. (4.250) gegeben. Zeige unter Verwendung der Formeln (4.272) bis (4.276), dass mit  $\lambda = \alpha^2 a^2 / 2$  für die Momente  $\langle \hat{H} \rangle$ ,  $\langle \hat{H}^2 \rangle$  und  $(\Delta E)^2$  die folgenden Beziehungen gelten:

$$\langle \hat{H} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n W_n = \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0,$$

$$\langle \hat{H}^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^2 W_n = \left[ \lambda(\lambda + 1) + \lambda + \frac{1}{4} \right] (\hbar \omega_0)^2,$$

$$(\Delta E)^2 = \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2 = \left[ \lambda(\lambda + 1) + \lambda + \frac{1}{4} - \left( \lambda + \frac{1}{2} \right)^2 \right] (\hbar \omega_0)^2 = \lambda (\hbar \omega_0)^2.$$

Versuche das Ergebnis für  $\langle \hat{H} \rangle$  auch mithilfe der entsprechenden Zustandsfunktion  $\psi(x, t)$  Gl. (4.253) und der Formel

$$\langle \hat{H} \rangle = \langle \psi, \hat{H} \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx \psi^*(x, t) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 \right\} \psi(x, t)$$

zu erhalten.

**Q21** Berechne die Größen  $\Delta x$ ,  $v_{\max} := |\langle \hat{p} \rangle|_{\max}/m = \omega_0 a$ ,  $\Delta v := \Delta p/m$ ,  $\langle \hat{H} \rangle$  und  $\Delta E$  für das Oszillatorbeispiel von Seite 304 bis 307 für die Zahlenwerte  $m = 100 \text{ g}$ ,  $\omega_0 = 10 \text{ Hz}$  und  $a = 10 \text{ cm}$ , und zeige, dass für diese Werte die Bedingungen

$$2 \Delta x \ll a, \quad 2 \Delta v \ll v_{\max}, \quad 2 \Delta E \ll \langle \hat{H} \rangle$$

extrem gut erfüllt sind („linke“ Seiten jeweils um rund 15 Größenordnungen kleiner).

**Q22** Überlege wie man eine Gesamtheit präparieren muss, damit der Zustandsvektor unmittelbar nach der Präparation die Form (4.290) besitzt.

Anleitung: Unterscheide die Fälle  $g_n = 1$  und  $g_n > 1$ .

**Q23** Beweise Gl. (4.291) durch Einsetzen der Anfangsbedingung (4.290) in die allgemeine Lösung (4.247) der zeitabhängigen Schrödingergleichung.

Hinweis 1: Vor dem Einsetzen der Anfangsbedingung müssen die Summationsindizes in Gl. (4.247) in  $n'$ ,  $\nu'$  umbenannt werden.

Hinweis 2: Die Beziehung (4.247) hat zur Voraussetzung, dass der Hamiltonoperator ein rein diskretes Spektrum besitzt. Besitzt  $\hat{H}$  daneben ein kontinuierliches Spektrum, so kommt noch ein entsprechender Integralbeitrag hinzu. Da aber die in der Anfangsbedingung vorkommenden Eigenvektoren  $u_{n\nu}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, g_n$ , zu *allen* uneigentlichen Eigenvektoren orthogonal sind, kann man für den verlangten Beweis ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Beziehung (4.247) benutzen.

**Q24** Beweise: Sind  $\hat{Q}$  und  $\hat{R}$  Projektionsoperatoren mit der Eigenschaft  $\hat{R}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{R}$ , dann ist auch  $\hat{P} = \hat{R}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{R}$  Projektionsoperator.

**Q25** Verifiziere, dass die Funktion von Gl. (4.363) auf eins normiert ist, dass also

$$\langle \psi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r |\psi(\mathbf{r})|^2 = 1$$

gilt. Wie lautet die Zustandsfunktion einer Gesamtheit von Wasserstoffatomen zum Zeitpunkt  $t > 0$ , falls die Zustandsfunktion zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  durch  $\psi$  Gl. (4.363) gegeben ist?





# Sachverzeichnis zur Quantenmechanik

Sind bei einem Indexeintrag mehrere Skriptumstellen angeführt, so verweisen allfällige schräg gestellte Seitenzahlen auf die *wichtigsten* Stellen für den betreffenden Eintrag.

## A

- Antisymmetrisierungsprinzip für Systeme mit identischen Fermiteilchen 264
- Antreffwahrscheinlichkeit, Erhaltung 244
- Antreffwahrscheinlichkeitsdichte für ein Teilchen 230, 236, 244, 288, 299
- Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte *siehe* Antreffwahrscheinlichkeitsdichte

## B

- Bahndrehimpulsoperator 281
  - Vertauschungsbeziehungen der Komponenten 281
- Beugung von „Mikroobjekten“ in der klassischen Feldtheorie, klassischen Teilchentheorie und Quantentheorie 222–228
- Bewegungsgleichungen 295, 311
- bohmsches Führungsfeld für „Mikroobjekte“ 221–222, 225–227
- bohorsche Komplementarität 222
- bohrscher Dualismus 222
- bornsche Interpretation des Absolutquadrats der de Broglie-Schrödinger-Feldfunktion 230, 244, 254
  - Verallgemeinerung auf beliebige Observablen beliebiger Systeme 287
- Boseteilchen 264

## C

- Coulombpotential 220

## Coulombstreuung

- identischer Teilchen 220
- nichtidentischer Teilchen 220

## D

- de Broglie-Schrödinger-Materiefeldtheorie 228–230, 243
  - Dispersionsbeziehung für de Broglie-Materiewellen kräftefreier Materie 229
  - Energiedichte des Materiefeldes 250
  - Erhaltung der Masse 230, 243
  - Kontinuitätsgleichung 243
  - Materiedichte 243
  - Materiestromdichte 243
  - Materiewellen 229
  - Wellenpakete 229–232
    - Zerfließen kräftefreier 229–230
- de Broglie-Wellenlänge 227
- determinative Messungen *siehe* Messungen
- Differentialoperatoren 250, 261, 277
- Dispersionsbeziehung für de Broglie-Materiewellen kräftefreier Materie 229
- „Doppelnatur“ von Licht und Materie 220–222
- Dualismus *siehe* bohrscher Dualismus

## E

- ehrenfestsche Gleichungen 313–315
- Eigenwertproblem *siehe* selbstadjungierte Operatoren, Eigenwertproblem

Eigenwertspektrum *siehe* selbstadjungierte Operatoren, Spektrum  
Einstein-de Broglie-Beziehungen 229  
Energiedichte des de Broglie-Schrödinger-Materiefeldes 250  
Entartungsgrad *siehe* Vielfachheit  
Entartung von Eigenwerten 266  
Erhaltung  
  der Antreffwahrscheinlichkeit in der Quantenmechanik 244  
  der Masse in der de Broglie-Schrödinger-Materiefeldtheorie 230, 243  
  der Norm des Zustandsvektors 295  
Erhaltungsgrößen  
  in der klassischen Mechanik 242, 310  
  in der Quantenmechanik 310  
Erwartungswerte *siehe* Mittelwerte

## F

Führungsfeld *siehe* bohmsches Führungsfeld für „Mikroobjekte“  
Fermiteilchen 264  
fouriersches Integraltheorem 276  
fundamentale Observablen  
  für  $N$  spinlose Teilchen in drei Raumdimensionen 284  
  für ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in drei Raumdimensionen 283  
  für ein spinloses Teilchen in drei Raumdimensionen 281  
  für ein spinloses Teilchen in einer Raumdimension 275  
fundamentale Vertauschungsbeziehungen 275, 281, 283, 284

## G

Gaußverteilung 304  
gemischte Gesamtheiten 292  
Gesamtheit  
  gleich präparierter Systeme 259  
  streuungsfreie (bezüglich einer Observablen) 303  
Gesamtheiten  
  gemischte 292  
  reine 259

Präparation 291–292, 327–328, 334  
gleichzeitige Messung verträglicher Observablen *siehe* Messung eines Satzes verträglicher Observablen

## H

Hamiltonfunktion 252  
  eines klassischen anharmonischen Oszillators 315  
  eines klassischen Teilchens 241–242, 314  
  für die klassische Beschreibung der Relativbewegung beim Wasserstoffatom 282  
Hamiltonoperator 252, 295, 314  
  „plötzliche“ Änderung 293  
  Bedingungen dafür, dass die Mittelwerte aller Orts- und Impulskomponenten die klassischen Beziehungen erfüllen 316  
  des linearen harmonischen Oszillators 278  
  Eigenwertproblem *siehe* Schrödingergleichung, zeitunabhängige  
  für das Heliumatom ohne Berücksichtigung des Spins 284  
  für die „Relativbewegung“ des Wasserstoffatoms bei Berücksichtigung des Spin 284  
  für die „Relativbewegung“ des Wasserstoffatoms ohne Berücksichtigung des Spins 282  
  für einen linearen anharmonischen Oszillator 315  
hamiltonsche kanonische Bewegungsgleichungen  
  für einen klassischen anharmonischen Oszillator 315  
  für einen klassischen harmonischen Oszillator 242  
  für ein klassisches Teilchen 242, 313, 314  
hamiltonsche Mechanik eines klassischen Teilchens 241–242  
Heisenbergbild 295

heisenbergsche Unbestimmtheitsbeziehungen *siehe* Unbestimmtheitsbeziehungen

Hilberträume 256–259

lineare Operatoren 258

selbstadjungierte Operatoren 258

separable 257

Entwicklungssätze 258

vollständige Orthonormalsysteme 258

Zerlegung der Einheit 273

### I

idempotente Operatoren 271, 272, 285

identische Teilchen 263–265

Impulsoperator

für ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in drei Raumdimensionen 283

für ein spinloses Teilchen in drei Raumdimensionen 281

für ein spinloses Teilchen in einer Raumdimension 252, 275

„Orthonormierungsbeziehungen“ für die Eigenfunktionen 276

Eigenfunktionen 276

Eigenwertgleichung 276

Entwicklungssatz 276

Spektrum 276

Impulsoperatoren für  $N$  spinlose Teilchen in drei Raumdimensionen 284

inneres Produkt von Hilbertraum-Vektoren 256, 261–264

Integraloperatoren 277

Interpretationsfragen der Quantenmechanik 232–235

### K

kanonische Bewegungsgleichungen

*siehe* hamiltonsche kanonische Bewegungsgleichungen

kanonische Vertauschungsbeziehungen *siehe* fundamentale Vertauschungsbeziehungen

kohärenter Zustand eines linearen harmonischen Oszillators 305

Kommutator 275

Kommutatorbeziehungen *siehe*

Vertauschungsbeziehungen

Komplementarität *siehe* bohrsche Komplementarität

Kontinuitätsgleichung

in der de Broglie-Schrödinger-Materiefeldtheorie 243

in der Quantenmechanik 244

Kopenhagener Deutung der Quantentheorie 222

Korrespondenzprinzip in der Quantenmechanik 239, 241, 245, 307

Korrespondenzregeln 240–241, 259–260,

Wahl der Operatoren für die Beschreibung von Messgrößen 274–284

Wahl des Zustandsraumes 261–265

### L

lineare Operatoren 258

linearer anharmonischer Oszillator

Hamiltonoperator 315

linearer harmonischer Oszillator

Energieeigenfunktionen 255

Entwicklungssatz 279

Orthonormierungsbeziehungen 255, 279

Vollständigkeitsbeziehung 279

Energieeigenwerte 255

Hamiltonoperator 278, 279

kohärenter Zustand 305

### M

Materiefeldtheorie, klassische *siehe* de Broglie-Schrödinger-

Materiefeldtheorie

Materiewellen 229

Matrizenmechanik 261

Messung

einer Observablen 285

eines Satzes verträglicher Observablen 324

Messwertspektrum einer Observablen 266

Mittelwert

der Gesamtenergie eines Teilchens 249

der kinetischen Energie eines Teilchens  
248–249  
der potentiellen Energie eines Teilchens  
248  
des Teilchenimpulses 246  
des Teilchenortes 245  
einer allgemeinen Observablen  
287, 301–302  
„Bewegungsgleichung“ 311  
zeitliche Änderung 309  
Momente einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 300  
Mottstreuung *siehe* Coulombstreuung identischer Teilchen  
multiplikative Operatoren 250, 261

### N

nichtreproduzierbare Messungen  
*siehe* Messungen  
Norm eines Vektors in einem unitären Vektorraum 257, 261

### O

Observablen  
Beschreibung durch lineare selbstadjungierte Operatoren 250–251, 266  
fundamentale  
für ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in drei Raumdimensionen 283  
für ein spinloses Teilchen in drei Raumdimensionen 281  
für ein spinloses Teilchen in einer Raumdimension 275  
für  $N$  spinlose Teilchen in drei Raumdimensionen 284  
Mittelwerte 287, 301–302  
nicht verträgliche 330–332  
Unbestimmtheiten 303  
verträgliche 310, 322–324, 330–332  
vollständige Sätze 292, 328, 333–335  
Operatoren  
lineare 258  
selbstadjungierte 258  
Operatorfunktionen 276, 279–281, 284  
Ableitung nach den Argumenten  
311–313

Operatorgleichungen 251, 273  
Orthogonalisierungsverfahren,  
schmidtsches 269  
Ortsoperator  
für ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in drei Raumdimensionen 283  
für ein spinloses Teilchen in drei Raumdimensionen 281  
für ein spinloses Teilchen in einer Raumdimension 252, 275  
„Orthonormierungsbeziehungen“ für die Eigenfunktionen 275  
Eigenfunktionen 275  
Eigenwertgleichung 275  
Entwicklungssatz 276  
Spektrum 275  
Ortsoperatoren für  $N$  spinlose Teilchen in drei Raumdimensionen 284  
Oszillator *siehe* linearer harmonischer Oszillator *oder* linearer anharmonischer Oszillator

### P

Paulimatrizen 283  
„Pauliverbot“ *siehe* Antisymmetrisierungsprinzip  
Poissonverteilung 304  
poyntingsches Vektorfeld 226  
präparative Messungen *siehe* Umpräparationen  
Projektionsoperatoren  
Definition 271  
Orthogonalitätsbeziehungen 273, 320  
Projektion auf Eigenräume 272, 319–320  
Projektion auf eine direkte Summe von Eigenräumen 273  
Vollständigkeitsbeziehung 273, 320  
Zuordnung zu Mess- und Präparationsapparaten 274, 285, 290, 324, 326

### Q

Quantenkraft *siehe* bohmsches Führungsfeld für „Mikroobjekte“  
„quasiklassische Bewegung“ 306

„quasiklassischer Grenzfall“ beim linearen harmonischen Oszillator 307

## R

reine Gesamtheiten 259

Präparation 291–292, 327–328, 334

reproduzierbare Messungen *siehe* Umpräparationen

Rutherfordstreuung *siehe* Coulombstreuung nichtidentischer Teilchen

## S

schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren 269

Schrödingerbild 295

Schrödingergleichung

zeitabhängige 295, 308

für ein spinloses Teilchen in einer Raumdimension 244, 254, 296

für Systeme mit  $r$  räumlichen Freiheitsgraden 296

Lösung für einen gegebenen Anfangszustand 297–298

stationäre Lösungen 308–309

zeitunabhängige 254, 297

für den linearen harmonischen Oszillator 254

schwarzsche Ungleichung 329

selbstadjungierte Operatoren 258

Eigenwertproblem 266–270

Entwicklungssatz 270–271

Orthogonalität und Vollständigkeit des Eigenvektorsystems 270

Spektralform 274, 320

Spektrum 266–268

Separabilität eines unitären Vektorraumes 257

Spektralform eines selbstadjungierten Operators 274, 320

Spektrum eines selbstadjungierten Operators *siehe* selbstadjungierte Operatoren, Spektrum

Spin

„ganzzahliger“ 264

„halbzahliger“ 264

Paulimatrizen 283

Spinfreiheitsgrade 240, 287, 295

Spinoperator für ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen 283–284

Spinvariablen 241, 263–265

Vertauschungsbeziehungen 283

Standardabweichung vom Mittelwert *siehe* Unbestimmtheit

Standardinterpretation der Quantenmechanik 222, 235, 300

stationäre Zustände 294, 308–309

statistische Kausalität in der Quantenmechanik 236

Strahlungsfelder, elektromagnetische 337

Symmetrisierungsprinzip für Systeme mit identischen Boseteilchen 264

## U

Umpräparation

bezüglich einer Observablen 290

bezüglich eines Satzes verträglicher Observablen 326

Unbestimmtheit

Bedeutung 300, 329

einer allgemeinen Observablen 303

Unbestimmtheitsbeziehungen

für allgemeine Observablen 328–329, 332

für Teilchenorte und Teilchenimpulse 275, 305, 330–331

Minimumwellenpaket 305–306, 331

Unbestimmtheitsprinzip 239, 241, 245, 248, 259, 331

„uneigentliche“ Eigenvektoren 268, 272

unitäre Vektorräume 256–259

Norm 257

Vollständigkeit und Separabilität 257

Unschärfe *siehe* Unbestimmtheit

## V

„verborgene Parameter“ 221, 226–227, 236

vertauschbare selbstadjungierte

Operatoren

Entwicklungssatz 318

gemeinsames Eigenwertproblem 316–319

Orthogonalität und Vollständigkeit des  
gemeinsamen Eigenvektorsystems  
317  
Spektralformen 320  
Vertauschungsbeziehungen  
für die Komponenten des Bahndrehim-  
pulses eines Teilchens 281  
für die Komponenten des Spins eines  
Teilchens 283  
fundamentale 275, 281, 283, 284  
kanonische *siehe* fundamentale  
Vielfachheit von Eigenwerten 266  
vollständige Orthonormalsysteme 258  
vollständige Präparationen 259, 292,  
327–328, 334  
vollständige Sätze verträglicher Observablen  
292, 328, 333–335  
Vollständigkeit  
eines Orthonormalsystems in einem se-  
parablen Hilbertraum 258  
eines Satzes orthogonaler Projektions-  
operatoren 273  
eines unitären Vektorraumes 257

## W

Wahrscheinlichkeitsdichte für den Teilchen-  
impuls 248, 253, 288, 300  
Wasserstoffatom  
mit Berücksichtigung des Spins  
Hamiltonoperator 284  
ohne Berücksichtigung des Spins  
diskretes Spektrum 282  
Energieeigenfunktionen (gebundene  
Zustände) 282  
Hamiltonoperator 282  
„Wellenfunktion“ *siehe* Zustandsfunktion  
„Wellenmechanik“ 261  
Wellenpakete  
in der de Broglie-Schrödinger-  
Materiefeldtheorie 229–232  
Zerfließen kräftefreier 229–230  
in der Quantenmechanik 232, 245  
kohärenter Zustand eines linearen  
harmonischen Oszillators 305

„Minimumwellenpaket“ 305–306, 331  
Zerfließen kräftefreier 229–230

## Z

Zerlegung der Einheit eines Hilbert-  
raumes 273  
Zustandsbeschreibung 261  
Zustandsfunktion 244, 261  
„Entwicklung“ nach Impulseigen-  
funktionen 253  
„Entwicklung“ nach Ortseigen-  
funktionen 254  
Entwicklung nach Oszillator-Energie-  
eigenfunktionen 255, 299  
Fouriertransformation 247  
Zustandsbeschreibung 240–241  
Zustandsraum 261  
allgemeines Konstruktionsprinzip 265  
für Systeme mit  $N$  Teilchen in drei Raum-  
dimensionen  
spinlose Teilchen 264  
für Systeme mit  $N$  Teilchen in drei Raum-  
dimensionen 263–265  
Teilchen mit Spin 264  
für Systeme mit einem Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen  
in drei Raumdimensionen 263  
für Systeme mit einem Spin- $s$ -Teilchen  
in drei Raumdimensionen 263  
für Systeme mit einem spinlosen Teil-  
chen in drei Raumdimensionen 262  
für Systeme mit einem spinlosen Teil-  
chen in einer Raumdimension 261  
„Zustandsreduktionen“ *siehe* Umpräparatio-  
nen  
Zustandsvektor 261  
Änderung durch Umpräparation  
290–292, 326–328  
als Ergebnis einer vollständigen Präpa-  
ration 334  
Berechnung von Wahrscheinlichkeiten  
285, 324  
einer Gesamtheit, die bezüglich einer  
Observablen streuungsfrei ist 303  
eines stationären Zustandes 308–309  
zeitliche Änderung 295

**Teil III**  
**Anhänge**





## Literaturverzeichnis

Literatur zu speziellen Fragestellungen sowie Literatur zur Horizonterweiterung ist im Skriptum in Fußnoten angegeben. Dabei wurde auch nicht davor zurückgeschreckt, teilweise sehr anspruchsvolle Bücher und Zeitschriftenartikel zu zitieren.

Hier sind ausschließlich Lehrbücher angeführt, und zwar solche, die hinsichtlich der mathematischen Voraussetzungen und der Stoffauswahl für Lehramtskandidaten als ergänzende Literatur zum Skriptum geeignet sind. Leider sind die meisten dieser Bücher vergriffen, also nur in Bibliotheken zugänglich. Dass es kein lebensfähiges Standardlehrbuch der theoretischen Physik für Lehramtskandidaten geben kann, liegt daran, dass die Studienpläne für Lehramtskandidaten von Land zu Land und von Universität zu Universität allzu verschieden sind.

- [1] Landau, L.D., und E.M. Lifschitz: Theoretische Physik kurzgefasst.  
Carl Hanser Verlag, München.

Band 1: Mechanik, Elektrodynamik (1990)

Band 2: Quantentheorie (1976)

Band 3: Makroskopische Physik wurde ursprünglich vom Verlag angekündigt, ist aber nicht erschienen

- [2] Wagner, M.: Elemente der Theoretischen Physik.  
rororo-vieweg, Hamburg.

Band 1: Klassische Mechanik. Quantenmechanik (1980)

Band 2: Felder und Wellen. Klassische und statistische Thermodynamik (1977)

- [3] Studienbücherei Physik für Lehrer.  
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

Band 9: Heyroth, W., W. Kuhn und H. Glassl: Mechanik (1989)

Band 10: Burmeister, H.J.: Elektrodynamik (1979)

Band 11: Röpke, G.: Quantenphysik (1980)

Band 12: Lenk, R., G. Macheleidt und P. Möbius: Statistische Physik.  
Relativitätstheorie. Elementarteilchen (1979)



## Kapitel 5

# Fundamentale physikalische Konstanten und Umrechnungsfaktoren

Seit der am 16. November 2018 von der Generalkonferenz für Maß und Gewicht beschlossenen grundlegenden Revision des SI-Einheitensystems legt ein Satz von sieben physikalischen Konstanten mit festgelegten Werten ("exakt") das System vollständig fest und bildet die Definitionsgrundlage für *alle* Einheiten des SI-Systems. Dieses neue SI-System liegt CODATA seit 2018 zugrunde.

Die folgenden Zahlenwerte für die fundamentalen physikalischen Konstanten sind dem 2022 vom Committee on Data for Science and Technology (CODATA) empfohlenen konsistenten Satz von E. Tiesinga, P. J. Mohr, D. B. Newell und B. N. Taylor entnommen.<sup>1</sup>

Die Ziffern in Klammern hinter einem Zahlenwert  $W$  kennzeichnen die Unsicherheit in den letzten Stellen des Wertes. Die Unsicherheit ist als einfache Standardabweichung  $\sigma$  angegeben. Die Chance, dass der wahre Wert im Intervall  $W \pm \sigma$  liegt, beträgt 68,27%, sie beträgt 95,45% für das Intervall  $W \pm 2\sigma$  und 99,73% für das Intervall  $W \pm 3\sigma$ .

Die Werte sind in gaußschen cgs-Einheiten angegeben. In jenen Fällen, in denen eine Formel angeführt ist, bezieht sich diese ebenfalls auf das gaußsche cgs-System. Umrechnungsfaktoren für den Übergang zu SI-Einheiten sowie zwischen einigen in der Atomphysik gebräuchlichen Energieeinheiten sind im Anschluss an die folgende Tabelle zu finden.

Punkte ... stehen für weggelassene weitere *exakte* Ziffern. Beispielsweise ist die Elementarladung im SI-System durch  $1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  (exakt) gegeben, woraus im cgs-System der Wert  $e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \cdot 2,99792458 \cdot 10^{10}/10 \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} = 4,80320471257 \dots \cdot 10^{-10} \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2}$  folgt.

Größe	Symbol	Formel	Wert
Vakuumlichtgeschwindigkeit	$c$		$2,99792458 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ (exakt)
Planckkonstante	$h$		$6,62607015 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$ (exakt)
(Wirkungsquantum)	$\hbar$	$h/2\pi$	$1,054571817 \dots \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$
elektrische Elementarladung	$e$		$4,80320471257 \dots \cdot 10^{-10} \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2}$
Avogadrokonstante (Loschmidtsche Zahl)	$N_A$		$6,02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ (exakt)
Boltzmannkonstante	$k_B$		$1,380649 \cdot 10^{-16} \text{ erg} \cdot \text{K}^{-1}$ (exakt)

<sup>1</sup>Siehe <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/>

Größe	Symbol	Formel	Wert
Gravitationskonstante	$G$		$6,67430(15) \cdot 10^{-8} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-2}$
Feinstrukturkonstante (Sommerfeldkonstante)	$\alpha$ $1/\alpha$	$e^2/\hbar c$	$7,2973525643(11) \cdot 10^{-3}$ $137,035999177(21)$
Ruhmasse des Elektrons	$m_e$		$9,1093837139(28) \cdot 10^{-28} \text{ g}$
Ruhmasse des Protons	$m_p$		$1,67262192595(52) \cdot 10^{-24} \text{ g}$
Ruhmasse des Neutrons	$m_n$		$1,67492750056(85) \cdot 10^{-24} \text{ g}$
Verhältnis aus Proton- und Elektronruhmasse		$m_p/m_e$	$1836,152673426(32)$
Rydbergkonstante für unendliche Kernmasse	$R_\infty$	$m_e e^4 / 4\pi\hbar^3 c$	$1,0973731568157(12) \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$
Rydbergkonstante für das Wasserstoffatom	$R_H$	$R_\infty / (1 + m_e/m_p)$	$1,0967758340277(12) \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$
bohrscher Radius für unendliche Kernmasse	$a_0$	$\hbar^2/m_e e^2$	$5,29177210544(82) \cdot 10^{-9} \text{ cm}$
bohrscher Radius für das Wasserstoffatom	$a_H$	$a_0(1 + m_e/m_p)$	$5,29465409460(82) \cdot 10^{-9} \text{ cm}$
Hartree-Energie	$E_h$	$e^2/a_0$	$4,3597447222060(48) \cdot 10^{-11} \text{ erg}$
klassischer Elektronradius $r_e$		$e^2/m_e c^2$	$2,8179403205(13) \cdot 10^{-13} \text{ cm}$
Comptonwellenlänge des Elektrons	$\lambda_{C,e}$	$\hbar/m_e c$	$2,42631023538(76) \cdot 10^{-10} \text{ cm}$
Comptonwellenlänge des Protons	$\lambda_{C,p}$	$\hbar/m_p c$	$1,32140985360(41) \cdot 10^{-13} \text{ cm}$
Comptonwellenlänge des Neutrons	$\lambda_{C,n}$	$\hbar/m_n c$	$1,31959090382(67) \cdot 10^{-13} \text{ cm}$
bohrsches Magneton	$\mu_B$	$e\hbar/2m_e c$	$9,2740100657(29) \cdot 10^{-21} \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2}$
Kernmagneton	$\mu_K$	$e\hbar/2m_p c$	$5,0507837393(16) \cdot 10^{-24} \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2}$
magnetisches Moment des freien Elektrons	$\mu_e$		$9,2847646917(29) \cdot 10^{-21} \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2}$
magnetisches Moment des freien Elektrons in bohrschen Magnetonen		$\mu_e/\mu_B$	$1,00115965218046(18)$
gyromagnetischer Faktor des Spins des Elektrons	$g_{s,e}$	$2\mu_e/\mu_B$	$2,00231930436092(36)$

Größe	Symbol	Formel	Wert
magnetisches Moment des freien Protons	$\mu_p$		$1,41060679545(60) \cdot 10^{-23} \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2}$
magnetisches Moment des freien Protons in Kernmagnetonen		$\mu_p/\mu_K$	2,79284734463(82)
gyromagnetischer Faktor des Spins des Protons	$g_{s,p}$	$2\mu_p/\mu_K$	5,5856946893(16)
magnetisches Moment des Neutrons	$\mu_n$		$-0,96623653(23) \cdot 10^{-23} \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2}$
magnetisches Moment des Neutrons in Kernmagnetonen		$\mu_n/\mu_K$	-1,91304276(45)
gyromagnetischer Faktor des Spins des Neutrons	$g_{s,n}$	$2\mu_n/\mu_K$	-3,82608552(90)

#### Umrechnung zwischen einigen in der Atomphysik gebräuchlichen Energieeinheiten<sup>2</sup>

$$1 \text{ eV} = 1,602176634 \cdot 10^{-12} \text{ erg} = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ J (exakt)}$$

$$1 \text{ Ry} = 2,1798723611030(24) \cdot 10^{-11} \text{ erg} = 2,1798723611030(24) \cdot 10^{-18} \text{ J} \\ = 13,605693122991(53) \text{ eV}$$

$$1 \text{ hartree} = 4,3597447222060(48) \cdot 10^{-11} \text{ erg} = 4,3597447222060(48) \cdot 10^{-18} \text{ J} \\ = 27,211386245981(30) \text{ eV}$$

$$1 \text{ atomare Energieeinheit} \equiv 1 \text{ hartree} = 2 \text{ Ry}$$

#### Umrechnung von gaußschen cgs-Einheiten in SI-Einheiten

$$c_0 \equiv 2,99792458 \cdot 10^{10}$$

Zahlenwert der in cm/s angegebenen Vakuumlichtgeschwindigkeit (exakt)

Länge	$1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$
Masse	$1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$
Kraft	$1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$
Energie	$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$
Leistung	$1 \text{ erg/s} = 10^{-7} \text{ W} \text{ (W} \equiv \text{V} \cdot \text{A)}$
elektrische Ladung	$1 \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \hat{=} 10 c_0^{-1} \text{ C} \text{ (C} \equiv \text{A} \cdot \text{s)}$
elektrische Stromstärke	$1 \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1} \hat{=} 10 c_0^{-1} \text{ A}$
elektrische Spannung	$1 \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{-1/2} \hat{=} 10^{-8} c_0 \text{ V}$
elektrische Feldstärke	$1 \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{-3/2} \hat{=} 10^{-6} c_0 \text{ V/m}$

<sup>2</sup>Siehe die Fußnote von Seite 355.

## *Physikalische Konstanten und Umrechnungsfaktoren*

---

elektrische Verschiebung	$1 \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{-3/2} \hat{=} 10^5 (4\pi c_0)^{-1} \text{ C/m}^2$
elektrischer Fluss	$1 \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \hat{=} 10 (4\pi c_0)^{-1} \text{ C}$
elektrisches Moment	$1 \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \hat{=} (10 c_0)^{-1} \text{ C} \cdot \text{m}$
magnetische Feldstärke	$1 \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{-3/2} \equiv 1 \text{ Oe} \hat{=} 10^3 (4\pi)^{-1} \text{ A/m}$
magnetische Induktion	$1 \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{-3/2} \equiv 1 \text{ G} \hat{=} 10^{-4} \text{ T} \text{ (T} \equiv \text{V} \cdot \text{s/m}^2\text{)}$
magnetischer Fluss	$1 \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \equiv 1 \text{ Mx} \hat{=} 10^{-8} \text{ Wb} \text{ (Wb} \equiv \text{V} \cdot \text{s}\text{)}$
magnetisches Moment	$1 \text{ erg}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \hat{=} 10^{-3} \text{ A} \cdot \text{m}^2$